B. G. T… …chern auf dem Ge… …nschaften …gen.

Di… …senen Werken zusamme… …n der mathematische… …zelnen wollen …e We… …aftlichen auch …dagogi… …Möglichkeit zu …bständ… …ängigem Ein…ingen … …samtheit aber …llen sie… …en Nachweise …n gena… …n dem gegen…ärtigen … …d ihrer An…endung…

…isher … …n usw. ver-

P. Bach… … …u. 2.] I. Band, X, 40… …n. ℳ 17.—

E. Blasc… … …Lehre von den statist… …Bd. XXXIII.]

H. Brun… … …e. VIII, 310 S. und …

G. H. B… … …dealing mainly with … …204 S. 1907. n. ℳ …

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Aufl. in 2 Bänden. [Bd. IX, 1 u. 2.]
I. Band: Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. X, 416 S. 1908. n. ℳ 12.—
II. — Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. X, 470 S. 1910. n. ℳ 14.—

L. E. Dickson, linear Groups with an Exposition of the Galois Field theory. X, 312 S. 1901. n. ℳ 12.—. (Englisch.) [Bd. VI.]

F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. In 2 Teilen. I. Teil. IV, 202 S. 1910. n. ℳ 6.—. [Bd. XXXII, 1.]

O. Fischer, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. X, 372 S. 1906. n. ℳ 14.—. [Bd. XXII.]

A. Gleichen, Lehrb. d. geometrisch. Optik. XIV, 511 S. 1902. n. ℳ 20.— [Bd. VIII.]

L. Henneberg, graphische Statik der starren Systeme. XV, 732 S. 1911. n. ℳ 24.—. [Bd. XXXI.]

A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. XXIV, 509 S. 1903. n. ℳ 24.— [Bd. XII.]

H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friedel. XVI, 787 S. 1907. n. ℳ 20.— [Bd. XXVI.]

R. von Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. I. Band: Kurventheorie. VI, 368 S. 1908. n. ℳ 12.—. [Bd. XXVIII, 1.]

H. A. Lorentz, on the Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat. IV, 332 S. 1909. … (Englisch.) [Bd. XXIX.]

G. Loria, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsch von Fr. Schütte. 2. Auflage. In 2 Teilen. [Bd. V, 1 u. 2]
I. Teil: Die algebraischen Kurven. XXVI, 488 S. 1910. n. M 18.—
II. — Die transzendenten Kurven. VIII, 384 S. 1911. n. M 14.—

— Vorlesungen über darst. Geometrie. Deutsch v. Fr. Schütte. 2 Teile. I. Teil. Die Darstellungsmethoden. XI, 219 S. 1907. n. M 6.80. [Bd. XXV, 1.]

A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität. Deutsch von A. Timpe. XVI, 664 S. 1907. n. M 16.— [Bd. XXIV.]

R. Mehmke, Vorlesungen über Vektoren- und Punktrechnung. 2 Bände. 1913. [XXXVII.] I. Bd. Punktrechnung. 1. Teilband.

E. Netto, Lehrbuch der Kombinatorik. VIII, 260 S. 1901. n. M 9.— [Bd. VII.]

W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie. In 2 Bänden. I. Band. 2. Aufl. XII, 766 S. 1912. n. M 18.— [Bd. XX, 1.]

E. Pascal, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die Gesamtheit der neueren Forschungen. Deutsch von H. Leitzmann. XVI, 266 S. 1900. n. M 10.— [Bd. III.]

O. Perron, die Lehre von den Kettenbrüchen. XII, 520 S. 1913. [Bd. XXXVI.]

Fr. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik. X, 519 S. 1906. n. M 16.— [Bd. XIX.]

D. Seliwanoff, Lehrb. d. Differenzenrechn. VI, 92 S. 1904. n. M 4.— [Bd. XIII.]

O. Staude, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. VIII, 447 S. 1905. n. M 14.— [Bd. XVI.]

— analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche II. Ordnung. In 2 Bänden. [Bd. XXX, 1 u. 2.] I. Band. X, 548 S. 1910. n. M 12.— II. Band. IV, S. 549—1000. 1910. n. M 18.—

O. Stolz und J. A. Gmeiner, theoretische Arithmetik.
I. Abteilung: [illegible]
II. — [illegible]

— Einleitung in die Funktionentheorie. 2., umgearbeitete Auflage. X, 598 S. 1905. n. M 15.— [Bd. XIV.]

R. Sturm, die Lehre von den geometr. Verwandtschaften. 4 Bde. [Bd. XXVII, 1—4.]
I. Band: Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. XII, 415 S. 1908. n. M 16.—
II. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. VIII, 346 S. 1908. n. M 16.—
III. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. VIII, 574 S. 1909. n. M 20.—
IV. — [illegible] X, 486 S. 1909. n. M 20.—

H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte. X, 381 S. 1908. n. M 16.— [Bd. I.]

K. Th. Vahlen, Konstruktionen u. Approximationen. 1911. XII, 349 S. n. M 12.— [Bd. XXXI.]

W. Voigt, Lehrbuch der Kristall-Physik (mit Ausschluß der Kristall-Optik). XXIV, 964 S. 1910. n. M 30.— [Bd. XXXIV.]

E. v. Weber und **A. Guldberg**, Theorie der linearen Differenzengleichungen. XII, 196 S. 1911. n. M 11.— [Bd. XXXV.]

J. G. Wallentin, Einleitung in die theoretische Elektrizitätslehre. X, 444 S. 1904. n. M 12.— [Bd. XV.]

E. von Weber, Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. XI, 622 S. 1900. n. M 24.— [Bd. II.]

A. G. Webster, the Dynamics of Particles and of rigid, elastic, and fluid Bodies, being Lectures on mathematical Physics. 2. ed. XII, 588 S. 1912. n. M 14.— [Bd. XI.] (Eine deutsche Ausgabe von C. H. Müller befindet sich in Vorbereitung.)

E. J. Wilczynski, projective differential Geometry of Curves and ruled Surfaces. VIII, 298 S. 1906. n. M 10.— (Englisch.) [Bd. XVIII.]

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN
BAND XXXVI

DIE LEHRE VON DEN KETTENBRÜCHEN

VON

DR. OSKAR PERRON
A. O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

Prof. Alex. Ziwet
gt.
3-2-1923

MEINEM LIEBEN VATER

GEWIDMET

VORWORT.

Eine zusammenfassende Darstellung der Kettenbruchlehre existiert zur Zeit nicht. Allerdings pflegen die Lehrbücher der allgemeinen Arithmetik und algebraischen Analysis einen Abschnitt über Kettenbrüche zu bringen; doch liegt es in der Natur der Sache, daß diese Werke, deren Hauptaufgabe eine andere ist, den Gegenstand bei weitem nicht erschöpfen können; die meisten gehen über die ersten Anfangsgründe nicht hinaus. Diese Lücke in der mathematischen Literatur suchte ich mit dem vorliegenden Buche auszufüllen, das in seinen Grundzügen aus einer im Wintersemester 1909—1910 an der Universität München gehaltenen Vorlesung hervorgegangen ist. Um nun eine nicht allzu voluminöse, dabei aber doch möglichst vollständige Darstellung zu geben — nur eine solche konnte dem vorhandenen Bedürfnis entsprechen —, mußte ich das umfangreiche in der Literatur aufgespeicherte Material sorgfältig sammeln und sichten, um daraus ein zusammenhängendes in sich abgeschlossenes Lehrgebäude zu errichten. Vieles konnte dabei als minder wichtig unterdrückt werden, vieles war aber auch im Interesse eines abgerundeten Ganzen neu hinzuzufügen.

Mein Hauptaugenmerk richtete ich überall auf peinliche Strenge in der Beweisführung, und dabei war eine ziemliche Arbeit zu bewältigen, weil der größte Teil der vorhandenen Literatur in diesem Punkt zu wünschen läßt. Besonders die Arbeiten Eulers über Kettenbrüche erwiesen sich als eine wahre Fundgrube für höchst interessante Beziehungen sowohl zwischen verschiedenen Kettenbrüchen als auch zwischen Kettenbrüchen und Reihen oder bestimmten Integralen; aber es ist selbstverständlich, daß die Eulerschen Beweise fast alle den heutigen Ansprüchen an Exaktheit nicht genügen. Wenn es auch nicht meine Aufgabe sein konnte, alle in Betracht kommenden Eulerschen Formeln hier mitzuteilen und mit strengen Beweisen zu versehen, so kommen doch die meisten im Buche vor; und von denen, welche nicht vorkommen, kann ich wohl behaupten, daß sie sich mit den von mir entwickelten Methoden sämtlich gewinnen lassen.

Große Sorgfalt verwandte ich weiter auf die Formulierung der Lehrsätze. Ich war darauf bedacht, daß ihr Inhalt beim Nachschlagen möglichst für sich allein verstanden werden kann, allenfalls mit Benutzung des Sachregisters, aber ohne daß man schon viele Seiten vorher zu lesen anfangen muß. Unbestimmte und für die Anwendung unbrauchbare Redensarten wurden vermieden. So wäre es z. B. an sich auch richtig gewesen, den Satz 5, Kap. IV einfach so zu formulieren: „Wenn die λ_i genügend schnell wachsen, so ist der Kettenbruch transzendent.“ Aber dann könnte man in keinem einzigen Fall die Transzendenz eines gegebenen Kettenbruches behaupten; man muß vielmehr wissen, welche Schnelligkeit im Wachstum der λ_i sicher ausreicht, um für Transzendenz garantieren zu können. Dabei kam es mir jedoch nicht darauf an, eine möglichst kleine Schranke zu erhalten. Durch weniger rohe Abschätzungen hätte ich die Bedingungen leicht verbessern können. Aber dadurch wäre nur der Beweis länger geworden, ohne daß dem ein nennenswerter praktischer Nutzen gegenüberstände.

Auf die Beigabe eines möglichst vollständigen Literaturverzeichnisses habe ich verzichtet, was ich um so eher tun konnte, als Wölffing vor einigen Jahren ein derartiges Verzeichnis veröffentlicht hat (*Wölffing* **1**). Meine Liste enthält daher lediglich diejenigen Arbeiten, die im Buche selbst zitiert sind. Über die Zitate ist noch folgendes zu bemerken. Wenn bei irgend einer Formel oder einem Lehrsatz der und der Name steht, so ist damit nicht gesagt, daß bei dem betreffenden Autor der Satz in seinem ganzen Umfang sich findet; oft steht dort nur ein wesentlicher Teil, oft mußten auch Teile weggelassen oder hinzugefügt werden, damit der Satz überhaupt richtig ist. Darüber in den einzelnen Fällen nähere Angaben zu machen, mußte ich mir der Kürze halber fast durchweg versagen. Meine Literaturangaben sollen also nichts weniger als eine historische Darstellung bedeuten; sie sind auch frei von jeder Kritik. Es wäre ja ein billiges, aber für den Zweck des Buches wohl wenig förderliches Vergnügen gewesen, bei älteren Autoren immer beizufügen, daß der Beweis die und die Lücke enthält; daß man vor hundert und mehr Jahren Beweise, wie man sie heute verlangt, nicht leistete, ist ja ohnehin jedem Leser bekannt. Ferner darf auf keinen Fall aus meinen Zitaten geschlossen werden, daß der Beweis eines Satzes an der bei dem Satz zitierten Stelle ungefähr der gleiche ist wie im Buch. Da besteht meistens nur eine sehr entfernte und oft überhaupt keine Ähnlichkeit. Denn abgesehen von dem schon erwähnten Mangel an Exaktheit in der Literatur ist es ja nur natürlich, daß ich im allgemeinen kürzer beweisen kann als die Originalarbeiten, da ich mich bei meiner zusammenfassenden

Darstellung doch viel mehr auf bereits Gefundenes zu stützen in der Lage bin. Sehr oft tritt aber auch eine Formel ziemlich unerwartet in einem bisher nicht bemerkten Zusammenhang auf.

Auf der andern Seite kann ich aber auch nicht alles, was ohne Literaturangabe geblieben ist, als mein geistiges Eigentum reklamieren. Bei schwierigeren Sätzen ist das der Fall; aber so einfache Dinge wie der Satz 1, Kap. I sind jedem, der sich mit Kettenbrüchen beschäftigt hat, bekannt gewesen und auch von jedem Autor angewandt worden, ohne daß man früher das Bedürfnis fühlte, den Satz zu formulieren. Ähnlich liegen die Dinge bei den einfachsten Sätzen über regelmäßige Kettenbrüche und noch bei zahlreichen andern, die, wenn auch nicht ausdrücklich formuliert, doch implizit bei vielen Autoren vorkommen.

Über die Stoffeinteilung des Buches ist zu sagen, daß es in zwei Hauptteile zerfällt. Der erste — elementar-arithmetische — Teil ist hauptsächlich den regelmäßigen Kettenbrüchen gewidmet. Im zweiten — analytisch-funktionentheoretischen — Teil handelt es sich um Konvergenzfragen, sodann um den analytischen Charakter gewisser Kettenbrüche, deren Elemente Funktionen einer Variabeln sind. Man hat solche Kettenbrüche als algebraische bezeichnet; doch habe ich diesen nicht sehr passenden Namen vermieden; auch zeigte sich nirgends das Bedürfnis nach einer besonderen Benennung. Eine Sonderstellung nimmt das erste Kapitel ein, insofern es den gemeinsamen Unterbau für beide Teile bildet. Daher ist der erste Teil für sich abgeschlossen; aber auch das erste Kapitel und der zweite Teil bilden zusammen ein abgeschlossenes Ganzes, das man vollständig verstehen kann, ohne die dazwischen liegenden Kapitel lesen zu müssen, wenngleich hin und wieder auf gewisse Zusammenhänge zwischen Gegenständen der beiden Teile aufmerksam gemacht ist. Die Formeln des ersten Kapitels sind daher für das ganze Buch maßgebend; sie spielen die Rolle von Lehrsätzen und sind aus diesem Grund auch fortlaufend numeriert. In den folgenden Kapiteln dagegen haben die Formeln im allgemeinen nur für den betreffenden Paragraphen Geltung, weshalb auch die Numerierung mit jedem Paragraphen neu beginnt. Die Numerierung der Sätze beginnt neu mit jedem Kapitel. Ein Verzeichnis der bemerkenswerten allgemein gültigen Formeln findet sich am Schluß hinter dem Literaturverzeichnis; es soll namentlich dazu dienen, das Nachschlagen einer Formel, deren ungefähre Gestalt man kennt, oder die Feststellung, daß irgend eine Formel schon bekannt ist, zu erleichtern. Freilich war es nicht möglich, alle in der Literatur vorkommenden Formeln unterzubringen, wogegen sich auf der andern Seite aber auch zahlreiche neue finden.

Die Vorkenntnisse, die zum Verständnis des Buches erforderlich sind, habe ich mich bemüht, auf ein Minimum herabzudrücken. Was man für den ersten Teil braucht, wird ein Student vom zweiten oder dritten Semester an bereits besitzen. Etwas mehr wird für den zweiten Teil verlangt. Die Kenntnis der wichtigsten Eigenschaften der Gammafunktion, sodann Vertrautheit mit den Hauptsätzen und Methoden der allgemeinen Funktionentheorie sind hier erforderlich. Dagegen sind tiefergreifende spezielle Kenntnisse nicht nötig. Elliptische Funktionen z. B. kommen nur gelegentlich in Beispielen vor, die vom Leser ohne Schaden überschlagen werden können. Ein gewisses Maß von mathematisch-logischer Schulung und Selbständigkeit im Urteil muß freilich wie bei der Lektüre eines jeden mathematischen Buches auch hier vorausgesetzt werden.

Bei der Durchsicht der Korrekturbogen unterstützte mich einer meiner Schüler, Freiherr von Pidoll, dem ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank für seine Mithilfe aussprechen möchte.

TÜBINGEN, im Oktober 1912. **OSKAR PERRON.**

INHALT.

I. Elementar-arithmetischer Teil.

Erstes Kapitel.

Definitionen und allgemeine Formeln.

Zweites Kapitel.

Regelmäßige Kettenbrüche.

Drittes Kapitel.

Regelmäßige periodische Kettenbrüche.

Viertes Kapitel.

Hurwitzsche Kettenbrüche. Transzendente Zahlen.

Fünftes Kapitel.

Halbregelmäßige Kettenbrüche.

II. Analytisch-funktionentheoretischer Teil.

Sechstes Kapitel.

Transformation von Kettenbrüchen.

Siebentes Kapitel.

Kriterien für Konvergenz und Divergenz.

Achtes Kapitel.

Kettenbrüche der Form $1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots$.

Neuntes Kapitel.

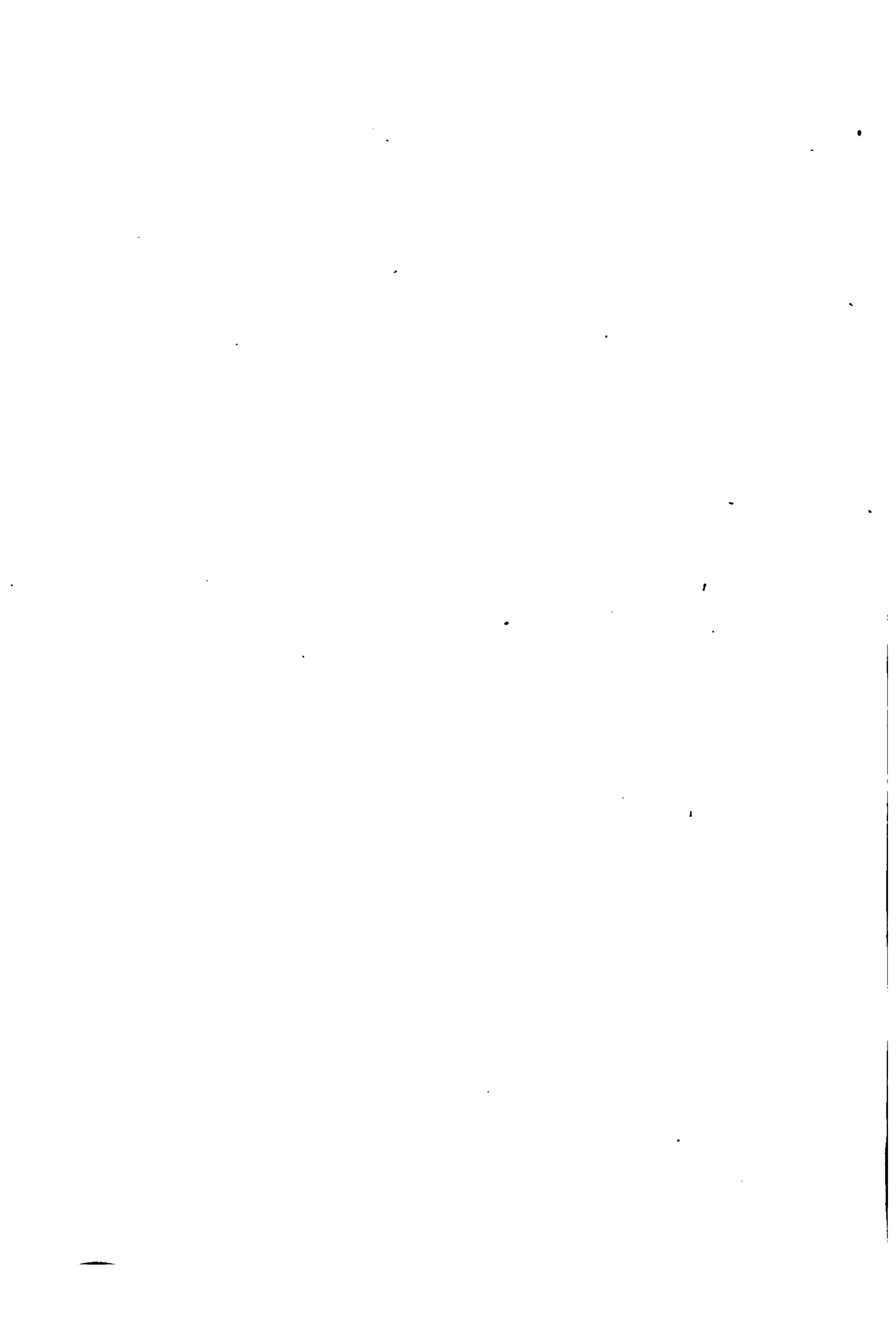
Die Kettenbrüche von Stieltjes.

Zehntes Kapitel.

Die Padésche Tafel.

I

ELEMENTAR-ARITHMETISCHER TEIL



Erstes Kapitel.

Definitionen und allgemeine Formeln.

§ 1. Bezeichnungen.

Unter einem endlichen Kettenbruch versteht man einen Ausdruck der Form

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}}. \tag{1}$$

Dabei denken wir uns vorläufig unter den Zeichen a_ν, b_ν keine numerisch gegebenen Zahlwerte, sondern irgend welche Unbestimmte oder Variable. Offenbar ist dann der Kettenbruch eine rationale Funktion dieser Variablen und läßt sich daher als Quotient von zwei ganzen Funktionen darstellen; z. B. ist für $n = 0, 1, 2$:

$$b_0 = \frac{b_0}{1}$$

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}$$

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2}} = \frac{b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_0 a_2}{b_1 b_2 + a_2}.$$

Bevor wir das allgemeine Bildungsgesetz dieser ganzen Funktionen studieren, die hier im Zähler und Nenner auftreten, wollen wir für den Kettenbruch (1) eine gedrängtere Schreibweise einführen, nämlich

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}. \tag{2}$$

In der Literatur findet man statt dessen auch vielfach

$$b_0 \dot{+} \frac{a_1}{b_1} \dot{+} \frac{a_2}{b_2} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{a_n}{b_n}$$

oder auch

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n}$$

oder noch anderes geschrieben. Doch besitzt unsere von Pringsheim eingeführte Bezeichnung wohl den Vorzug größerer Deutlichkeit.

Die a_ν, b_ν heißen die Elemente des Kettenbruches. Speziell nennt man b_0 das Anfangsglied; der Bruch $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ heißt der ν^{te} Teilbruch oder das ν^{te} Glied; ferner a_ν, b_ν der ν^{te} Teilzähler bzw. Teilnenner. Das Anfangsglied b_0 wird dann gelegentlich auch der nullte Teilnenner genannt. Von dem Kettenbruch selbst sagen wir, er sei $(n+1)$-gliedrig, indem wir bei der Zählung der Gliederanzahl das Anfangsglied b_0 ausdrücklich (als nulltes) mitzählen.

Sind einige oder alle Teilzähler mit Minuszeichen versehen, so schreibt man diese auch an Stelle der Pluszeichen vor die betreffenden Teilbrüche; also statt

$$b_0 + \frac{-a_1|}{|\, b_1} + \frac{a_2|}{|\, b_2} + \frac{-a_3|}{|\, b_3} + \cdots + \frac{-a_n|}{|\, b_n}$$

wird man z. B. auch schreiben:

$$b_0 - \frac{a_1|}{|\, b_1} + \frac{a_2|}{|\, b_2} - \frac{a_3|}{|\, b_3} \cdots - \frac{a_n|}{|\, b_n}.$$

Doch sind jetzt natürlich nicht a_1 und a_3 als erster und dritter Teilzähler anzusehen, sondern $-a_1$ und $-a_3$.

§ 2. Die Umwandlung in einen gewöhnlichen Bruch.

I. Da ein Kettenbruch als Quotient von zwei ganzen rationalen Funktionen seiner Elemente dargestellt werden kann, so setzen wir

$$b_0 + \frac{a_1|}{|\, b_1} + \frac{a_2|}{|\, b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|\, b_n} = \frac{A_n}{B_n} \tag{3}$$

und überhaupt für $\nu = 0, 1, \ldots, n$:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|\, b_1} + \frac{a_2|}{|\, b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|\, b_\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu}. \tag{4}$$

Um nun das Bildungsgesetz der ganzen Funktionen A_ν, B_ν zu erforschen, nehmen wir schrittweise $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Es ist

$$\frac{A_0}{B_0} = b_0 = \frac{b_0}{1};$$

wir dürfen daher

$$A_0 = b_0, \quad B_0 = 1 \tag{5}$$

wählen. Weiter ergibt sich

$$\frac{A_1}{B_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1}$$

und folglich werden wir

(6) $$A_1 = b_0 b_1 + a_1, \quad B_1 = b_1$$

setzen. Nun geht offenbar $\frac{A_2}{B_2}$ dadurch aus $\frac{A_1}{B_1}$ hervor, daß wir b_1 ersetzen durch $b_1 + \frac{a_2}{b_2}$; es ist also

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{b_0\left(b_1 + \frac{a_2}{b_2}\right) + a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} = \frac{(b_0 b_1 + a_1) b_2 + b_0 a_2}{b_1 b_2 + a_2},$$

so daß wir

$$A_2 = (b_0 b_1 + a_1) b_2 + b_0 a_2, \quad B_2 = b_1 b_2 + a_2$$

wählen dürfen, wofür man aber nach (5) und (6) auch schreiben kann:

$$A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0, \quad B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0.$$

Nun erkennt man leicht, daß überhaupt die A_ν, B_ν rekursorisch aus den Formeln berechnet werden können (*Wallis* **1**, *Euler* **4**):

(7) $$\begin{cases} A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} \\ B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \end{cases} \qquad (\nu \geqq 2).$$

Denn für $\nu = 2$ ist dies soeben bewiesen worden; nimmt man aber an, der Satz sei für einen gewissen Wert von ν und für alle kleineren von 2 an richtig, so erkennt man zunächst, daß erst die Funktionen A_ν, B_ν von a_ν, b_ν abhängen, während $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ und erst recht $A_{\nu-2}$, $B_{\nu-2}$ von a_ν, b_ν noch unabhängig sind. Durch Division der Gleichungen (7) ergibt sich aber

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}}.$$

Nun geht wieder $\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}$ offenbar dadurch aus $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ hervor, daß b_ν ersetzt wird durch $b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{b_{\nu+1}}$; es ergibt sich also aus der letzten Gleichung:

$$\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} = \frac{\left(b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{b_{\nu+1}}\right) A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}}{\left(b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{b_{\nu+1}}\right) B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}}$$

$$= \frac{b_{\nu+1}(b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}) + a_{\nu+1} A_{\nu-1}}{b_{\nu+1}(b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}) + a_{\nu+1} B_{\nu-1}} = \frac{b_{\nu+1} A_\nu + a_{\nu+1} A_{\nu-1}}{b_{\nu+1} B_\nu + a_{\nu+1} B_{\nu-1}}.$$

Indem man hier Zähler und Nenner beiderseits gleichsetzt, was offenbar erlaubt (aber nicht notwendig, siehe nächste Seite) ist, kommen gerade die Formeln (7), wobei nur $\nu + 1$ an Stelle von ν getreten ist; damit ist

die Allgemeingültigkeit bewiesen. Die Rekursionsformeln (7) gestatten nun, die Funktionen A_ν, B_ν, nachdem sie ja für $\nu = 0, 1$ nach (5), (6) bereits bekannt sind, sukzessive auch für $\nu = 2, 3, \ldots$, also schließlich für $\nu = n$ zu berechnen, womit dann die Umwandlung des ursprünglichen Kettenbruchs in einen gewöhnlichen Bruch, d. h. Quotienten von zwei ganzen Funktionen, geleistet ist.

Da durch die Definitionsgleichung (4) nur der Quotient $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, aber nicht A_ν, B_ν selbst definiert sind, so hätte man natürlich ebensogut in beiden Gleichungen (7) auf der rechten Seite einen gemeinsamen Faktor beifügen dürfen, der eine Zahl oder eine ganze rationale Funktion der Elemente sein kann und sich bei dem Quotienten $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ ja weghebt. Die von uns gewählte Gestalt der Gleichungen (7) ist daher keineswegs notwendig, sondern sie empfiehlt sich lediglich durch ihre Einfachheit. Doch ist vorläufig natürlich nicht sicher, ob bei diesem Ansatz die Funktionen A_ν und B_ν nicht trotzdem einen gemeinsamen Faktor haben, der sich unterdrücken ließe; es wird sich aber in § 7 zeigen, daß ein solcher tatsächlich nicht vorhanden ist. Man beachte, daß die A_ν, B_ν ganze rationale Funktionen der Elemente sind mit *positiven ganzzahligen Koeffizienten*. Denn für $\nu = 0, 1$ ist dies nach (5), (6) evident und gilt daher wegen der Rekursionsformel (7) allgemein. Für viele Untersuchungen wird es sich als nützlich erweisen, noch die Größen

$$A_{-1} = 1, \quad B_{-1} = 0 \tag{8}$$

definitionsweise einzuführen; dadurch erreicht man nämlich, daß die Formeln (7) auch für $\nu = 1$ fortbestehen.

Eine bemerkenswerte Tatsache ist es auch, daß die Funktion B_ν aus $A_{\nu-1}$ hervorgeht, indem man die Indizes aller Elemente um 1 erhöht. Wenn man nämlich zunächst die durch diese Erhöhung hervorgehende Funktion mit $A_{\nu-1,1}$ bezeichnet, so ergibt sich aus den Formeln

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad A_{\nu-1} = b_{\nu-1} A_{\nu-2} + a_{\nu-1} A_{\nu-3}$$

durch Erhöhung der Indizes:

$$A_{-1,1} = 1, \quad A_{0,1} = b_1, \quad A_{\nu-1,1} = b_\nu A_{\nu-2,1} + a_\nu A_{\nu-3,1}.$$

Es genügt also $A_{\nu-1,1}$ der gleichen Rekursionsformel wie B_ν und außerdem ist $A_{-1,1} = B_0$, $A_{0,1} = B_1$. Daraus folgt aber ganz allgemein: $A_{\nu-1,1} = B_\nu$ (durch Schluß von ν auf $\nu + 1$), w. z. b. w. Eine einfache Folge hiervon ist es, daß B_ν von b_0 und a_1 nicht abhängt, wie auch direkt leicht einzusehen.

II. Wir werden, um die Abhängigkeit der Funktion A_ν von den Elementen deutlich zu machen, bisweilen das von Th. Muir eingeführte Symbol

$$A_\nu = K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_\nu \\ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_\nu \end{pmatrix} \tag{9}$$

gebrauchen. Es ist dann auch

$$A_{\nu-1} = K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1} \\ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

und also durch Erhöhung der Indizes um eine Einheit:

$$B_\nu = K\begin{pmatrix} a_2, a_3, \ldots, a_\nu \\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_\nu \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Endlich sei noch die folgende Formel wegen ihrer häufigen Anwendung ausdrücklich hervorgehoben:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu} = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}a_\nu}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu}. \tag{11}$$

In der Tat geht ja dieser Kettenbruch aus

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}}$$

durch bloße Änderung der Bezeichnung hervor, indem einfach b_ν ersetzt wird durch ξ_ν.

Hieran schließen wir noch die folgende **Definition**: Die Brüche

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots, \frac{A_n}{B_n}$$

heißen die Näherungsbrüche des Kettenbruches (2), und zwar allgemein $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung.[1]) Der letzte Näherungsbruch fällt demnach mit dem Kettenbruch selbst zusammen, während der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung entsteht, indem man nur die $\nu + 1$ ersten Glieder mitnimmt, die $n - \nu$ letzten aber wegläßt. Die Funktion A_ν heißt entsprechend der Näherungszähler, ebenso B_ν der Näherungsnenner ν^{ter} Ordnung.

§ 3. Independente Darstellung der Näherungszähler und -Nenner.

I. Die Rekursionsformeln (7) des vorigen Paragraphen gestatten die Näherungszähler und -Nenner A_ν, B_ν sukzessive für wachsende Werte von ν zu berechnen. Um auch eine independente Darstellung für diese Funktionen zu erhalten, betrachten wir das Produkt

$$P_\nu = b_0 b_1 \ldots b_\nu \left(1 + \frac{a_1}{b_0 b_1}\right)\left(1 + \frac{a_2}{b_1 b_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right), \quad P_0 = b_0. \tag{12}$$

Multipliziert man aus, so werden in dem entstehenden Aggregat gewisse Glieder vorkommen, in denen alle b_i des Nenners sich wegheben, z. B. die beiden Glieder

1) Von andern als $(\nu + 1)^{\text{ter}}$ Näherungsbruch bezeichnet.

$$b_0 b_1 \ldots b_\nu \frac{a_1}{b_0 b_1} = b_2 \ldots b_\nu a_1; \quad b_0 b_1 \ldots b_\nu \frac{a_1}{b_0 b_1} \frac{a_3}{b_2 b_3} = b_4 \ldots b_\nu a_1 a_3.$$

Es werden aber auch Terme vorkommen, bei denen dies nicht der Fall ist, zum Beispiel

$$b_0 b_1 \ldots b_\nu \frac{a_1}{b_0 b_1} \frac{a_2}{b_1 b_2} = \frac{b_3 \ldots b_\nu a_1 a_2}{b_1}.$$

Bezeichnet man die Gesamtheit der Terme der ersten Art mit P_ν', die der zweiten Art mit P_ν'', so ist

$$P_\nu = P_\nu' + P_\nu''.$$

Man verifiziert nun ohne weiteres

$$P_0' = b_0 = A_0,$$
$$P_1' = b_0 b_1 + a_1 = A_1.$$

Wenn wir daher noch die Rekursionsformel beweisen können:

$$P_\nu' = b_\nu P_{\nu-1}' + a_\nu P_{\nu-2}' \qquad (\nu \geqq 2),$$

so wird, weil die A_ν nach (7) ebenderselben genügen, allgemein $P_\nu' = A_\nu$ sein (Schluß von ν auf $\nu + 1$). Nun folgt aber sofort aus der Definition von P_ν:

$$P_\nu = b_\nu \left(1 + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right) P_{\nu-1} = b_\nu P_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}} P_{\nu-1};$$

also auch, indem man ν durch $\nu - 1$ ersetzt:

$$P_{\nu-1} = b_{\nu-1} P_{\nu-2} + \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-2}} P_{\nu-2}.$$

Führt man dies in den letzten Term der vorigen Gleichung ein, so entsteht

$$P_\nu = b_\nu P_{\nu-1} + a_\nu P_{\nu-2} + \frac{a_\nu a_{\nu-1}}{b_{\nu-1} b_{\nu-2}} P_{\nu-2}.$$

Der Sinn dieser Gleichung ist nun offenbar der: Wenn man für P_ν, [illegible]

[illegible]

Aus P_ν ergibt sich für P_ν' und also für A_ν die Darstellung:

$$
(13)\quad \begin{aligned} A_\nu = b_0 b_1 \ldots b_\nu \Bigg(1 + \sum_i^{0,\nu-1} \frac{a_{i+1}}{b_i b_{i+1}} + \sum_{i<k}^{0,\nu-2} \frac{a_{i+1}}{b_i b_{i+1}} \frac{a_{k+2}}{b_{k+1} b_{k+2}} \\ + \sum_{i<k<l}^{0,\nu-3} \frac{a_{i+1}}{b_i b_{i+1}} \frac{a_{k+2}}{b_{k+1} b_{k+2}} \frac{a_{l+3}}{b_{l+2} b_{l+3}} + \cdots \Bigg), \end{aligned}
$$

wobei in der ersten Summe der Index i die Werte von 0 bis $\nu - 1$ durchläuft, so daß diese Summe ν Glieder hat; ebenso ist in der zweiten Summe i, k über alle Kombinationen der Zahlen $0, 1, \ldots, \nu - 2$ zur zweiten Klasse ohne Wiederholung zu erstrecken ($i < k$), so daß diese Summe $\binom{\nu-1}{2}$ Glieder enthält; in der dritten Summe i, k, l über alle Kombinationen der Zahlen $0, 1, \ldots, \nu - 3$ zur dritten Klasse ohne Wiederholung ($i < k < l$), so daß die Gliederzahl gleich $\binom{\nu-2}{3}$ ist, usw. Die Reihe (13) ist soweit fortzusetzen, bis sie von selbst abbricht.[1])

Ebenso beweist man nun, daß in dem Produkt

$$
Q_\nu = b_1 b_2 \ldots b_\nu \left(1 + \frac{a_2}{b_1 b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right)
$$

die Gesamtheit derjenigen Glieder, in denen die b_i des Nenners sich alle wegheben, gerade gleich B_ν ist. Es ergibt sich dies aber auch sofort aus dem Umstand, daß B_ν aus $A_{\nu-1}$ entsteht, indem man die Indizes aller Elemente um 1 erhöht. Für B_ν erhält man daher die Formel:

$$
(14)\quad B_\nu = b_1 b_2 \ldots b_\nu \left(1 + \sum_i^{1,\nu-1} \frac{a_{i+1}}{b_i b_{i+1}} + \sum_{i<k}^{1,\nu-2} \frac{a_{i+1}}{b_i b_{i+1}} \frac{a_{k+2}}{b_{k+1} b_{k+2}} + \cdots \right).
$$

Die Formeln (13), (14) hat in dieser Allgemeinheit dem Prinzip nach *Stern* 2, übersichtlicher *Minding* 1 angegeben; für den Fall, daß alle Teilzähler $a_i = 1$ sind, schon *Euler* 8; wir nennen sie die Euler-Mindingschen Formeln. Auf den Zusammenhang mit dem Produkt P_ν hat für den Fall $a_i = 1$ *Siebeck* 1 aufmerksam gemacht, im allgemeinen Fall wohl erst *Jensen* 1.

II. Um die Nützlichkeit unserer Formeln darzutun, wollen wir die Anzahl der Terme berechnen, aus denen sich A_ν, B_ν zusammensetzen. Dazu ist aber nur nötig, die verschiedenen Anzahlen, die den einzelnen

1) Natürlich sind die Brüche in Formel (13) nur scheinbar; in Wahrheit heben sich ja alle Nenner weg und jeder Term ist ganz. Das ist bei Anwendung auf numerische Kettenbrüche zu beachten, wenn einige b_i verschwinden, in welchem Fall ja verschiedene Terme, wenn man sie in ihrer Bruchform beließe, sinnlos wären.

Summen entsprechen und die wir schon angegeben haben, zusammenzuzählen. Die Gesamtanzahl erweist sich so für A_ν gleich

$$1+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu-1}{2}+\binom{\nu-2}{3}+\cdots$$

und analog für B_ν:

$$1+\binom{\nu-1}{1}+\binom{\nu-2}{2}+\binom{\nu-3}{3}+\cdots,$$

wobei diese Reihen soweit fortzusetzen sind, bis sie von selbst abbrechen (*Stern* 2).

Als weitere Anwendung berechnen wir den Wert des $(\nu+1)$-gliedrigen Kettenbruches

$$b+\frac{a|}{|b}+\frac{a|}{|b}+\cdots+\frac{a|}{|b},$$

der also außer dem Anfangsglied b noch ν untereinander gleiche Teilbrüche $\frac{a|}{|b}$ hat. Hier werden in den Formeln (13), (14) die Glieder unter der ersten Summe alle gleich $\frac{a}{b^2}$, die der zweiten alle gleich $\frac{a^2}{b^4}$ usw., so daß man erhält (*Stern* 2):

$$A_\nu = b^{\nu+1} + \binom{\nu}{1} b^{\nu-1}a + \binom{\nu-1}{2} b^{\nu-3}a^2 + \binom{\nu-2}{3} b^{\nu-5}a^3 + \cdots,$$

$$B_\nu = b^\nu + \binom{\nu-1}{1} b^{\nu-2}a + \binom{\nu-2}{2} b^{\nu-4}a^2 + \binom{\nu-3}{3} b^{\nu-6}a^3 + \cdots,$$

woraus sich durch Division der Wert des Kettenbruches ergibt. Die Reihen sind dabei wieder soweit fortzusetzen, bis sie von selbst abbrechen.

§ 4. Kontinuanten.

I. Eine von der *Euler-Minding*schen grundverschiedene independente Darstellung der A_ν, B_ν ist nach manchen älteren Ansätzen[1]) etwa gleichzeitig durch zwei Autoren, *S. Günther* 1 und *Nachreiner* 1, systematisch für die Theorie der Kettenbrüche verwertet worden. Sie ergibt sich am einfachsten, wenn man die Rekursionsformel (7) für A_ν in der Gestalt schreibt

$$a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1} - A_\nu = 0,$$

und für ν der Reihe nach die Werte $1, 2, \ldots, \nu$ einsetzt. Man erhält dadurch (vgl. (8)):

$$\begin{aligned}
&b_1 A_0 - A_1 && = -a_1\\
&a_2 A_0 + b_2 A_1 - A_2 && = 0\\
&\qquad a_3 A_1 + b_3 A_2 - A_3 && = 0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad a_\nu A_{\nu-2} + b_\nu A_{\nu-1} - A_\nu && = 0.
\end{aligned}$$

1) Erstes Vorkommen bei *Sylvester* 1.

Schreibt man an die Spitze dieses Systems noch die Gleichung $-A_0 = -b_0$, so hat man im ganzen $\nu + 1$ lineare Gleichungen für die $\nu + 1$ Unbekannten $A_0, A_1, \ldots, A_\nu$. Löst man diese nach den elementaren Regeln der Determinantentheorie speziell nach der letzten Unbekannten A_ν auf, so ergibt sich

$$(-1)^{\nu+1} A_\nu = \begin{vmatrix} -1 & & & & & & & -b_0 \\ b_1 & -1 & & & & & & -a_1 \\ a_2 & b_2 & -1 & & & & & 0 \\ & a_3 & b_3 & -1 & & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & a_{\nu-1} & b_{\nu-1} & -1 & 0 \\ & & & & & a_\nu & b_\nu & 0 \end{vmatrix},$$

wo die leeren Felder durch Nullen auszufüllen sind. Indem man die letzte Kolonne an die erste Stelle bringt und das Vorzeichen ändert, erhält man:

$$(15) \qquad A_\nu = \begin{vmatrix} b_0 & -1 & & & & \\ a_1 & b_1 & -1 & & & \\ & a_2 & b_2 & -1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_{\nu-1} & b_{\nu-1} & -1 \\ & & & & a_\nu & b_\nu \end{vmatrix}.$$

Eine derartige Determinante wird als **Kettenbruchdeterminante** oder **Kontinuante**, auch **Kumulante** bezeichnet. Durch ein analoges Verfahren erhält man B_ν; doch kommt man rascher zu dem gewünschten Ausdruck, wenn man wieder bedenkt, daß B_ν aus $A_{\nu-1}$ hervorgeht, indem man die Indizes der Elemente alle um 1 erhöht. So ergibt sich augenblicklich

$$(16) \qquad B_\nu = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & & & & \\ a_2 & b_2 & -1 & & & \\ & a_3 & b_3 & -1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_{\nu-1} & b_{\nu-1} & -1 \\ & & & & a_\nu & b_\nu \end{vmatrix};$$

woraus man weiter ersieht:

$$(17) \qquad B_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial b_0}.$$

II. Als Anwendung dieser Formeln beweisen wir eine wichtige Eigenschaft der Funktionen A_ν, die sich übrigens ebenso leicht aus der

Euler-Mindingschen Darstellung ergeben würde und die sich bei Benutzung des Muirschen Symbols in der Formel ausdrückt:

$$(18)\qquad K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_\nu \\ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_\nu \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1 \\ b_\nu, b_{\nu-1}, b_{\nu-2}, \ldots, b_0 \end{pmatrix}.$$

Schreibt man nämlich beide Seiten dieser Gleichung als Kontinuanten, so haben sie die Gestalt

$$\begin{vmatrix} b_0 & -1 & & & & \\ a_1 & b_1 & -1 & & & \\ & a_2 & b_2 & -1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_{\nu-1} & b_{\nu-1} & -1 \\ & & & & a_\nu & b_\nu \end{vmatrix} \text{ bzw. } \begin{vmatrix} b_\nu & -1 & & & & \\ a_\nu & b_{\nu-1} & -1 & & & \\ & a_{\nu-1} & b_{\nu-2} & -1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_2 & b_1 & -1 \\ & & & & a_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinanten sind aber in der Tat einander gleich, da die eine aus der andern durch Umklappen um die Nebendiagonale hervorgeht. *Das Muirsche Symbol bleibt also unverändert, wenn man die Reihenfolge der Elemente umkehrt.*

Als Folgerung dieses Satzes bemerken wir sogleich die beiden Formeln

$$(19)\qquad b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-2}} + \cdots + \frac{a_1|}{|b_0} = \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}},$$

$$(20)\qquad b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-2}} + \cdots + \frac{a_2|}{|b_1} = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}}.$$

In der Tat sind diese Kettenbrüche zunächst gleich

$$\frac{K\begin{pmatrix} a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1 \\ b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots\ldots, b_0 \end{pmatrix}}{K\begin{pmatrix} a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, \ldots, a_1 \\ b_{\nu-1}, b_{\nu-2}, \ldots\ldots, b_0 \end{pmatrix}} \text{ bzw. } \frac{K\begin{pmatrix} a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_2 \\ b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots\ldots, b_1 \end{pmatrix}}{K\begin{pmatrix} a_{\nu-1}, a_{\nu-2}, \ldots, a_2 \\ b_{\nu-1}, b_{\nu-2}, \ldots\ldots, b_1 \end{pmatrix}}.$$

Da man aber die Reihenfolge der Elemente in den Muirschen Symbolen umkehren darf, so ergeben sich in der Tat die angegebenen Werte.

§ 5. Die Fundamentalformeln.

I. Wenn $x_0, x_1, x_2, \ldots$ beliebige Variable sind, zwischen denen die Gleichungen bestehen

$$(21)\qquad \begin{cases} x_0 = b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 = b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot, \end{cases}$$

so werden dadurch irgend zwei dieser Variabeln unabhängig gelassen, während alle andern lineare homogene Funktionen von ihnen sind. Insbesondere werden also, wenn ν ein beliebiger Index ist, x_0 und x_1 solche Funktionen von x_ν, $x_{\nu+1}$ sein. Bevor wir diese berechnen, schreiben wir die ν ersten der Gleichungen (21) in der Gestalt:

$$\begin{aligned} x_0 : x_1 &= b_0 + \frac{a_1}{x_1 : x_2} \\ x_1 : x_2 &= b_1 + \frac{a_2}{x_2 : x_3} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{\nu-1} : x_\nu &= b_{\nu-1} + \frac{a_\nu}{x_\nu : x_{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Dadurch fällt sofort der Zusammenhang in die Augen, der zwischen diesem Gleichungssystem und den Kettenbrüchen besteht. Indem man nämlich in jeder Gleichung für den Nenner der rechten Seite den durch die nächstfolgende Gleichung gelieferten Wert einsetzt, erhält man $x_0 : x_1$ in Form eines Kettenbruches:

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu \quad |}{|x_\nu : x_{\nu+1}}.$$

Nach Formel (11) kann man statt dessen schreiben

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{A_{\nu-1} x_\nu : x_{\nu+1} + a_\nu A_{\nu-2}}{B_{\nu-1} x_\nu : x_{\nu+1} + a_\nu B_{\nu-2}} = \frac{A_{\nu-1} x_\nu + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1}}{B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}},$$

und wir wollen jetzt beweisen, daß hier nicht nur zwischen den beiden äußeren Brüchen, sondern zwischen ihren Zählern und Nennern je für sich Gleichheit besteht; also

$$(22) \qquad \begin{cases} x_0 = A_{\nu-1} x_\nu + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1} \\ x_1 = B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}. \end{cases}$$

In der Tat sind diese Formeln für $\nu = 1$ ja evident. Nimmt man aber an, sie gelten für einen gewissen Wert von ν, so ergibt sich, indem man für x_ν den Wert aus der $(\nu + 1)^{\text{ten}}$ der Gleichungen (21) einsetzt:

$$\begin{aligned} x_0 &= A_{\nu-1}(b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}) + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1} \\ x_1 &= B_{\nu-1}(b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}) + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}, \end{aligned}$$

wofür man unter Berücksichtigung der Rekursionsformeln (7) auch schreiben kann:

$$\begin{aligned} x_0 &= A_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} A_{\nu-1} x_{\nu+2} \\ x_1 &= B_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} B_{\nu-1} x_{\nu+2}. \end{aligned}$$

Dies besagt aber, daß die Gleichungen (22) auch für den nächstfolgen-

den Wert von ν richtig sind; sie gelten daher allgemein. Damit sind x_0, x_1 linear durch x_ν, $x_{\nu+1}$ ausgedrückt.

II. Wenn man die Indizes aller a, b, x um eine Zahl λ erhöht, so geht jede Gleichung des Systems (21) in diejenige desselben Systems über, welche um λ Zeilen später kommt. Daher müssen auch die daraus abgeleiteten Gleichungen (22) richtig bleiben, wenn man darin die genannte Indizeserhöhung vornimmt. Um die so entstehenden Gleichungen bequem schreiben zu können, bezeichnen wir diejenigen Funktionen der Elemente, welche aus A_ν, B_ν entstehen, wenn man die Indizes aller darin auftretenden Elemente um λ erhöht, mit $A_{\nu,\lambda}$, $B_{\nu,\lambda}$; es ist also nach dieser Definition

$$(23)\qquad \begin{cases} A_{\nu,\lambda} = K\begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+\nu} \\ b_\lambda, b_{\lambda+1}, \ldots\ldots\ldots, b_{\lambda+\nu} \end{pmatrix} & A_{\nu,0} = A_\nu, \\ B_{\nu,\lambda} = K\begin{pmatrix} a_{\lambda+2}, a_{\lambda+3}, \ldots, a_{\lambda+\nu} \\ b_{\lambda+1}, b_{\lambda+2}, \ldots\ldots, b_{\lambda+\nu} \end{pmatrix} & B_{\nu,0} = B_\nu, \end{cases}$$

$$(23a)\qquad A_{-1,\lambda} = 1,\ B_{-1,\lambda} = 0,\ A_{0,\lambda} = b_\lambda,\ B_{0,\lambda} = 1,\ B_{1,\lambda} = b_{\lambda+1}.$$

Nimmt man nun in (22) die gedachte Indizeserhöhung vor, so kommt:

$$x_\lambda = A_{\nu-1,\lambda}x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda}A_{\nu-2,\lambda}x_{\nu+\lambda+1}$$
$$x_{\lambda+1} = B_{\nu-1,\lambda}x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda}B_{\nu-2,\lambda}x_{\nu+\lambda+1}.$$

Wenn man jetzt die Gleichungen (22) speziell für den Wert $\nu = \lambda$ (der übrigens beliebig ist) anschreibt und dann auf der rechten Seite für x_λ, $x_{\lambda+1}$ die soeben gefundenen Werte einsetzt, erhält man nach leichter Umordnung der Glieder:

$$\begin{aligned} x_0 = (A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda})x_{\nu+\lambda} \\ + a_{\nu+\lambda}(A_{\lambda-1}A_{\nu-2,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-2,\lambda})x_{\nu+\lambda+1} \\ x_1 = (B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda})x_{\nu+\lambda} \\ + a_{\nu+\lambda}(B_{\lambda-1}A_{\nu-2,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-2,\lambda})x_{\nu+\lambda+1}. \end{aligned}$$

Anderseits ergibt sich aber direkt aus (22), indem man $\nu + \lambda$ an Stelle von ν setzt,

$$x_0 = A_{\nu+\lambda-1}x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda}A_{\nu+\lambda-2}x_{\nu+\lambda+1}$$
$$x_1 = B_{\nu+\lambda-1}x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda}B_{\nu+\lambda-2}x_{\nu+\lambda+1}.$$

Da die Variabeln $x_{\nu+\lambda}$, $x_{\nu+\lambda+1}$ unabhängig angenommen werden dürfen (wodurch dann die andern x eindeutig bestimmt sind), so entstehen durch Vergleichung der beiden letzten Formelpaare die zwei wichtigen Gleichungen:

$$(24)\qquad \begin{cases} A_{\nu+\lambda-1} = A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda} \\ B_{\nu+\lambda-1} = B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}, \end{cases}$$

die sich übrigens auch durch den Schluß von ν auf $\nu+1$ erweisen lassen. Diese beiden Gleichungen werden wir stets als die **Fundamentalformeln** bezeichnen. Dabei ist zu bemerken, daß die zweite ihrem Wesen nach mit der ersten identisch ist und sich nur durch die Bezeichnung von ihr unterscheidet. Es ist nämlich, wie man aus (23) und (23a) sofort erkennt,

$$B_{\nu,\lambda} = A_{\nu-1,\lambda+1}. \tag{25}$$

Infolgedessen läßt sich in all unsern Formeln der Buchstabe B vermeiden, und dafür A mit passender Indexänderung einsetzen. Tut man dies speziell in den beiden Fundamentalformeln, so gehen sie über in

$$\begin{aligned} A_{\nu+\lambda-1} &= A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}A_{\nu-2,\lambda+1} \\ A_{\nu+\lambda-2,1} &= A_{\lambda-2,1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-3,1}A_{\nu-2,\lambda+1}. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man aber, daß die beiden Formeln sich in der Tat nur durch die Bezeichnung unterscheiden; denn die zweite geht augenscheinlich aus der ersten hervor, indem man $\lambda-1$ an Stelle von λ setzt und sodann bei allen Elementen den Index um 1 erhöht.

Bei Benutzung des **Muirschen** Symbols schreibt sich die erste der Formeln (24) in der Gestalt

$$\left\{\begin{aligned} K\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_{\nu+\lambda-1} \\ b_0, b_1, \ldots\ldots, b_{\nu+\lambda-1}\end{pmatrix} &= K\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{\lambda-1} \\ b_0, \ldots\ldots, b_{\lambda-1}\end{pmatrix} K\begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, \ldots, a_{\lambda+\nu-1} \\ b_\lambda, \ldots\ldots\ldots, b_{\lambda+\nu-1}\end{pmatrix} \\ &+ a_\lambda K\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{\lambda-2} \\ b_0, \ldots\ldots, b_{\lambda-2}\end{pmatrix} K\begin{pmatrix} a_{\lambda+2}, \ldots, a_{\lambda+\nu-1} \\ b_{\lambda+1}, \ldots\ldots, b_{\lambda+\nu-1}\end{pmatrix}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

und die zweite geht daraus durch die besagte Änderung der Bezeichnung hervor.

Als Spezialfall der Fundamentalformeln bemerken wir den für $\nu = 1$:

$$A_\lambda = b_\lambda A_{\lambda-1} + a_\lambda A_{\lambda-2}, \quad B_\lambda = b_\lambda B_{\lambda-1} + a_\lambda B_{\lambda-2},$$

der offenbar auf die Rekursionsformeln (7) hinausläuft; sowie auch den für $\lambda = 1$:

$$\left\{\begin{aligned} A_\nu &= b_0 A_{\nu-1,1} + a_1 B_{\nu-1,1} \\ B_\nu &= A_{\nu-1,1}, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

wobei aber auch nur die erste Gleichung für uns neu ist. Erhöht man in dieser noch sämtliche Indizes um eine Zahl λ und ersetzt die A vermittels (25) durch B, so entsteht:

$$B_{\nu+1,\lambda-1} = b_\lambda B_{\nu,\lambda} + a_{\lambda+1}B_{\nu-1,\lambda+1}. \tag{28}$$

Hieraus erhält man endlich noch, wenn man ν, λ bzw. ersetzt durch $\nu+1$, $\lambda-1$, und statt B vermittels (25) A einführt:

$$A_{\nu+1,\lambda-1} = b_{\lambda-1}A_{\nu,\lambda} + A_{\nu-1,\lambda+1}. \tag{29}$$

III. Aus den beiden letzten Formeln ergibt sich eine neue rekurrente Berechnungsart für den Kettenbruch (2). Während unser früheres Verfahren in § 2 darin bestand, daß wir sukzessive die Brüche

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots, \frac{A_n}{B_n}$$

berechneten, wobei jeder folgende aus den zwei vorausgehenden vermittels der Formeln (7) hervorging, können wir statt dessen auch die Brüche

$$\frac{A_{0,n}}{B_{0,n}}, \frac{A_{1,n-1}}{B_{1,n-1}}, \frac{A_{2,n-2}}{B_{2,n-2}}, \ldots, \frac{A_{n-1,1}}{B_{n-1,1}}, \frac{A_n}{B_n},$$

das heißt die Kettenbrüche

$$b_{n-\nu} + \frac{a_{n-\nu+1}|}{|b_{n-\nu+1}} + \frac{a_{n-\nu+2}|}{|b_{n-\nu+2}} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

der Reihe nach berechnen. In der Tat geht hier jeder folgende aus den beiden vorausgehenden vermittels der Formeln (28) und (29), angewandt für $\nu + \lambda = n$, hervor.

§ 6. Folgerungen aus den Fundamentalformeln.

I. Die Fundamentalformeln sind eine Quelle für eine ganze Anzahl weiterer nicht minder wichtiger Relationen. Zunächst ergibt sich mit Rücksicht auf die Rekursionsformeln (7):

$$\begin{aligned} A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda &= (b_\lambda A_{\lambda-1} + a_\lambda A_{\lambda-2}) B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1}(b_\lambda B_{\lambda-1} + a_\lambda B_{\lambda-2}) \\ &= - a_\lambda (A_{\lambda-1} B_{\lambda-2} - A_{\lambda-2} B_{\lambda-1}). \end{aligned}$$

Hier unterscheidet sich aber die Klammergröße der rechten Seite nur dadurch von der linken Seite, daß λ durch $\lambda - 1$ ersetzt ist. Indem man daher für λ der Reihe nach die Werte $\lambda, \lambda - 1, \ldots, 2, 1$ einsetzt und die entstehenden Gleichungen miteinander multipliziert, erhält man

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^\lambda a_\lambda a_{\lambda-1} \ldots a_2 a_1 (A_0 B_{-1} - A_{-1} B_0),$$

also, wenn man für die Größen A_0, B_0, A_{-1}, B_{-1} ihre Werte b_0, 1, 1, 0 einsetzt,

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda. \tag{30}$$

Diese Formel ist nützlich, um die Differenz von zwei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen auszudrücken; sie ergibt:

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1 a_2 \ldots a_\lambda}{B_{\lambda-1} B_\lambda}. \tag{31}$$

Die Gleichung (30) läßt sich noch wesentlich verallgemeinern. Aus den Fundamentalformeln (24) folgt nämlich

$$\begin{aligned}A_{\nu+\lambda-1}B_{\lambda-1}-A_{\lambda-1}B_{\nu+\lambda-1} &= (A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda}+a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda})B_{\lambda-1}\\ &\quad - A_{\lambda-1}(B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda}+a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda})\\ &= -a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}(A_{\lambda-1}B_{\lambda-2}-A_{\lambda-2}B_{\lambda-1}).\end{aligned}$$

Also, indem man für die Klammer der rechten Seite den in (30) gefundenen Ausdruck einsetzt (wobei nur $\lambda-1$ an Stelle von λ zu treten hat):

$$(32)\qquad A_{\nu+\lambda-1}B_{\lambda-1}-A_{\lambda-1}B_{\nu+\lambda-1}=(-1)^{\lambda-1}a_1a_2\cdots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}.$$

Mittels dieser Formel kann man nun die Differenz von zwei beliebigen Näherungsbrüchen ausdrücken, nämlich

$$(33)\qquad \frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}}-\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}=(-1)^{\lambda-1}\frac{a_1a_2\cdots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu+\lambda-1}B_{\lambda-1}}.$$

Für $\nu=1$ geht diese Gleichung wieder in (31) über; daneben verdient auch der Spezialfall $\nu=2$ hervorgehoben zu werden:

$$(34)\qquad \frac{A_{\lambda+1}}{B_{\lambda+1}}-\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}=(-1)^{\lambda-1}\frac{a_1a_2\cdots a_\lambda b_{\lambda+1}}{B_{\lambda+1}B_{\lambda-1}}.$$

Gelegentlich werden wir auch die Formel gebrauchen, welche aus (32) hervorgeht, wenn man die Indizes aller Elemente um eine Zahl μ erhöht; man erhält dadurch

$$(35)\qquad \begin{aligned}&A_{\nu+\lambda-1,\mu}B_{\lambda-1,\mu}-A_{\lambda-1,\mu}B_{\nu+\lambda-1,\mu}\\ &\quad=(-1)^{\lambda-1}a_{\mu+1}a_{\mu+2}\cdots a_{\mu+\lambda}B_{\nu-1,\mu+\lambda},\end{aligned}$$

eine Formel, die sich aber von (32) natürlich nur durch die Bezeichnung, nicht nach ihrem Wesen unterscheidet.

II. Während die ursprünglichen Rekursionsformeln (7) aus irgend zwei aufeinanderfolgenden Näherungszählern oder -Nennern den nächstfolgenden zu berechnen gestatten, dienen die Fundamentalformeln dazu, mit Hilfe von zwei aufeinanderfolgenden $A_{\lambda-1}$, $A_{\lambda-2}$ sogar ein beliebiges A mit größerem Index direkt auszudrücken; ebenso für B. Wir wollen nun noch eine Formel angeben, welche einen beliebigen Näherungszähler durch irgend zwei vorhergehende nicht notwendig aufeinanderfolgende ausdrückt, also etwa $A_{\alpha+\beta+\gamma-1}$ durch $A_{\alpha-1}$ und $A_{\alpha+\beta-1}$; ebenso auch für die Näherungsnenner. Zu dem Zweck bezeichne U_λ generell den Näherungszähler oder -Nenner λ^{ter} Ordnung. Es ergibt sich dann aus den Fundamentalformeln (24), wenn man sie zuerst für $\lambda=\alpha$, $\nu=\beta$; sodann für $\lambda=\alpha$, $\nu=\beta+\gamma$ anschreibt:

$$\begin{aligned}U_{\alpha+\beta-1}&=A_{\beta-1,\alpha}U_{\alpha-1}+a_\alpha B_{\beta-1,\alpha}U_{\alpha-2}\\ U_{\alpha+\beta+\gamma-1}&=A_{\beta+\gamma-1,\alpha}U_{\alpha-1}+a_\alpha B_{\beta+\gamma-1,\alpha}U_{\alpha-2}.\end{aligned}$$

Durch Elimination von $U_{\alpha-2}$ aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$B_{\beta-1,\alpha} U_{\alpha+\beta+\gamma-1} - B_{\beta+\gamma-1,\alpha} U_{\alpha+\beta-1} = (A_{\beta+\gamma-1,\alpha} B_{\beta-1,\alpha} - A_{\beta-1,\alpha} B_{\beta+\gamma-1,\alpha}) U_{\alpha-1}.$$

Die Klammer der rechten Seite läßt sich aber nach Formel (35), angewandt für $\lambda = \beta$, $\mu = \alpha$, $\nu = \gamma$, ersetzen durch

$$(-1)^{\beta-1} a_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \cdots a_{\alpha+\beta} B_{\gamma-1,\alpha+\beta},$$

so daß man erhält:

$$B_{\beta-1,\alpha} U_{\alpha+\beta+\gamma-1} = B_{\beta+\gamma-1,\alpha} U_{\alpha+\beta-1} + (-1)^{\beta-1} a_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \cdots a_{\alpha+\beta} B_{\gamma-1,\alpha+\beta} U_{\alpha-1}.$$

Damit ist unser Ziel erreicht; denn da das Symbol U_λ sowohl A_λ als auch B_λ bedeuten kann, so ergeben sich die beiden Formeln

$$(36)\quad \begin{cases} B_{\beta-1,\alpha} A_{\alpha+\beta+\gamma-1} = B_{\beta+\gamma-1,\alpha} A_{\alpha+\beta-1} \\ \qquad + (-1)^{\beta-1} a_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \cdots a_{\alpha+\beta} B_{\gamma-1,\alpha+\beta} A_{\alpha-1} \\ B_{\beta-1,\alpha} B_{\alpha+\beta+\gamma-1} = B_{\beta+\gamma-1,\alpha} B_{\alpha+\beta-1} \\ \qquad + (-1)^{\beta-1} a_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \cdots a_{\alpha+\beta} B_{\gamma-1,\alpha+\beta} B_{\alpha-1}, \end{cases}$$

die nun alle früheren, insbesondere auch die Fundamentalformeln als Spezialfall enthalten. Übrigens sind auch diese zwei Gleichungen wesentlich miteinander gleichbedeutend; der Unterschied liegt wieder einzig in der Bezeichnung.

Die Fundamentalformeln und alle, die wir soeben daraus abgeleitet haben, finden sich bei *Stern* 2, für den Spezialfall $a_i = 1$ schon bei *Euler* 8.

§ 7. Irreduzibilität.

Wir sind jetzt im Stande, den Satz zu beweisen:

Die ganzen rationalen Funktionen A_ν, B_ν sind irreduzibel.

Da nämlich $A_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$ von a_ν, b_ν nicht abhängen, so ist wegen der Formel

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}$$

A_ν eine in a_ν, b_ν lineare Funktion. Daher muß A_ν im Falle der Zerlegbarkeit gewiß auch einen von a_ν, b_ν freien Faktor haben. Sei also $A_\nu = PQ$, wo Q von a_ν, b_ν nicht abhängt, dann ist

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} = PQ.$$

Setzt man aber in dieser Identität speziell $a_\nu = 0$, $b_\nu = 1$, wodurch ja Q unverändert bleibt, so ersieht man, daß $A_{\nu-1}$ den Faktor Q haben muß. Es ist daher Q ein gemeinsamer Faktor von A_ν und $A_{\nu-1}$, also wegen der Beziehung

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \cdots a_\nu \quad \text{(Formel (30))}$$

auch ein Faktor von $a_1 a_2 \cdots a_\nu$. Daher muß Q und folglich auch A_ν einen Faktor a_i enthalten; dann muß aber jeder Term von A_ν diesen Faktor a_i haben. Allein A_ν enthält den Term $b_1 b_2 \cdots b_\nu$ (das erste Glied in der Euler-Mindingschen Formel (13)), welcher den Faktor a_i nicht hat. Wegen dieses Widerspruches ist unsere Annahme, daß A_ν zerlegbar ist, zu verwerfen.

Weiter bemerken wir, daß A_ν auch keinen Zahlenfaktor hat; in der Tat zeigt ja die Euler-Mindingsche Formel, daß jeder Term von A_ν nur den Koeffizienten 1 hat.

Was wir soeben für A_ν bewiesen haben, läßt sich ganz analog für B_ν beweisen. Doch ergibt sich die Sache auch wieder daraus, daß B_ν sich von $A_{\nu-1}$ nur durch die Bezeichnung (Erhöhung der Indizes um 1) unterscheidet. Aus der Irreduzibilität und dem Fehlen eines Zahlenfaktors bei A_ν, B_ν ergibt sich die bemerkenswerte, schon in § 2 angedeutete Tatsache, *daß die Näherungsbrüche* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *alle schon ihre einfachste Form haben, also nicht mehr gekürzt werden können.*

Natürlich können aber die A_ν, B_ν reduzibel werden, sobald die Elemente nicht mehr unabhängige Variable sind. Wenn zum Beispiel $a_2 = b_2$ ist, so wird

$$A_2 = b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + b_0 b_2, \quad B_2 = b_1 b_2 + b_2;$$

daher sind jetzt A_2, B_2 reduzibel und haben sogar einen gemeinsamen Faktor b_2. Doch bemerken wir die zwei folgenden besonderen Fälle:

A. *Sind alle Teilnenner gleich* 1, *so sind die* A_ν, B_ν *irreduzible Funktionen der Teilzähler.*

B. *Sind alle Teilzähler gleich* 1, *so sind die* A_ν, B_ν *irreduzible Funktionen der Teilnenner.*

Der Beweis des ersten Satzes ist wörtlich so zu führen wie oben; eine Modifikation wird beim zweiten Satz nötig. Da lautet die Rekursionsformel wegen $a_\nu = 1$:

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}.$$

Daher muß A_ν im Fall der Reduzibilität wieder einen von b_ν freien Faktor Q haben und man erhält

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2} = PQ.$$

Setzt man in dieser Identität einmal $b_\nu = 0$, sodann $b_\nu = 1$, wobei ja Q unverändert bleibt, so ersieht man, daß Q auch ein Faktor von $A_{\nu-2}$ und von $A_{\nu-1} + A_{\nu-2}$ ist, also auch ein Faktor von $A_{\nu-1}$. Daher ist Q ein gemeinsamer Faktor von A_ν und $A_{\nu-1}$; also wegen

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \cdots a_\nu = (-1)^{\nu-1}$$

auch ein Faktor von 1, womit der Satz bewiesen ist. Daß in beiden Fällen auch kein Zahlenfaktor existiert, zeigt wieder die Euler-Mindingsche Formel.

§ 8. Numerische Kettenbrüche. Konvergenz.

I. Wir haben bis jetzt die Elemente eines Kettenbruches als unabhängige Variable vorausgesetzt. Sind aber die Elemente eines $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruches numerisch gegeben, so wollen wir jetzt übereinkommen, dem Kettenbruch denjenigen Wert (Zahlwert) beizulegen, der aus $\frac{A_n}{B_n}$ entsteht, wenn man darin für die Elemente die gegebenen Zahlen einsetzt. Sowie also B_n von Null verschieden ausfällt, wird der Kettenbruch einen bestimmten Wert haben. Dagegen heißt er sinnlos, wenn $B_n = 0$ ist; ein Zahlwert kommt ihm in diesem Fall nicht zu. Demnach wird zum Beispiel der Kettenbruch $1 - \frac{2|}{|1} + \frac{1|}{|0}$, obwohl sein letztes Glied $\frac{1}{0}$ sinnlos ist, sehr wohl einen Zahlwert haben; denn es ist

$$A_2 = b_0 b_1 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_0 = 0 + 0 + 1 = 1$$
$$B_2 = b_1 b_2 + a_2 = 0 + 1 = 1,$$

so daß der Kettenbruch den Wert 1 hat. Überhaupt ist stets

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|0} = \frac{A_{n-2}}{B_{n-2}},$$

sofern nur a_n und B_{n-2} von Null verschieden sind. Denn es ist in unserm Fall $b_n = 0$, also vermöge der Rekursionsformeln (7)

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2} = a_n A_{n-2}$$
$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} = a_n B_{n-2},$$

woraus die Behauptung folgt.

Allgemeiner kann der Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\lambda|}{|b_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \cdots + \frac{a_{\lambda+\nu-1}|}{|b_{\lambda+\nu-1}}$$

sehr wohl selbst dann einen bestimmten Wert haben, wenn der Kettenbruch

$$b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \cdots + \frac{a_{\lambda+\nu-1}|}{|b_{\lambda+\nu-1}}$$

den Wert Null hat. Letzteres besagt nämlich nur:

$$\frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}} = 0; \text{ also } A_{\nu-1,\lambda} = 0,\ B_{\nu-1,\lambda} \neq 0;$$

der ursprüngliche Kettenbruch ist daher unter Benutzung der Fundamentalformeln gleich

$$\frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}} = \frac{A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}} = \frac{a_\lambda A_{\lambda-2}}{a_\lambda B_{\lambda-2}};$$

er hat also in der Tat den ganz bestimmten Wert $\frac{A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-2}}$, sofern nur $a_\lambda \neq 0$, $B_{\lambda-2} \neq 0$ ist. Andernfalls ist er allerdings sinnlos.

II. Wenn zwei unbegrenzte Serien von Elementen

$$b_0, b_1, b_2, \ldots; a_1, a_2, a_3, \ldots$$

vorliegen, so kann man aus ihnen formal den unendlichen Kettenbruch bilden

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots,$$

der dann unbegrenzt viele Glieder und daher auch unbegrenzt viele Näherungsbrüche

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3}{B_3}, \ldots$$

hat. In vielen Fällen — und diese werden uns in erster Linie interessieren — trifft es sich, das diese Näherungsbrüche mit wachsendem Index einem endlichen Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \xi \tag{37}$$

zustreben. Der Kettenbruch heißt dann konvergent, und ξ sein Wert. Durch diese Definition rechtfertigt sich der Ausdruck „Näherungsbrüche"; denn diese Brüche sind jetzt Zahlen, welche dem wahren Kettenbruchwert ξ mit wachsendem Index ganz beliebig nahe kommen. Dazu sei jedoch ausdrücklich bemerkt, daß unter den Näherungsbrüchen sehr wohl eine endliche Anzahl sinnloser sich finden kann; durch die Gleichung (37) soll nämlich nur gefordert sein, daß für hinreichend große Werte von ν, aber nicht notwendig schon von $\nu = 1$ an die Zahlen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ existieren (und einen Grenzwert haben).

Wenn der Grenzwert (37) nicht existiert, so heißt der Kettenbruch divergent; er wird also insbesondere dann divergieren, wenn er unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche hat. Unter den divergenten Kettenbrüchen sind diejenigen besonders ausgezeichnet, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = 0$$

ist; solche nennen wir „unwesentlich divergent"; alle anderen „wesentlich divergent". Bei unwesentlicher Divergenz kann es insbesondere auch vorkommen, daß unendlich oft $B_\nu = 0$, $A_\nu \neq 0$, also der

Näherungsbruch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ sinnlos ist. Wir werden später sehen, daß die unwesentlich divergenten Kettenbrüche in vieler Beziehung mit den konvergenten auf eine Stufe zu stellen sind.[1])

III. Wir beweisen jetzt den wichtigen

Satz 1. *Wenn zwei von den drei Gleichungen*

A. $$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{a_\lambda|}{|\xi_\lambda}$$

B. $$\xi_\lambda = b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

C. $$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\lambda|}{|b_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

bestehen, und wenn $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ von Null verschieden sind, so gilt auch die dritte. Dabei ist es gleichgültig, ob die Kettenbrüche B, C wirklich unendlich sind, oder vielmehr endlich und mit dem gleichen Glied schließend.

Beweis. Wenn die Kettenbrüche B, C endlich sind, so sei ihr letztes Glied etwa $\frac{a_{\lambda+\nu-1}|}{|b_{\lambda+\nu-1}}$. Die Gleichungen A, B, C sind dann gleichbedeutend mit den folgenden:

Aa. $$\xi_0 = \frac{A_{\lambda-1}\xi_\lambda + A_{\lambda-2}a_\lambda}{B_{\lambda-1}\xi_\lambda + B_{\lambda-2}a_\lambda} \quad \text{(nach Formel (11))}$$

Ba. $$\xi_\lambda = \frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}}$$

Ca. $$\xi_0 = \frac{A_{\lambda+\nu-1}}{B_{\lambda+\nu-1}} = \frac{A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}},$$

wobei die letzte Gleichheit aus den Fundamentalformeln folgt. Sind aber die Kettenbrüche B, C unendlich, so ist einfach in Ba, Ca der Limes für $\nu = \infty$ zu nehmen. Die Gleichungen lauten also in diesem Fall:

Aa*. $$\xi_0 = \frac{A_{\lambda-1}\xi_\lambda + A_{\lambda-2}a_\lambda}{B_{\lambda-1}\xi_\lambda + B_{\lambda-2}a_\lambda}$$

Ba*. $$\xi_\lambda = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}}$$

Ca*. $$\xi_0 = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\lambda+\nu-1}}{B_{\lambda+\nu-1}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda}}.$$

---

1) Aus diesem Grund ist die Bezeichnung „unwesentlich divergent" der vom Verfasser in früheren Publikationen gewählten „eigentlich divergent" vorzuziehen.

Wir entwickeln nun, um Wiederholungen zu vermeiden, den Beweis für beide Fälle gemeinsam, und zwar in der Weise, daß wir alles, was sich nur auf den zweiten bezieht, in ⟨⟩ stellen; der ganze nicht in ⟨⟩ stehende Text ist dann gerade der Beweis für den ersten Fall. Der ganze Beweis gliedert sich naturgemäß in drei Teile.

Erstens: A, B vorausgesetzt; C zu beweisen.

Aus A a⟨*⟩, B a⟨*⟩ folgt

$$\xi_0 = \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{A_{\lambda-1} \dfrac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}} + A_{\lambda-2} a_\lambda}{B_{\lambda-1} \dfrac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}} + B_{\lambda-2} a_\lambda} = \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{A_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda}},$$

also in der Tat C a⟨*⟩.

Zweitens: B, C vorausgesetzt; A zu beweisen.

Wegen B a⟨*⟩ ist ⟨für hinreichend große ν⟩ $B_{\nu-1,\lambda} \neq 0$; daher nach C a⟨*⟩:

$$\xi_0 = \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{A_{\lambda-1} \dfrac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}} + a_\lambda A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-1} \dfrac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}} + a_\lambda B_{\lambda-2}}.$$

In diesem Bruch hat nun nach B a⟨*⟩ der Nenner den ⟨Grenz-⟩Wert $B_{\lambda-1}\xi_\lambda + a_\lambda B_{\lambda-2}$; ebenso der Zähler $A_{\lambda-1}\xi_\lambda + a_\lambda A_{\lambda-2}$. ⟨Diese Grenzwerte können nicht beide verschwinden, weil sonst auch

$$a_\lambda(A_{\lambda-1}B_{\lambda-2} - A_{\lambda-2}B_{\lambda-1}) = 0$$

sein müßte, während dieser Ausdruck doch nach (30) gleich $\pm a_1 a_2 \ldots a_\lambda$, also nach Voraussetzung von Null verschieden ist. Daraus folgt nun, daß der Grenzwert des Nenners nicht verschwinden kann. In diesem Fall müßte nämlich, weil ja der Quotient einen endlichen Grenzwert ξ_0 hat, auch der Zähler die Null zur Grenze haben. Daher wären die Grenzwerte von Zähler und Nenner beide Null, was dem soeben Bewiesenen widerspricht. Nach diesen Feststellungen sind wir nun berechtigt, in der obigen Gleichung den Grenzwert des Quotienten durch den Quotienten der Grenzwerte zu ersetzen.⟩ Dadurch entsteht aber gerade die Gleichung A a⟨*⟩.

Drittens: A, C vorausgesetzt; B zu beweisen:

Zunächst folgt aus A a⟨*⟩:

$$\xi_\lambda(B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1}) = -a_\lambda(B_{\lambda-2}\xi_0 - A_{\lambda-2}).$$

Hier kann nun die Klammer der linken Seite nicht verschwinden; sonst wäre nämlich, weil $a_\lambda \neq 0$ vorausgesetzt ist, auch die Klammer der rechten Seite Null, und folglich $A_{\lambda-1}B_{\lambda-2} - A_{\lambda-2}B_{\lambda-1} = 0$, somit

$a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} = 0$, im Widerspruch mit unsern Voraussetzungen. Es ergibt sich also

$$\xi_\lambda = -a_\lambda \frac{B_{\lambda-2}\xi_0 - A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1}}.$$

Setzt man aber hier für ξ_0 den Wert aus $\mathrm{Ca}^{(*)}$ ein, so kommt:

$$\xi_\lambda = -a_\lambda \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{B_{\lambda-2}\dfrac{A_{\lambda+\nu-1}}{B_{\lambda+\nu-1}} - A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-1}\dfrac{A_{\lambda+\nu-1}}{B_{\lambda+\nu-1}} - A_{\lambda-1}}$$

$$= -a_\lambda \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{B_{\lambda-2}A_{\lambda+\nu-1} - A_{\lambda-2}B_{\lambda+\nu-1}}{B_{\lambda-1}A_{\lambda+\nu-1} - A_{\lambda-1}B_{\lambda+\nu-1}}.$$

In diesem letzteren Bruch ist aber der Nenner nach (32) gleich

$$(-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}.$$

Der Zähler dagegen geht aus dem Nenner hervor, indem λ, ν durch $\lambda-1$, $\nu+1$ ersetzt wird; er ist also gleich

$$(-1)^{\lambda-2} a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} B_{\nu,\lambda-1} = (-1)^{\lambda-2} a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} \quad \text{(nach (25))}$$

Daher geht die letzte Gleichung über in:

$$\xi_\lambda = -a_\lambda \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{(-1)^{\lambda-2} a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda}}{(-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda}} = \left\langle \lim_{\nu=\infty} \right\rangle \frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}},$$

also in $\mathrm{Ba}^{(*)}$. Somit ist unser Satz in allen Teilen bewiesen.

Einleuchtend ist auch

Satz 2. *Aus der Gleichung*

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

folgt, sofern $\xi_0 \neq 0$ *ist, stets*

$$\frac{1}{\xi_0} = 0 + \frac{1|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots,$$

und zwar ist es wieder gleichgültig, ob beide Kettenbrüche unendlich sind, oder endlich und mit dem gleichen Glied schließend. Für $\xi_0 = 0$ *dagegen ist der zweite Kettenbruch unwesentlich divergent, bezw., wenn er endlich ist, sinnlos.*

Bezeichnet man nämlich die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung dieses zweiten Kettenbruches mit C_ν, D_ν, so ist

$$C_0 = 0 = B_{-1},\ C_1 = 1 = B_0,\ C_\nu = b_{\nu-1}C_{\nu-1} + a_{\nu-1}C_{\nu-2}$$
$$D_0 = 1 = A_{-1},\ D_1 = b_0 = A_0,\ D_\nu = b_{\nu-1}D_{\nu-1} + a_{\nu-1}D_{\nu-2},$$

woraus allgemein $C_\nu = B_{\nu-1}$, $D_\nu = A_{\nu-1}$ folgt. Es ist also $\frac{C_\nu}{D_\nu} = \frac{B_{\nu-1}}{A_{\nu-1}}$, und daraus ergibt sich ohne weiteres der Satz. Wir werden übrigens bei Kettenbrüchen, deren Anfangsglied Null ist, dieses für gewöhnlich weglassen, so daß die obige Gleichung sich so schreibt:

$$\frac{1}{\xi_0} = \frac{1|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots.$$

Eine wichtige Ergänzung zu Satz 1 ist noch

Satz 3. *Von den drei Relationen*

A. $$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{a_\lambda|}{|\xi_\lambda} = \textit{sinnlos}$$

B. $$\xi_\lambda = b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots \textit{ in infin.}$$

C. $$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\lambda|}{|b_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots = \textit{unwesentlich divergent}$$

ziehen, wenn $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ von Null verschieden sind, je zwei die dritte nach sich.

In der Tat, wenn der Kettenbruch A sinnlos ist, so hat sein letzter Näherungsnenner den Wert Null. Der letzte Näherungszähler kann nicht verschwinden, weil sonst mit Rücksicht auf (30) auch $a_1 a_2 \ldots a_\lambda = 0$ sein müßte, entgegen der Voraussetzung. Die Relation A ist daher gleichbedeutend mit

A′. $$0 = 0 + \frac{1|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{a_\lambda|}{|\xi_\lambda},$$

da ja, wie aus dem Beweis von Satz 2 hervorgeht, der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung von A′ gleich dem reziproken Wert des Näherungsbruches $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von A ist. Ebenso besagt die Relation C so viel wie

C′. $$0 = 0 + \frac{1|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\lambda|}{|b_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots.$$

Von den Gleichungen A′, B, C′ ist aber nach Satz 1 in der Tat jede eine Folge der zwei andern, so daß auch Satz 3 richtig ist.

Zweites Kapitel.

Regelmäßige Kettenbrüche.

§ 9. Die endlichen regelmäßigen Kettenbrüche.

I. Wir bezeichnen mit x_0, x_1 zwei ganze Zahlen, deren zweite positiv sei. Wenn man dann x_0 durch x_1 dividiert, so erhält man einen ganzzahligen Quotienten b_0 und einen Rest x_2, der nicht negativ, aber jedenfalls kleiner als x_1 ist:

$$x_0 = b_0 x_1 + x_2, \quad x_1 > x_2.$$

Dabei ist $b_0 = 0$ für $0 \leqq x_0 < x_1$; sonst hat b_0 dasselbe Vorzeichen wie x_0. Geht die Division nicht auf, ist also $x_2 > 0$, so dividiere man nun x_1 durch x_2; man erhält dann einen ganzzahligen positiven Quotienten b_1 und einen Rest x_3, der wiederum nicht negativ, aber kleiner als x_2 ist:

$$x_1 = b_1 x_2 + x_3, \quad x_2 > x_3.$$

Geht die Division abermals nicht auf, so wird man jetzt x_2 durch x_3 dividieren und erhält dann durch Fortsetzung dieses Verfahrens das Rechenschema:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_0 = b_0 x_1 + x_2 \\ x_1 = b_1 x_2 + x_3 \\ x_2 = b_2 x_3 + x_4 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

wo die b_ν, x_ν von $\nu = 1$ an positive ganze Zahlen sind und die Ungleichungen gelten:

$$(2) \qquad x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$$

Da die ganzen Zahlen x_ν von $\nu = 1$ an stets abnehmen, ohne je negativ zu werden, so muß das Verfahren nach einer endlichen Anzahl von Schritten notwendig ein Ende erreichen, indem einmal die Division aufgeht, also ein Rest verschwindet. Ist dies etwa der Rest x_{n+2}, so wollen wir annehmen, daß $n > 0$ ist, daß also die erste Division $x_0 : x_1$ noch nicht aufgeht. Das Schema (1) endet dann mit den zwei Gleichungen

$$x_{n-1} = b_{n-1} x_n + x_{n+1},$$
$$x_n = b_n x_{n+1}.$$

Wegen $n > 0$ ist $x_n > x_{n+1}$, und daher ist der letzte Quotient b_n größer als 1, also mindestens gleich 2.

Das beschriebene Divisionsverfahren ist nichts anderes als der bekannte **Euklidische Algorithmus** zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von x_0 und x_1. Dieser Teiler ist, wie leicht zu sehen, die Zahl x_{n+1}, worauf wir aber hier nicht eingehen; uns interessiert vielmehr die aus dem System (1), welches ein Spezialfall des Systems (21) S. 12 ist, hervorgehende Kettenbruchentwicklung.

Setzt man nämlich $\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}} = \xi_\nu$, so daß wegen (2) von $\nu = 1$ an stets $\xi_\nu > 1$ ist, so gehen die Gleichungen (1) über in

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi_0 = b_0 + \frac{1}{\xi_1} = b_0 + \frac{1|}{|\xi_1} \\ \xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2} = b_1 + \frac{1|}{|\xi_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{\xi_n} = b_{n-1} + \frac{1|}{|\xi_n} \\ \xi_n = b_n, \end{cases}$$

und hieraus resultieren unter Benutzung von Satz 1, Kap. I, sukzessive die Kettenbruchentwicklungen

$$\xi_0 = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|\xi_2} = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|\xi_3} = \cdots,$$

also schließlich

$$(4) \qquad \frac{x_0}{x_1} = \xi_0 = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_n}.$$

II. Es empfiehlt sich, für Kettenbrüche, deren Teilzähler alle gleich 1 sind, eine kürzere Schreibweise einzuführen. An Stelle von

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots + \frac{1|}{|b_n}$$

wollen wir einfach schreiben:

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

und analog auch bei unendlichen Kettenbrüchen. Für dieses neue Symbol liefert Satz 1, Kap. I, sogleich die folgende Regel:

A. *Irgend zwei der drei Gleichungen*

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\lambda-1}, \xi_\lambda],$$
$$\xi_\lambda = [b_\lambda, b_{\lambda+1}, b_{\lambda+2}, \ldots],$$
$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$$

ziehen die dritte nach sich; dabei ist es gleichgültig, ob die beiden letzten Kettenbrüche unendlich oder endlich und mit dem gleichen Gliede schließend sind.

Als besonders nützlich heben wir einen Spezialfall dieser Regel hervor:

B. *Wenn die Gleichungen*

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\lambda-1}, \xi_\lambda] \quad \xi_\lambda = [b_\lambda, \xi_{\lambda+1}]$$

gelten, so ist ganz von selbst auch

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\lambda-1}, b_\lambda, \xi_{\lambda+1}].$$

Unter Benutzung unseres neuen Symboles nimmt nun die Gleichung (4) die einfachere Gestalt an:

$$\frac{x_0}{x_1} = \xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_n]. \tag{5}$$

Hieran schließen wir die

Definition. *Ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch heißt regelmäßig, wenn die Teilzähler alle gleich* 1 *und die Teilnenner positive ganze Zahlen sind; nur das Anfangsglied darf eine beliebige ganze Zahl sein.*

Dann können wir unsere Ergebnisse vorläufig dahin zusammenfassen, daß jede rationale gebrochene Zahl ξ_0 sich in einen endlichen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln läßt, dessen letzter Teilnenner mindestens gleich 2 ist. In der Tat ist ja eine solche Kettenbruchentwicklung durch die Gleichung (5) geleistet. Das Verfahren, welches zur Herstellung des Kettenbruches diente, läßt sich nun im Anschluß an das Gleichungssystem (3) noch etwas einfacher beschreiben, als oben geschehen, nämlich:

Man ziehe aus ξ_0 die größte ganze Zahl b_0 heraus; der Rest sei $\frac{1}{\xi_1}$. Sodann ziehe man aus dem unechten Bruch ξ_1 die größte ganze Zahl b_1 heraus, der Rest sei $\frac{1}{\xi_2}$. Dann ziehe man wieder aus dem unechten Bruch ξ_2 die größte ganze Zahl b_2 heraus usw. Dieser Prozeß muß nach dem Bewiesenen abbrechen, indem einmal ξ_n eine ganze Zahl b_n wird, die mindestens gleich 2 ist; es ist dann $\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$.

Nun ist umgekehrt klar, daß jeder endliche regelmäßige Kettenbruch eine rationale Zahl vorstellt, und zwar selbst dann, wenn der letzte Teilnenner nicht größer als 1 ist. In der Tat ist ja

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n] = \frac{A_n}{B_n},$$

wo die A_n, B_n mittels der Rekursionsformeln des § 2 zu berechnen sind; diese lauten jetzt, weil die Teilzähler gleich 1 sind:

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = b_0, \quad A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1), \tag{6}$$

$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1), \tag{7}$$

so daß alle A_ν, B_ν ganze Zahlen werden, und zwar $B_\nu > 0$, also in der

Tat $\frac{A_n}{B_n}$ eine rationale Zahl. W. z. b. w. Für $b_0 \geqq 0$ wird, wie ebenso leicht ersichtlich, auch $A_\nu \geqq 0$; von $\nu = 1$ an (für $b_0 > 0$ schon von $\nu = 0$ an) sogar $A_\nu > 0$. Bei den regelmäßigen Kettenbrüchen ist es zweckmäßig, noch die Größen

$$A_{-2} = 0, \quad B_{-2} = 1 \tag{8}$$

einzuführen, wodurch die Rekursionsformeln schon für $\nu = 0$ Gültigkeit erlangen. Die praktische Ausrechnung eines Kettenbruches gestaltet sich dann sehr einfach; z. B. erhält man für [2, 3, 2, 1, 4, 2, 3] das Schema:

ν	−1	0	1	2	3	4	5	6	
b_ν		2	3	2	1	4	2	3	
$A_{\nu-1}$	0	1	2	7	16	23	108	239	825
$B_{\nu-1}$	1	0	1	3	7	10	47	104	359

wo jede Zahl der dritten Zeile entsteht, indem man die vorausgehende mit der darüber stehenden Zahl multipliziert und zu dem Produkt die nächstvorausgehende hinzuaddiert; analog für die vierte Zeile. Es ist also

$$[2, 3, 2, 1, 4, 2, 3] = \frac{825}{359}.$$

Wir beweisen jetzt, daß der so berechnete Bruch immer schon in seiner irreduziblen Form erscheint; überhaupt gilt der

Satz 1. *Sind* $\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}, \frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ *zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche eines regelmäßigen Kettenbruches, so sind die vier Zahlenpaare*

$$(A_\lambda, B_\lambda), \quad (A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), \quad (A_\lambda, A_{\lambda-1}), \quad (B_\lambda, B_{\lambda-1}).$$

relativ prim; insbesondere sind also die Näherungsbrüche $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ *sämtlich irreduzibel.*

Beweis. Nach Formel (30), Kap. I, ist, weil jetzt alle Teilzähler gleich 1 sind,

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^{\lambda-1}.$$

Wenn also etwa A_λ, B_λ einen gemeinsamen Teiler hätten, so müßte auch $(-1)^{\lambda-1}$ diesen Teiler haben; ebenso für die drei andern Zahlenpaare, womit der Satz bewiesen ist.

III. Es fragt sich nun, ob zwei endliche regelmäßige Kettenbrüche, die nicht völlig identisch sind, dennoch die gleiche rationale Zahl vorstellen können, oder, was dasselbe ist, ob eine rationale Zahl mehrere nicht identische regelmäßige Kettenbruchentwicklungen zuläßt. Wir werden sehen, daß dies jedenfalls nicht der Fall ist, wenn $b_n \geqq 2$ verlangt wird; vielmehr gilt der

Satz 2. *Jede rationale gebrochene Zahl ξ_0 läßt sich auf eine und nur eine Weise in einen endlichen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln, bei dem der letzte Teilnenner mindestens gleich 2 ist.*

Beweis. Daß überhaupt eine solche Entwicklung möglich ist, wissen wir bereits; sei also

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_n], \quad b_n \geqq 2.$$

Offenbar ist $\xi_0 > b_0$. Setzt man dann

$$[b_\nu, b_{\nu+1}, \ldots, b_n] = \xi_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{9}$$

so ist auch $\xi_{\nu-1} = [b_{\nu-1}, b_\nu, \ldots, b_n]$, also nach Regel A, S. 27:

$$\xi_{\nu-1} = [b_{\nu-1}, \xi_\nu] = b_{\nu-1} + \frac{1}{\xi_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Ferner ist

$$\xi_\nu > 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

denn für $\nu = n$ wird $\xi_\nu = \xi_n = b_n \geqq 2$; für $1 \leqq \nu < n$ aber nach (9): $\xi_\nu > b_\nu \geqq 1$. Daher besagt die Gleichung (10), daß $b_{\nu-1}$ die größte in $\xi_{\nu-1}$ enthaltene ganze Zahl sein muß. Insbesondere ist also b_0 die größte in ξ_0 enthaltene ganze Zahl und als solche eindeutig. Dann ist aber durch die Gleichung (10) für $\nu = 1$ auch ξ_1 eindeutig bestimmt, und b_1 als größte in ξ_1 enthaltene ganze Zahl wiederum eindeutig usw. Man sieht so, daß alle b_ν eindeutig bestimmt sind, und daß man gerade auf das S. 28 beschriebene Verfahren geführt wird.

Es gilt nun auch der Satz, daß jede rationale gebrochene Zahl sich auf eine und nur eine Weise in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln läßt, dessen letzter Teilnenner gleich 1 ist. In der Tat ergibt sich dies sogleich aus Satz 2 auf Grund der Formel

$$[b_0, b_1, \ldots, b_n] = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n - 1, 1], \tag{11}$$

welche ihrerseits aus Regel B, S. 28, folgt, weil ja

$$b_n = b_n - 1 + \tfrac{1}{1} = [b_n - 1, 1]$$

ist. Da von den Kettenbrüchen (11) der zweite ein Glied mehr hat wie der erste, also stets die Gliederzahl des einen gerade, die des andern ungerade ist, so ergibt sich weiter

Satz 3. *Jede rationale gebrochene Zahl ξ_0 läßt sich auf eine und nur eine Weise in einen regelmäßigen Kettenbruch mit modulo 2 vorgeschriebener Gliederzahl entwickeln.*

§ 10. Die diophantische lineare Gleichung.

Als eine wichtige Anwendung der bisherigen Untersuchung schalten wir hier die allgemeine Lösung der diophantischen Gleichung

$$px - qy = r \tag{1}$$

ein, wo p, q, r gegebene ganze Zahlen ($\neq 0$) sind, und die Unbekannten x, y ebenfalls ganzzahlig sein sollen.

Wenn die Zahlen p, q den gemeinsamen Teiler d haben, so ist die Aufgabe offenbar nur dann lösbar, wenn auch r durch d teilbar ist. Da man aber einen Teiler, der den Zahlen p, q, r gemein ist, in der Gleichung unterdrücken kann, so dürfen wir p, q von vornherein als relativ prim voraussetzen. Ferner können wir q auch als positiv annehmen, indem wir Gleichung (1) nötigenfalls mit -1 multiplizieren; schließlich wollen wir den trivialen Fall $q = 1$ beiseite lassen. Nach diesen Vorbereitungen entwickeln wir die rationale gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch von gerader Gliederzahl:

$$\frac{p}{q} = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n].$$

Da dann $\frac{p}{q} = \frac{A_n}{B_n}$ ist und da diese beiden Brüche irreduzibel sind (nach Satz 1) und positive Nenner haben, so ergibt sich

$$p = A_n, \quad q = B_n.$$

Nun ist aber (Formel (30), Kap. I):

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n-1},$$

also auch

$$p B_{n-1} - q A_{n-1} = (-1)^{n-1} = 1,$$

weil wir die Gliederzahl $n + 1$ als gerade vorausgesetzt haben. Wenn man diese Gleichung mit r multipliziert, so erhält man

$$p(B_{n-1} r) - q(A_{n-1} r) = r, \tag{2}$$

und folglich ist $x = B_{n-1} r$, $y = A_{n-1} r$ eine Lösung der diophantischen Gleichung (1). Diese Lösungsmethode stammt von *Lagrange* 7.

Nachdem uns nun die Kettenbruchlehre eine Lösung geliefert hat, ist es leicht, alle Lösungen ausfindig zu machen. Zu dem Zweck subtrahieren wir Gleichung (2) von (1) und erhalten

$$p(x - B_{n-1} r) - q(y - A_{n-1} r) = 0$$

oder

$$\frac{p}{q} = \frac{y - A_{n-1} r}{x - B_{n-1} r}.$$

Da aber der Bruch $\frac{p}{q}$ irreduzibel ist, so folgt hieraus

$$x - B_{n-1} r = mq, \quad y - A_{n-1} r = mp,$$

wo m jede ganze Zahl bedeuten darf. Es ergibt sich also, daß die diophantische Gleichung (1) unendlich viele Lösungen hat, und zwar:

$$\begin{cases} x = B_{n-1} r + mq \\ y = A_{n-1} r + mp \end{cases} \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{3}$$

Übrigens hätte man $\frac{p}{q}$ auch in einen regelmäßigen Kettenbruch von ungerader Gliederzahl $n' + 1$ entwickeln können. Dann wäre aber $(-1)^{n'-1} = -1$ und daher hätte die allgemeine Lösung jetzt die Form

$$x = -B'_{n'-1}r + m'q, \quad y = -A'_{n'-1}r + m'p,$$

wo mit $A'_{n'-1}$, $B'_{n'-1}$ der vorletzte Näherungszähler und -Nenner dieses neuen Kettenbruches bezeichnet sind. Natürlich müssen beide Lösungen miteinander identisch sein, wovon man sich auch unschwer durch wirkliche Rechnung überzeugt.[1])

§ 11. Inverse Kettenbrüche, symmetrische Kettenbrüche.

I. Sei

$$[b_0, b_1, \ldots, b_n] = \frac{A_n}{B_n} \tag{1}$$

ein regelmäßiger Kettenbruch und $b_0 > 0$. Man kann dann leicht auch die beiden Zahlen $\frac{A_n}{A_{n-1}}$, $\frac{B_n}{B_{n-1}}$ in regelmäßige Kettenbrüche entwickeln. Es ist nämlich nach der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + A_{n-2} \\ A_{n-1} &= b_{n-1} A_{n-2} + A_{n-3} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ A_2 &= b_2 A_1 + A_0 \\ A_1 &= b_1 A_0 + 1 \\ A_0 &= b_0 \cdot 1. \end{aligned}$$

Hieraus folgt genau, wie in § 9 aus dem System (1) die Kettenbruchentwicklung (5) folgte,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = [b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0], \tag{2}$$

und auf analoge Weise

$$\frac{B_n}{B_{n-1}} = [b_n, b_{n-1}, \ldots, b_2, b_1], \tag{3}$$

wie übrigens auch aus den allgemeinen Formeln (19), (20), Kap. I, bekannt ist. Die beiden Kettenbrüche (1), (2) heißen zueinander invers.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wenn ein Kettenbruch mit seinem inversen identisch ist, also

$$b_0 = b_n, \quad b_1 = b_{n-1}, \quad b_2 = b_{n-2}, \ldots, b_n = b_0.$$

1) Es ist

$$A'_{n'-1} = p - A_{n-1}, \quad B'_{n'-1} = q - B_{n-1}, \quad m' = m + r,$$

wofür der Beweis dem Leser überlassen sei.

Ein solcher Kettenbruch, der also die Form

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, b_0]$$

hat, heißt **symmetrisch**. Es gilt folgender

Satz 4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein irreduzibler Bruch* $\frac{P}{Q}$, *wo* $P > Q > 1$ *eine symmetrische regelmäßige Kettenbruchentwicklung von gerader bzw. ungerader Gliederzahl zuläßt (eventuell mit dem letzten Teilnenner* 1*), besteht darin, daß* $Q^2 + 1$ *bzw.* $Q^2 - 1$ *durch* P *teilbar ist. (Serret* 2.*)*

Beweis. Wenn der Bruch $\frac{P}{Q}$ irreduzibel und einem $(n+1)$-gliedrigen symmetrischen Kettenbruch gleich ist

$$\frac{P}{Q} = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, b_0] = \frac{A_n}{B_n},$$

so ist $P = A_n$, $Q = B_n$. Ferner, weil der Kettenbruch mit seinem inversen identisch ist, nach (1), (2) auch $\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_n}{A_{n-1}}$, also $B_n = A_{n-1}$. Aus der Gleichung $A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1}$ folgt daher auch

$$A_n B_{n-1} - B_n^2 = (-1)^{n-1},$$

oder also

$$P B_{n-1} = Q^2 + (-1)^{n-1}.$$

Infolgedessen muß $Q^2 + (-1)^{n-1}$ durch P teilbar sein; die Bedingung des Satzes ist also notwendig. Sie ist aber auch hinreichend. Denn wenn

$$Q^2 + \varepsilon = P Q'$$

ist, wo $\varepsilon = \pm 1$ und Q' eine ganze Zahl, so entwickle man $\frac{P}{Q}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch

$$\frac{P}{Q} = [b_0, b_1, \ldots, b_n] = \frac{A_n}{B_n} \tag{4}$$

und wähle die Gliederzahl derart, daß $(-1)^{n-1} = \varepsilon$ wird, was nach Satz 3 möglich ist. Es ist alsdann $P = A_n$, $Q = B_n$; also nach Voraussetzung unseres Satzes: $A_n > B_n$, und

$$B_n^2 + \varepsilon = A_n Q'.$$

Anderseits ist aber nach einer schon oft gebrauchten Formel

$$B_n A_{n-1} + (-1)^{n-1} = A_n B_{n-1};$$

daher durch Subtraktion von der vorigen Gleichung:

$$B_n (B_n - A_{n-1}) = A_n (Q' - B_{n-1}).$$

Es muß also $B_n(B_n - A_{n-1})$ durch A_n teilbar sein, und da B_n zu A_n relativ prim ist, so muß schon $B_n - A_{n-1}$ durch A_n teilbar sein. Nun

ist aber $A_n > B_n > 0$ und auch $A_n = b_n A_{n-1} + A_{n-2} > A_{n-1}$; also gewiß $A_n > |B_n - A_{n-1}|$. Eine Zahl kann aber nicht durch eine größere teilbar sein, ohne zu verschwinden; es folgt also: $B_n - A_{n-1} = 0$. Setzt man demgemäß in Gleichung (4) für B_n den Wert A_{n-1} ein, so kommt

$$[b_0, b_1, \ldots, b_n] = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Vergleicht man dies aber mit (2), so ergibt sich, da ein regelmäßiger Kettenbruch mit modulo 2 vorgeschriebener Gliederzahl nach Satz 3 nur auf eine Weise möglich ist:

$$b_0 = b_n,\ b_1 = b_{n-1},\ b_2 = b_{n-2}, \ldots, b_n = b_0,$$

also die Symmetrie. W. z. b. w.

II. Aus Satz 4 läßt sich eine bemerkenswerte zahlentheoretische Folgerung ziehen. Sei nämlich Q eine beliebige ganze Zahl größer als 1 und $P(> Q)$ ein Teiler von $Q^2 + 1$. Dann sind P und Q relativ prim, und nach Satz 4 läßt sich $\frac{P}{Q}$ in einen symmetrischen Kettenbruch mit gerader Gliederzahl entwickeln. Wenn diese Anzahl mit $2k + 2$ bezeichnet wird, erhält man also

$$\frac{P}{Q} = [b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k, b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1, b_0] = \frac{A_{2k+1}}{B_{2k+1}} = \frac{A_{2k+1}}{A_{2k}}, \tag{5}$$

so daß

$$b_{k+1} = b_k,\ b_{k+2} = b_{k-1}, \ldots, b_{2k} = b_1,\ b_{2k+1} = b_0,$$
$$P = A_{2k+1},\quad Q = B_{2k+1} = A_{2k}$$

ist. Nun besagt aber die erste Fundamentalformel ((24), Kap. I), angewandt für die Werte $\nu = k + 1$, $\lambda = k + 1$:

$$P = A_{2k+1} = A_k A_{k,k+1} + A_{k-1} B_{k,k+1}. \tag{6}$$

Anderseits ergibt sich unter Benutzung des Muirschen Symbols:

$$A_{k,k+1} = K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots, 1 \\ b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{2k+1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1, b_0 \end{pmatrix}$$
$$= K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k \end{pmatrix} = A_k,$$

weil ja die Reihenfolge der Elemente im Muirschen Symbol umkehrbar ist. Analog ist auch

$$B_{k,k+1} = K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots, 1 \\ b_{k+2}, b_{k+3}, \ldots, b_{2k+1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0 \end{pmatrix}$$
$$= K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ b_0, b_1, \ldots, b_{k-2}, b_{k-1} \end{pmatrix} = A_{k-1}.$$

Setzt man dies in Formel (6) ein, so geht sie über in

$$P = A_{2k+1} = A_k^2 + A_{k-1}^2. \tag{7}$$

Dies besagt aber, daß jeder Teiler P von Q^2+1, der größer ist als Q, sich als Summe von zwei relativ primen Quadraten darstellen läßt. Dabei kann die Bedingung $P > Q$ nachträglich wieder fallen gelassen werden. Denn wenn P ein Teiler von Q^2+1 ist und wenn $P \leqq Q$, so ist P auch ein Teiler von

$$(Q-\alpha P)^2+1,$$

wobei man die ganze Zahl α offenbar so wählen kann, daß

$$P > Q-\alpha P \geqq 0.$$

Dadurch ist aber dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt, außer wenn $Q-\alpha P=0$ oder 1 ist. Dann ist aber P ein Teiler von 1 oder 2, also entweder $P=1^2+0^2$ oder $P=1^2+1^2$, womit auch diese Fälle erledigt sind. Auch die Bedingung $Q>1$ können wir nachträglich fallen lassen, da für $Q=1$ ja wieder nur die trivialen Werte $P=1$ und $P=2$ möglich sind.

Endlich seien R, S irgend zwei relativ prime Zahlen, und P ein beliebiger Teiler von R^2+S^2. Dann ist P auch Teiler von

$$(R^2+S^2)(x^2+y^2)=(Ry+Sx)^2+(Rx-Sy)^2,$$

wenn x, y irgend welche ganze Zahlen sind. Nun lassen sich aber, weil R, S relativ prim sind, x und y nach § 10 derart bestimmen, daß $Rx-Sy=1$ ist; demnach erweist sich P als ein Teiler von $(Ry+Sx)^2+1$ und ist folglich nach dem vorigen die Summe von zwei relativ primen Quadraten. Dies ergibt das zahlentheoretisch interessante Theorem:

Satz 5. *Wenn eine Zahl die Summe von zwei relativ primen Quadraten teilt, so ist sie selbst die Summe von zwei relativ primen Quadraten.* (*Euler* **6**, *Serret* **1**, **2**.)

III. Hieran knüpfen wir noch folgende Bemerkung. Es ist, wenn k wieder die Bedeutung wie in Formel (5) hat,

$$A_{2k+1}B_{2k}=A_{2k}B_{2k+1}+1=B_{2k+1}^2+1.$$

Daher müssen die Zahlen A_{2k+1}, B_{2k} als Teiler von B_{2k+1}^2+1 sich als Summe von zwei relativ primen Quadraten darstellen lassen. In der Tat haben wir ja auch A_{2k+1} in Formel (7) bereits in dieser Weise dargestellt; um nun das gleiche auch für B_{2k} zu leisten, gehen wir aus von der zweiten Fundamentalformel, angewandt für $\nu=k$, $\lambda=k+1$:

$$B_{2k}=B_kA_{k-1,k+1}+B_{k-1}B_{k-1,k+1}. \tag{8}$$

Aber man findet jetzt ähnlich wie S. 34:

$$A_{k-1,k+1}=K\begin{pmatrix}1, 1, \ldots, 1\\ b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{2k}\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}1, 1, \ldots\ldots, 1\\ b_k, b_{k-1}, \ldots, b_2, b_1\end{pmatrix}$$
$$=K\begin{pmatrix}1, 1, \ldots\ldots, 1\\ b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_k\end{pmatrix}=B_k,$$

$$B_{k-1,k+1} = K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots, 1 \\ b_{k+2}, b_{k+3}, \ldots, b_{2k} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_2, b_1 \end{pmatrix}$$

$$= K\begin{pmatrix} 1, 1, \ldots\ldots, 1 \\ b_1, b_2, \ldots, b_{k-2}, b_{k-1} \end{pmatrix} = B_{k-1},$$

so daß aus (8) die gesuchte Darstellung hervorgeht:

$$(9) \qquad B_{2k} = B_k^2 + B_{k-1}^2.$$

Eine ähnliche Formel ergibt sich auch noch für $A_{2k} = B_{2k+1}$. Die erste Fundamentalformel liefert nämlich, angewandt für die Werte $\nu = k$, $\lambda = k+1$:

$$A_{2k} = A_k A_{k-1,k+1} + A_{k-1} B_{k-1,k+1},$$

und wenn man hier für die A und B mit Doppelindex die soeben gefundenen Werte einsetzt:

$$(10) \qquad B_{2k+1} = A_{2k} = A_k B_k + A_{k-1} B_{k-1}.$$

Diese Formeln rühren im wesentlichen von *Serret* **1** her. Wir wollen nun noch die Analoga zu (7), (9), (10) für symmetrische Kettenbrüche mit ungerader Gliederzahl entwickeln. Ein solcher hat die Form

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1, b_0] = \frac{A_{2k}}{B_{2k}} = \frac{A_{2k}}{A_{2k-1}};$$

es ist also

$$b_{k+1} = b_{k-1}, \; b_{k+2} = b_{k-2}, \ldots, b_{2k} = b_0.$$

Die Fundamentalformeln liefern jetzt die Gleichungen

$$A_{2k} = A_{k-1} A_{k,k} + A_{k-2} B_{k,k}; \quad A_{2k-1} = A_{k-1} A_{k-1,k} + A_{k-2} B_{k-1,k}$$

$$B_{2k} = B_{k-1} A_{k,k} + B_{k-2} B_{k,k}; \quad B_{2k-1} = B_{k-1} A_{k-1,k} + B_{k-2} B_{k-1,k}.$$

Es ergibt sich aber wegen der Symmetrie des Kettenbruches:

$$A_{k,k} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_k, \ldots\ldots, b_{2k} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_k, \ldots\ldots, b_0 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_0, \ldots\ldots, b_k \end{pmatrix} = A_k$$

$$B_{k,k} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_{k+1}, \ldots, b_{2k} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_{k-1}, \ldots, b_0 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_0, \ldots\ldots, b_{k-1} \end{pmatrix} = A_{k-1}$$

$$A_{k-1,k} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_k, \ldots\ldots, b_{2k-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_k, \ldots\ldots, b_1 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_1, \ldots\ldots, b_k \end{pmatrix} = B_k$$

$$B_{k-1,k} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_{k+1}, \ldots, b_{2k-1} \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_{k-1}, \ldots, b_1 \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} 1, \ldots, 1 \\ b_1, \ldots\ldots, b_{k-1} \end{pmatrix} = B_{k-1}.$$

Setzt man dies oben ein, so erhält man

(11) $$A_{2k} = A_{k-1}(A_k + A_{k-2}),$$

(12) $$B_{2k} = A_{2k-1} = B_{k-1}A_k + B_{k-2}A_{k-1} = A_{k-1}B_k + A_{k-2}B_{k-1}$$

(13) $$B_{2k-1} = B_{k-1}(B_k + B_{k-2}).$$

Dies sind die gesuchten Formeln.

§ 12. Unendliche regelmäßige Kettenbrüche.

I. Wenn ξ_0 eine rationale gebrochene Zahl ist, so ergibt sich ihre regelmäßige Kettenbruchentwicklung, deren letzter Teilnenner mindestens gleich 2 ist, aus dem Gleichungssystem

(1) $$\begin{cases} \xi_0 = b_0 + \dfrac{1}{\xi_1} \\ \xi_1 = b_1 + \dfrac{1}{\xi_2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

wobei allgemein b_ν die größte in ξ_ν enthaltene ganze Zahl bedeutet, also $\xi_1 > 1$, $\xi_2 > 1, \ldots$ Dieses System wird, wie wir sahen, irgendwo abbrechen, indem einmal ξ_n eine ganze Zahl wird ($\xi_n = b_n$).

Wenn nun aber die Zahl ξ_0 irrational ist, so kann auf sie zwar offenbar das gleiche Verfahren angewandt werden; doch wird dies jetzt niemals abbrechen, sondern wird sich unbegrenzt fortsetzen lassen. Denn wenn einmal ξ_n eine ganze Zahl b_n wäre, so erhielte man wie in § 9 die Gleichung:

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_n],$$

und ξ_0 wäre demnach eine rationale Zahl, gegen die Voraussetzung. Da unser Verfahren also nicht abbricht, so erhält man eine ganze Zahl b_0 und eine unbegrenzte Serie von ganzen positiven Zahlen $b_1, b_2, \ldots$, und die Vermutung liegt nahe, daß ξ_0 gleich dem unendlichen regelmäßigen Kettenbruch $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$ ist.

Dies ist in der Tat der Fall; zum Beweis beachte man zunächst, daß die Näherungsnenner mit wachsendem Index über alle Grenzen wachsen. Denn sie genügen den Rekursionsformeln (7) des § 9; aus diesen folgt sogleich:

$$1 = B_0 \leqq B_1 < B_2 < B_3 < \cdots,$$

und da die B_ν ganzzahlig sind, so wachsen sie über alle Grenzen.[1]). Sodann liefern die Gleichungen (1) für jedes ν die Beziehung

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\nu-1}, \xi_\nu],$$

1) Aus § 3, II folgt sogar, daß B_ν mindestens gleich
$$1 + \binom{\nu-1}{1} + \binom{\nu-2}{2} + \binom{\nu-3}{3} + \cdots$$
ist.

wofür man auch schreiben kann (Formel (11), Kap. I):

$$\xi_0 = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}}.$$

Daher ist

$$\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{A_{\nu-2}B_{\nu-1} - A_{\nu-1}B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2})} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2})}.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber der Zähler absolut gleich 1, während der Nenner mit ν über alle Grenzen wächst; daraus folgt dann

$$\xi_0 = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}},$$

oder also nach der Definition des Wertes eines unendlichen Kettenbruches (S. 21):

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots],$$

w. z. b. w.

Nun zeigen wir, daß auch umgekehrt jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch konvergiert und einen irrationalen Wert hat. Um zunächst die Konvergenz, d. h. die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda}{B_\lambda}$$

nachzuweisen, genügt es bekanntlich, zu zeigen, daß zu jedem positiven ε ein Wert λ gefunden werden kann, von der Beschaffenheit, daß für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Ungleichung

$$\left| \frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} \right| < \varepsilon$$

besteht.[1]) Nach Formel (33), Kap. I ist aber, weil ja alle Teilzähler $a_\nu = 1$ sind:

$$(2) \qquad \frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \frac{B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu+\lambda-1}B_{\lambda-1}};$$

ferner nach der zweiten Fundamentalformel für $\lambda \geqq 1$[2]):

$$B_{\nu+\lambda-1} = B_{\lambda-1}A_{\nu-1,\lambda} + B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda} > B_{\lambda-2}B_{\nu-1,\lambda},$$

so daß sich aus vorstehendem ergibt:

$$\left| \frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} \right| < \frac{1}{B_{\lambda-2}B_{\lambda-1}}.$$

---

1) Man könnte natürlich auch $\left| \frac{A_{\nu+\lambda}}{B_{\nu+\lambda}} - \frac{A_\lambda}{B_\lambda} \right| < \varepsilon$ schreiben. Im Text ist nur deshalb λ um eine Einheit verringert, weil sich dann die Formeln des ersten Kapitels ohne Änderung anwenden lassen.

2) Während die A_ν sehr wohl negativ sein können, nämlich für $b_0 < 0$, sind die $A_{\nu,\lambda}$, wenn $\lambda \geqq 1$, offenbar alle positiv, weil $b_1, b_2, b_3, \ldots$ positiv.

Da aber B_λ mit λ über alle Grenzen wächst, so ist damit die Konvergenz bewiesen, und wir können demnach setzen:

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots] = \xi_0.$$

Weil alle Näherungsbrüche offenbar größer als b_0 sind, so ist auch ihr Grenzwert $\xi_0 \geqq b_0$. Um nun noch die Irrationalität von ξ_0 nachzuweisen, sei analog

$$[b_\lambda, b_{\lambda+1}, b_{\lambda+2}, \ldots] = \xi_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo dann auch $\xi_\lambda \geqq b_\lambda \geqq 1$ ist. Dann ergibt sich wieder (Regel A, S. 27):

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\lambda-1}, \xi_\lambda] = \frac{A_{\lambda-1}\xi_\lambda + A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-1}\xi_\lambda + B_{\lambda-2}},$$

woraus folgt:

$$B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1} = \frac{B_{\lambda-1}A_{\lambda-2} - B_{\lambda-2}A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}\xi_\lambda + B_{\lambda-2}} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}\xi_\lambda + B_{\lambda-2}}.$$

Demnach wird der Ausdruck $|B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1}|$ zwar niemals Null, aber doch mit wachsendem λ ganz beliebig klein. Dies wäre aber nicht möglich, wenn ξ_0 rational wäre; denn für $\xi_0 = \frac{p}{q}$, wo p, q ganze Zahlen kann der Ausdruck

$$|B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1}| = \frac{|B_{\lambda-1}p - A_{\lambda-1}q|}{q}$$

nicht unter $\frac{1}{q}$ sinken, ohne zu verschwinden.

Da somit ξ_0 und natürlich auch alle ξ_λ irrational sind, so kann in der Ungleichung $\xi_\lambda \geqq b_\lambda$ Gleichheit nicht bestehen; folglich ist $\xi_\lambda > b_\lambda$. Daraus folgt nun leicht, daß eine irrationale Zahl ξ_0 sich nur auf eine Weise in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln läßt. Denn wenn

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$$

eine solche Entwicklung ist, und wir setzen wieder

$$[b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots] = \xi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist auch $\xi_{\nu-1} = [b_{\nu-1}, b_\nu, b_{\nu+1}, \ldots]$, woraus folgt

$$\xi_{\nu-1} = [b_{\nu-1}, \xi_\nu] = b_{\nu-1} + \frac{1}{\xi_\nu}.$$

Wegen $\xi_\nu > b_\nu \geqq 1$ ist also $b_{\nu-1}$ die größte in $\xi_{\nu-1}$ enthaltene ganze Zahl; daraus wird aber die Eindeutigkeit wörtlich ebenso erschlossen wie S. 30. Zusammenfassend erhalten wir

Satz 6. *Jeder unendliche regelmäßige Kettenbruch konvergiert und ist eine irrationale Zahl. Umgekehrt läßt sich jede irrationale Zahl auf eine und nur eine Weise in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln, und dieser ist notwendig unendlich.*

Hier sei bemerkt, daß bei regelmäßigen Kettenbrüchen die Teilnenner b_ν auch als unvollständige Quotienten bezeichnet werden, während die ξ_ν vollständige Quotienten heißen.

II. Wir wollen nun noch untersuchen, welcher von zwei nicht identischen regelmäßigen Kettenbrüchen den größeren Wert hat. Sei zunächst

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$$

ein endlicher Kettenbruch, mit welchem wir den folgenden vergleichen wollen:

$$\eta_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1} \ldots],$$

der endlich oder unendlich sein kann. Bezeichnet man die vollständigen Quotienten des ersten mit ξ_ν, die des zweiten mit η_ν, so ist zunächst

$$\xi_n = b_n; \quad \eta_n = [b_n, b_{n+1}, \ldots] > b_n;$$

also $\xi_n < \eta_n$. Aus den Gleichungen

$$\xi_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}, \qquad \eta_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{\eta_n},$$
$$\xi_{n-2} = b_{n-2} + \frac{1}{\xi_{n-1}}, \quad \eta_{n-2} = b_{n-2} + \frac{1}{\eta_{n-1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folgt dann sukzessive

$$\xi_{n-1} > \eta_{n-1},$$
$$\xi_{n-2} < \eta_{n-2},$$
$$\cdots\cdots$$

wobei die Zeichen $>$ und $<$ alternieren. Die letzte dieser Ungleichungen lautet $\xi_0 > \eta_0$ oder $\xi_0 < \eta_0$, je nachdem die Gliederzahl $n+1$ gerade oder ungerade ist. So ergibt sich

Satz 7. *Wenn man einem endlichen regelmäßigen Kettenbruch noch endlich oder unendlich viele Glieder anhängt, so wird dadurch sein Wert verkleinert oder vergrößert, je nachdem er ursprünglich eine gerade oder ungerade Gliederzahl hatte.*

Nunmehr untersuchen wir die beiden Kettenbrüche

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, \ldots],$$
$$\eta_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_n, \ldots],$$

wobei $c_n > b_n$ sein möge. Wenn dann etwa

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, 1], \quad \eta_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n + 1]$$

ist, so wissen wir aus § 9 (Formel (11)), daß $\xi_0 = \eta_0$ ist; diesen Fall schließen wir jetzt aus. Sind wieder ξ_ν, η_ν die vollständigen Quotienten, so ist zunächst

$$\eta_n \geqq c_n \geqq b_n + 1 \geqq \xi_n;$$

also ist $\eta_n \geqq \xi_n$, und zwar tritt Gleichheit offenbar nur in dem ausgeschlossenen Fall ein. In Wahrheit ist daher $\eta_n > \xi_n$, und daraus folgt genau wie vorhin, daß $\xi_0 > \eta_0$ oder $\xi_0 < \eta_0$, je nachdem $n+1$ gerade oder ungerade ist. Dies führt zu

Satz 8. *Wenn zwei nicht identische regelmäßige Kettenbrüche sich nur in der Weise voneinander unterscheiden, daß sie von der Gestalt*

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, 1], \quad [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n + 1]$$

sind, so haben sie den gleichen Wert. In jedem anderen Fall haben sie voneinander verschiedene Werte, und zwar ist, wenn $n (\geqq 0)$ die Anzahl der gemeinsamen Anfangselemente bedeutet, derjenige der größere, welcher bei geradem (ungeradem) n den größeren (kleineren) n^{ten} Teilnenner hat.

Hieraus folgt dann insbesondere noch, daß ein regelmäßiger Kettenbruch größer wird, wenn man einen der Teilnenner $b_0, b_2, b_4, \ldots$ vergrößert oder einen der Teilnenner $b_1, b_3, b_5, \ldots$ verkleinert. Weiter ergibt sich

Satz 9. *Wenn die regelmäßigen Kettenbrüche für die Zahlen η_0, ζ_0 in den n ersten Gliedern übereinstimmen, so beginnt der Kettenbruch für jede zwischen η_0 und ζ_0 gelegene Zahl ξ_0 ebenfalls mit diesen n Gliedern. Das nächste Glied muß zwischen den zwei entsprechenden Gliedern von η_0 und ζ_0 liegen, die Grenzen eingeschlossen.*

Wäre es nämlich anders, so müßte nach Satz 8 die Zahl ξ_0 entweder größer als jede der Zahlen η_0, ζ_0 oder kleiner als η_0, ζ_0 sein; sie würde also nicht zwischen beiden liegen. Satz 9 ist von Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, eine Zahl ξ_0, von der nur einige Dezimalstellen bekannt sind, in einen regelmäßigen Kettenbruch zu entwickeln. Denn durch den Dezimalbruch sind zwei rationale Zahlen bekannt, zwischen denen ξ_0 liegt; wenn man diese in Kettenbrüche entwickelt, und sie stimmen in den ersten n Gliedern überein, so beginnt auch die Kettenbruchentwicklung für ξ_0 mit diesen n Gliedern. Natürlich wird man, um unnötige Rechnung zu vermeiden, beide rationale Zahlen gleichzeitig entwickeln und die Rechnung beenden, sobald sich in beiden eine Abweichung ergibt.

Zum Beispiel gelten für die Ludolphsche Zahl π die Ungleichungen

$$3{,}14159265358 < \pi < 3{,}14159265359.$$

Nun findet man

$$3{,}14159265358 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 1, \ldots]$$
$$3{,}14159265359 = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, \ldots].$$

Da diese beiden Kettenbrüche in den acht ersten Gliedern übereinstimmen, so ist auch

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \ldots]$$

und zugleich ersieht man, daß der nächste Teilnenner nur 1 oder 2 sein kann. Bei Berücksichtigung von mehr Dezimalstellen findet man in der Tat 2 als nächsten Teilnenner.[1])

§ 13. Das Näherungsgesetz. Kriterium dafür, daß ein Bruch Näherungsbruch ist.

I. Sei wieder ξ_0 irrational oder rational gebrochen, und

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots] \tag{1}$$

$$\xi_\nu = [b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots], \tag{2}$$

und zwar soll, wenn ξ_0 rational ist, diejenige Kettenbruchentwicklung gemeint sein, deren letzter Teilnenner größer als 1 ist, so daß für $\nu \geqq 1$ stets $\xi_\nu > 1$ ist. Aus der schon oft benutzten Gleichung

$$\xi_0 = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}} \tag{3}$$

findet man

$$\xi_\nu(B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}) = -(B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}).$$

Wäre nun die linke Klammer Null, so müßte auch die rechte verschwinden, und folglich wäre $A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1} = 0$, während dieser Ausdruck doch $(-1)^\nu$ ist. Es ist also $B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1} \neq 0$, und folglich erhält man

$$\xi_\nu = -\frac{B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}}. \tag{4}$$

Wegen $\xi_\nu > 1$ ergibt sich hieraus, daß die Zahlen $B_\nu\xi_0 - A_\nu$ mit wachsendem ν ihrem absoluten Wert nach abnehmen, aber im Vorzeichen alternieren, und zwar hat $B_\nu\xi_0 - A_\nu$ das Zeichen $(-1)^\nu$, weil dies ja für $\nu = 0$ der Fall ist. Daher werden a fortiori auch die Zahlen $\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}$ absolut abnehmen und das Vorzeichen $(-1)^\nu$ haben. Dies besagt, daß jeder folgende Näherungsbruch näher an ξ_0 liegt als ein vorausgehender, und daß die Näherungsbrüche gerader Ordnung alle kleiner, die ungerader Ordnung alle größer als ξ_0 sind. Es gelten also die Ungleichungen

---

1) Das allgemeine Bildungsgesetz der Teilnenner von π ist nicht bekannt. *J. Wallis* **2a** hat unter Benutzung von 35 Dezimalstellen das Resultat erlangt:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1, \ldots],$$

woraus keinerlei Gesetzmäßigkeit zu erkennen ist. Ein vom 26. unvollständigen Quotienten an abweichendes Resultat erzielte *Lambert* **1b**; doch ist die *Wallis*sche Rechnung zweifellos die richtigere. (Vgl. auch die Fußnote S. 62.)

$$(5)\qquad \left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|$$

$$(6)\qquad \frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \frac{A_4}{B_4} < \cdots < \xi_0 < \cdots < \frac{A_5}{B_5} < \frac{A_3}{B_3} < \frac{A_1}{B_1}.$$

Um den Grad der Annäherung genauer zu ermitteln, greifen wir auf die obige Formel (3) zurück; aus dieser ergibt sich

$$(7)\qquad \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{A_{\nu-2}B_{\nu-1} - A_{\nu-1}B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2})} = \frac{(-1)^{\nu-1}}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2})}.$$

Wegen $\xi_\nu \geqq b_\nu$ folgt hieraus zunächst

$$(8)\qquad \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| \leqq \frac{1}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}b_\nu + B_{\nu-2})} = \frac{1}{B_{\nu-1}B_\nu},$$

wobei Gleichheit dann und nur dann statthat, wenn b_ν der letzte Teilnenner ist; daher auf jeden Fall:

$$(9)\qquad \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| < \frac{1}{B_{\nu-1}^2}.$$

Des kürzeren Ausdrucks halber definieren wir nun: *Unter dem Näherungsbruch (-Zähler, -Nenner) ν^{ter} Ordnung einer Zahl ξ_0 versteht man den betreffenden Näherungsbruch (-Zähler, -Nenner) des regelmäßigen Kettenbruchs, in den sich ξ_0 entwickeln läßt; ist ξ_0 rational, so ist dabei derjenige Kettenbruch gemeint, dessen letzter Teilnenner größer als 1 ist.* Die Ungleichungen (8), (9) lassen sich jetzt so aussprechen:

Satz 10 *(Näherungsgesetz): Die Näherungsbrüche einer Zahl ξ_0 approximieren den wahren Wert ξ_0 mit einer solchen Genauigkeit, daß der Fehler kleiner ist als der reziproke Wert vom Quadrat des Näherungsnenners, ja sogar kleiner oder gleich*[1]) *dem reziproken Wert vom Produkt des Näherungsnenners und des folgenden Näherungsnenners.* (*Lagrange* 7.)

Multipliziert man (8), (9) mit $B_{\nu-1}$, so entstehen unter Berücksichtigung des Vorzeichens die Formeln

$$(10)\qquad B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}\frac{\delta}{B_\nu} \qquad 0 < \delta \leqq 1$$

$$(11)\qquad B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}\frac{\delta'}{B_{\nu-1}} \qquad 0 < \delta' < 1;$$

in dieser Gestalt werden wir das Näherungsgesetz auch häufig anwenden. Man kann nun ebenso auch eine untere Grenze für den Fehler angeben. Da nämlich $\xi_\nu < b_\nu + 1$ ist, so wird

$$B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2} < B_{\nu-1}(b_\nu + 1) + B_{\nu-2} = B_\nu + B_{\nu-1},$$

---

1) Gleich dann und nur dann, wenn es sich um den vorletzten Näherungsbruch einer rationalen Zahl handelt.

und folglich nach (7):

$$\left|\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| > \frac{1}{B_{\nu-1}(B_\nu + B_{\nu-1})}. \quad (Lagrange\ 7). \tag{12}$$

II. Ist ξ_0 eine nicht ganze Zahl, und $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch mit positivem Nenner, so kann $\frac{p}{q}$ nach Satz 10 nur dann ein Näherungsbruch von ξ_0 sein, wenn $\left|\xi_0 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$ ist. Diese notwendige Bedingung ist jedoch nicht hinreichend. Um eine notwendige und hinreichende zu finden, setzen wir

$$\xi_0 - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon\vartheta}{q^2}, \tag{13}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$, und ε eine der Zahlen ± 1 ist. Wir entwickeln dann $\frac{p}{q}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch

$$\frac{p}{q} = [b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}] = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}\ ^{1)},$$

so daß $p = A_{n-1}$, $q = B_{n-1}$ wird, und also die Gleichung (13) die Form annimmt

$$\xi_0 - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{\varepsilon\vartheta}{B_{n-1}^2}.$$

Da wir die Gliederzahl nach Belieben gerade oder ungerade wählen können, so wollen wir es so einrichten, daß

$$(-1)^{n-1} = \varepsilon$$

wird. Definieren wir nun eine Zahl w durch die Gleichung

$$\xi_0 = \frac{A_{n-1}w + A_{n-2}}{B_{n-1}w + B_{n-2}}, \tag{14}$$

so wird

$$\frac{\varepsilon\vartheta}{B_{n-1}^2} = \xi_0 - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{A_{n-2}B_{n-1} - A_{n-1}B_{n-2}}{B_{n-1}(B_{n-1}w + B_{n-2})} = \frac{(-1)^{n-1}}{B_{n-1}(B_{n-1}w + B_{n-2})}.$$

Daher auch

$$\vartheta = \frac{B_{n-1}}{B_{n-1}w + B_{n-2}}, \tag{15}$$

oder nach w aufgelöst

$$w = \frac{B_{n-1} - \vartheta B_{n-2}}{\vartheta B_{n-1}}. \tag{16}$$

Wegen $0 < \vartheta < 1$ ist also w positiv. Nun ist aber Gleichung (14) gleichbedeutend mit

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, w].$$

---

1) Der Bruch $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ hat hier also nicht die Bedeutung eines Näherungsbruchs von ξ_0. Ob oder wann er doch ein solcher ist, soll gerade untersucht werden.

Wenn daher $w > 1$, so läßt sich w in einen regelmäßigen Kettenbruch

$$w = [b_n, \ldots]$$

entwickeln, bei welchem $b_n \geqq 1$ ist. Daraus folgt aber nach der Regel A auf S. 27

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n, \ldots],$$

und folglich ist $\frac{p}{q} = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ ein Näherungsbruch von ξ_0; es ist eben w in diesem Fall nichts anderes wie der vollständige Quotient ξ_n. Wenn dagegen $w \leqq 1$, so ist immerhin w positiv, und folglich

$$b_{n-1} + \frac{1}{w} \geqq b_{n-1} + 1.$$

Entwickelt man daher die Zahl $b_{n-1} + \frac{1}{w}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch, so hat dieser die Form

$$b_{n-1} + \frac{1}{w} = [b_{n-1} + c, \ldots],$$

wobei $c \geqq 1$ ist. In Verbindung mit der Gleichung

$$\xi_0 = \left[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, w\right] = \left[b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1} + \frac{1}{w}\right]$$

ergibt sich daher jetzt die regelmäßige Kettenbruchentwicklung von ξ_0 in der Gestalt

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1} + c, \ldots].$$

Der Näherungsbruch $(n-2)^{\text{ter}}$ und $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von ξ_0 sind daher jetzt

$$\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}, \quad \frac{A_{n-1} + cA_{n-2}}{B_{n-1} + cB_{n-2}},$$

und folglich kann $\frac{p}{q} = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$, da der Nenner zwischen den zwei vorstehenden liegt, kein Näherungsbruch sein. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch von ξ_0 ist, lautet daher: $w > 1$, was nach* (15) *gleichbedeutend ist mit*

$$\vartheta < \frac{B_{n-1}}{B_{n-1} + B_{n-2}}.$$

Von dieser Bedingung, die *Legendre* 3 angegeben hat, bemerken wir einen Spezialfall. Sie ist nämlich wegen $B_{n-2} \leqq B_{n-1}$ gewiß erfüllt, wenn $\vartheta < \frac{1}{2}$ ist. Dies ergibt

Satz 11. *Wenn ein rationaler Bruch $\frac{p}{q}$ die Eigenschaft hat, daß $\left|\xi_0 - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ ist, so ist er einem Näherungsbruch von ξ_0 gleich.*

Man bemerke, daß hierbei $\frac{p}{q}$ nicht irreduzibel vorausgesetzt werden muß. Denn wenn $\frac{p}{q}$ sich noch reduzieren läßt, so ist für den reduzierten Bruch die analoge Ungleichung erst recht erfüllt, so daß dieser ein Näherungsbruch ist. Wir wollen nun als Anwendung des allgemeinen *Legendre*schen Kriteriums noch den folgenden Satz beweisen, der uns bald gute Dienste leisten wird.

Satz 12. *Wenn die positiven ganzen Zahlen* p, q *der Ungleichung* $|p^2 - \xi_0^2 q^2| < \xi_0$ *genügen, so ist der Bruch* $\frac{p}{q}$ *einem Näherungsbruch von* ξ_0 *gleich.*

Beim Beweis können wir uns offenbar wieder auf relativ prime p, q beschränken. Setzen wir dann

$$\xi_0^2 q^2 - p^2 = \varepsilon \theta \xi_0, \; 0 < \theta < 1, \; \varepsilon = \pm 1, \tag{17}$$

so ist

$$\xi_0 q - p = \frac{\varepsilon \theta \xi_0}{\xi_0 q + p}, \tag{18}$$

und also, wenn man dies mit (13) vergleicht,

$$\vartheta = \frac{\theta \xi_0 q}{\xi_0 q + p} = \frac{\theta \xi_0 B_{n-1}}{\xi_0 B_{n-1} + A_{n-1}}.$$

Es ist daher nach dem Legendreschen Kriterium nur zu beweisen, daß die Ungleichung

$$\frac{\theta \xi_0 B_{n-1}}{\xi_0 B_{n-1} + A_{n-1}} < \frac{B_{n-1}}{B_{n-1} + B_{n-2}}$$

besteht, oder, was dasselbe ist:

$$\theta \xi_0 (B_{n-1} + B_{n-2}) < \xi_0 B_{n-1} + A_{n-1}.$$

Diese ist aber, wenn etwa $n = 1$ sein sollte, wegen $\theta < 1$ gewiß erfüllt. Ist dagegen $n > 1$, so zeigen wir, daß sogar die stärkere Ungleichung

$$\xi_0 (B_{n-1} + B_{n-2}) < \xi_0 B_{n-1} + A_{n-1}$$

besteht. In der Tat, subtrahiert man hiervon Gleichung (18) und dividiert dann durch ξ_0, so kommt, weil $p = A_{n-1}$, $q = B_{n-1}$ ist:

$$B_{n-2} < B_{n-1} - \frac{\varepsilon \theta}{\xi_0 B_{n-1} + A_{n-1}}.$$

Da aber n so gewählt werden sollte, daß $(-1)^{n-1} = \varepsilon$ wird, so ist diese Ungleichung, falls $n = 2$ ist, gewiß erfüllt; ebenso aber auch für $n > 2$, weil dann stets $B_{n-1} \geq B_{n-2} + 1$ ist. Damit ist Satz 12 vollständig bewiesen.

III. Hierher gehört auch noch

Satz 13. *Wenn die Gleichung*

$$\xi_0 = \frac{Pw + R}{Qw + S}$$

besteht, wo $w > 1$, *und wo* P, Q, R, S *ganze Zahlen sind, die den Bedingungen*

$$PS - QR = \pm 1, \quad Q > S > 0$$

genügen, so sind $\frac{R}{S}$, $\frac{P}{Q}$ *zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von* ξ_0, *und* w *ist der zugehörige vollständige Quotient.*

Beweis. Zunächst bemerke man, daß P und Q wegen der Gleichung $PS - QR = \pm 1$ relativ prim sind; ferner ist $Q > 0$ vorausgesetzt. Entwickelt man daher $\frac{P}{Q}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch

$$\frac{P}{Q} = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}] = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}},$$

so ist $P = A_{n-1}$, $Q = B_{n-1}$. Dabei möge die Gliederzahl derart gewählt werden, daß

$$A_{n-1}S - B_{n-1}R = PS - QR = \pm 1 = (-1)^{n-2}$$

wird. Durch Subtraktion der Gleichung

$$A_{n-1}B_{n-2} - B_{n-1}A_{n-2} = (-1)^{n-2}$$

erhält man dann

$$A_{n-1}(S - B_{n-2}) = B_{n-1}(R - A_{n-2}).$$

Da A_{n-1} und B_{n-1} relativ prim sind, so muß also $S - B_{n-2}$ durch B_{n-1} teilbar sein; aber B_{n-2} ist nicht größer wie B_{n-1}, S nach Voraussetzung sogar kleiner wie $Q = B_{n-1}$. Daher ist die Zahl $|S - B_{n-2}|$ kleiner wie ihr Teiler B_{n-1}, also $S - B_{n-2} = 0$; folglich auch

$$R - A_{n-2} = 0.$$

Die Gleichung unseres Satzes läßt sich demnach so schreiben:

$$\xi_0 = \frac{A_{n-1}w + A_{n-2}}{B_{n-1}w + B_{n-2}},$$

und dies besagt soviel wie

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, w].$$

Wegen $w > 1$ beginnt daher die regelmäßige Kettenbruchentwicklung von ξ_0 mit den unvollständigen Quotienten $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Daher sind in der Tat $\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}$, $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$, das heißt aber $\frac{R}{S}$, $\frac{P}{Q}$ aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von ξ_0, und außerdem ist w nichts anderes als der vollständige Quotient ξ_n. W. z. b. w.

§ 14. Approximation durch rationale Brüche.

I. Nach dem Näherungsgesetz hat jeder Näherungsbruch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ einer Zahl ξ_0 die Eigenschaft, daß

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{B_\nu^2}$$

ist. Man kann aber noch weit bessere Approximationen nachweisen. Ein erstes Theorem dieser Art ist

Satz 14. *Von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen einer Zahl ξ_0 hat mindestens einer die Eigenschaft, daß*

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{2B_\nu^2}$$

ist; insbesondere gibt es also bei irrationalem ξ_0 unendlich viele Brüche dieser Art. (*Vahlen* **1.**)

Zum Beweis nehmen wir an, es sei im Gegenteil für einen gewissen Wert von $\nu\,(\geqq 0)$:

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| \geqq \frac{1}{2B_\nu^2}, \quad \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}\right| \geqq \frac{1}{2B_{\nu+1}^2};$$

daraus folgt durch Addition

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| + \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}\right| \geqq \frac{1}{2B_\nu^2} + \frac{1}{2B_{\nu+1}^2}.$$

Nun liegt aber nach § 13, I ξ_0 zwischen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ und $\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}$; also haben die Zahlen $\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}$ und $\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \xi_0$ gleiches Zeichen (die letztere kann eventuell auch Null sein), und es ist

$$\begin{aligned}\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| + \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}}\right| &= \left|\left(\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right) + \left(\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \xi_0\right)\right| \\ &= \left|\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| = \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}},\end{aligned}$$

so daß die letzte Ungleichung soviel besagt wie

$$\frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} \geqq \frac{1}{2B_\nu^2} + \frac{1}{2B_{\nu+1}^2},$$

oder also

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{B_\nu} - \frac{1}{B_{\nu+1}}\right)^2 \leqq 0.$$

Dies ist aber für $\nu > 0$ nicht möglich, weil dann stets $B_{\nu+1} > B_\nu$ ist. Für $\nu = 0$ dagegen liegt nur dann keine Unmöglichkeit vor, wenn $b_1 = 1$ ist, und in allen Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt. Aus der allerersten folgt dann aber insbesondere $\xi_0 - b_0 = \frac{1}{2}$, also weil $b_1 = 1$ sein muß:

$$\xi_0 = b_0 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1}.$$

Aber dann ist $\frac{A_1}{B_1}$ gar nicht als Näherungsbruch von ξ_0 anzusehen (siehe die Definition Seite 43). Somit ist Satz 14 vollständig bewiesen.

II. Die Frage, ob noch bessere Approximationen möglich sind, wird beantwortet durch

Satz 15. *Von drei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen einer Zahl ξ_0 hat mindestens einer die Eigenschaft, daß*

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,B_\nu^2}$$

ist; insbesondere gibt es also bei irrationalem ξ_0 unendlich viele Brüche dieser Art.

Dagegen gibt es irrationale Zahlen ξ_0, für welche die Ungleichung

$$\left|\xi_0 - \frac{A}{B}\right| < \frac{1}{cB^2},$$

wenn c eine Zahl größer als $\sqrt{5}$ bedeutet, nicht mehr durch unendlich viele rationale Brüche $\frac{A}{B}$ befriedigt werden kann.

Daß schon von drei sukzessiven Näherungsbrüchen mindestens einer die angegebene Eigenschaft hat, wurde erst von *Borel* 1 bemerkt; im übrigen stammt der Satz von *Hurwitz* 2. Beim Beweis gehen wir aus von der schon oft benutzten Formel

$$(1)\qquad \left|\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| = \frac{1}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2})} = \frac{1}{B_{\nu-1}^2\left(\xi_\nu + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}}\right)},$$

der zufolge der erste Teil unseres Satzes bewiesen sein wird, sobald wir zeigen können, daß für drei aufeinanderfolgende positive ν-Werte mindestens einmal die Ungleichung

$$\xi_\nu + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} > \sqrt{5}$$

besteht. Setzt man also zur Abkürzung

$$(2)\qquad \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} = \varphi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist nachzuweisen, daß für jeden positiven Index λ mindestens eine der drei Zahlen

$$\xi_\lambda + \varphi_\lambda,\ \xi_{\lambda+1} + \varphi_{\lambda+1},\ \xi_{\lambda+2} + \varphi_{\lambda+2} \tag{3}$$

größer als $\sqrt{5}$ ausfällt. Nun ist aber für $\nu > 0$

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}} \tag{4}$$

$$\frac{1}{\varphi_{\nu+1}} = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} = b_\nu + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} = b_\nu + \varphi_\nu; \tag{5}$$

also auch

$$\xi_\nu + \varphi_\nu = \frac{1}{\xi_{\nu+1}} + \frac{1}{\varphi_{\nu+1}} \qquad (\nu > 0). \tag{6}$$

Nehmen wir daher an, die drei Zahlen (3) seien im Gegenteil sämtlich nicht größer als $\sqrt{5}$, so können wir dies folgendermaßen schreiben:

$$\begin{cases} \xi_\lambda + \varphi_\lambda = \dfrac{1}{\xi_{\lambda+1}} + \dfrac{1}{\varphi_{\lambda+1}} \leqq \sqrt{5} \\ \xi_{\lambda+1} + \varphi_{\lambda+1} = \dfrac{1}{\xi_{\lambda+2}} + \dfrac{1}{\varphi_{\lambda+2}} \leqq \sqrt{5} \\ \xi_{\lambda+2} + \varphi_{\lambda+2} = \dfrac{1}{\xi_{\lambda+3}} + \dfrac{1}{\varphi_{\lambda+3}} \leqq \sqrt{5}, \end{cases} \tag{7}$$

woraus insbesondere auch durch Addition folgt:

$$\begin{cases} \xi_{\lambda+1} + \dfrac{1}{\xi_{\lambda+1}} + \varphi_{\lambda+1} + \dfrac{1}{\varphi_{\lambda+1}} \leqq 2\sqrt{5} \\ \xi_{\lambda+2} + \dfrac{1}{\xi_{\lambda+2}} + \varphi_{\lambda+2} + \dfrac{1}{\varphi_{\lambda+2}} \leqq 2\sqrt{5}. \end{cases} \tag{8}$$

Nun lehrt aber die Gleichung (5), daß für zwei aufeinanderfolgende positive ν-Werte mindestens einmal $\varphi_\nu < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Wäre nämlich im Gegenteil

$$\varphi_\nu \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \varphi_{\nu+1} \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

also auch

$$\frac{1}{\varphi_{\nu+1}} < \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

so würde hieraus, weil wegen der Rationalität von $\varphi_{\nu+1}$ Gleichheit auszuschließen ist, folgen

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{1}{\varphi_{\nu+1}} = b_\nu + \varphi_\nu > b_\nu + \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

also $b_\nu < 1$, was nicht sein kann. Es ist daher auch von den beiden Zahlen $\varphi_{\lambda+1}$, $\varphi_{\lambda+2}$ mindestens eine kleiner als $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; wir schreiben etwa

$$\varphi_{\lambda+i} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \tag{9}$$

wo also i eine bestimmte der Zahlen 1 oder 2 bedeutet. Da die Funktion $x + \frac{1}{x}$ für $0 < x < 1$ monoton abnimmt (ihr Differentialquotient ist negativ), so folgt aus (9):

$$\varphi_{\lambda+i} + \frac{1}{\varphi_{\lambda+i}} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}. \tag{10}$$

Anderseits ist nach (7) und (9):

$$\frac{1}{\xi_{\lambda+i}} \leqq \sqrt{5} - \frac{1}{\varphi_{\lambda+i}} < \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

woraus wieder wegen der Monotonie der Funktion $x + \frac{1}{x}$ folgt:

$$\frac{1}{\xi_{\lambda+i}} + \xi_{\lambda+i} > \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}. \tag{11}$$

Addiert man jetzt die Ungleichungen (10) und (11), so kommt

$$\xi_{\lambda+i} + \frac{1}{\xi_{\lambda+i}} + \varphi_{\lambda+i} + \frac{1}{\varphi_{\lambda+i}} > 2\sqrt{5},$$

was aber, da i eine der Zahlen 1, 2 bedeutet, mit (8) im Widerspruch steht. Damit ist unsere Annahme widerlegt, und somit der erste Teil von Satz 15 bewiesen.

Für den zweiten Teil betrachten wir speziell die Zahl

$$\xi_0 = [1, 1, 1, \ldots],$$

wo alle Teilnenner gleich 1 sind. Um zunächst den Wert dieses Kettenbruches zu berechnen, bedenke man, daß auch

$$\xi_1 = [1, 1, 1, \cdots] = \xi_0$$

ist. Wegen der Beziehung $\xi_0 = 1 + \frac{1}{\xi_1}$ erweist sich also ξ_0 als eine Wurzel der Gleichung $x = 1 + \frac{1}{x}$, und da ξ_0 positiv ist, muß daher

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

sein. Nimmt man nun an, es gäbe unendlich viele rationale Brüche $\frac{A}{B}$, für welche

$$\left|\xi_0 - \frac{A}{B}\right| < \frac{1}{cB^2}$$

ausfällt, wo $c > \sqrt{5}$, also erst recht $c > 2$ ist, so müssen nach Satz 11 diese $\frac{A}{B}$ Näherungsbrüche von ξ_0 sein. Setzt man aber $\frac{A}{B} = \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$, so ist wieder

$$\left| \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \right| = \frac{1}{B_{\nu-1}^2 \left(\xi_\nu + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} \right)},$$

und dies fällt nur dann kleiner als $\frac{1}{c\,B_{\nu-1}^2}$ aus, wenn

$$\xi_\nu + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} > c$$

wird. Diese Ungleichung müßte also für unendlich viele Werte von ν bestehen. Nun ist aber

$$\xi_\nu = [1, \dot{1}, 1, \cdots] = \xi_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

während sich die Zahl

$$\frac{B_{\nu-1}}{B_{\nu-2}} = [1, 1, 1, \cdots 1, 1] \qquad (\nu - 1 \text{ Einser})^{1)}$$

beliebig wenig von

$$[1, 1, 1, \cdots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

unterscheidet, wenn nur ν genügend groß. Daher liegt die Zahl $\xi_\nu + \frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}}$ für hinreichend große ν beliebig nahe bei $\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}$, kann also gewiß nicht größer als c sein. Somit ist auch der zweite Teil von Satz 15 bewiesen. Übrigens sieht man leicht ein, daß dieser zweite Teil nicht nur für die eine Zahl $\xi_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ gilt, sondern für jeden regelmäßigen Kettenbruch, dessen Teilnenner von einer gewissen Stelle an alle gleich 1 sind.

§ 15. Das Gesetz der besten Näherung.

Lagrange 7 hat folgenden Satz bewiesen:

Satz 16. *Ist* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ $(\nu \geqq 1)$ *der Näherungsbruch* ν^{ter} *Ordnung von* ξ_0, *und* $\frac{P}{Q}$ *ein von* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *verschiedener Bruch, bei dem* $0 < Q \leqq B_\nu$ *ist, so wird stets*

$$|Q\xi_0 - P| \geqq |B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| > |B_\nu \xi_0 - A_\nu|.$$

1) Nach § 11, Formel (3).

Beweis (nach *Legendre* 3). Es ist identisch

$$(1)\qquad Q\xi_0 - P = M(B_\nu\xi_0 - A_\nu) + N(B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}),$$

wenn die Zahlen M, N aus den zwei Gleichungen

$$(2)\qquad \begin{aligned} P &= MA_\nu + NA_{\nu-1} \\ Q &= MB_\nu + NB_{\nu-1} \end{aligned}$$

berechnet werden. Da $A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1}B_\nu = \pm 1$ ist, so ergeben sich M, N hieraus als ganze Zahlen. Wäre etwa $N = 0$, so hätte man $P = MA_\nu$, $Q = MB_\nu$, also $\frac{P}{Q} = \frac{A_\nu}{B_\nu}$, gegen die Voraussetzung; es ist daher $N \neq 0$. Ferner muß M entweder Null oder von entgegengesetztem Zeichen sein wie N, weil sonst wegen $\nu \geqq 1$ aus (2) $Q > B_\nu$ folgen würde, wieder gegen die Voraussetzung. Daraus ergibt sich, daß die beiden Summanden auf der rechten Seite von (1) gleiches Zeichen haben, weil ja die zwei Klammergrößen nach § 13, I ebenfalls von entgegengesetztem Zeichen sind. Es folgt daher aus (1)

$$|Q\xi_0 - P| = |M(B_\nu\xi_0 - A_\nu)| + |N(B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1})|,$$

und somit, weil N eine von Null verschiedene ganze Zahl ist:

$$|Q\xi_0 - P| \geqq |B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}|.$$

Hiermit ist der Satz bewiesen; denn daß stets

$$|B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| > |B_\nu\xi_0 - A_\nu|$$

ist, wurde schon in § 13, I gezeigt.[1]) Aus Satz 16 ergibt sich nun eine wichtige, die Näherungsbrüche völlig charakterisierende Eigenschaft, die wir folgendermaßen aussprechen.

Satz 17. *Wenn der irreduzible Bruch $\frac{A}{B}$ ein Näherungsbruch mindestens erster Ordnung von ξ_0 ist, so gibt es keinen von $\frac{A}{B}$ verschiedenen Bruch $\frac{P}{Q}$, für den $|Q\xi_0 - P| \leqq |B\xi_0 - A|$ und zugleich $Q \leqq B$ wäre. Wenn dagegen $\frac{A}{B}$ kein Näherungsbruch von ξ_0 ist, so gibt es einen von $\frac{A}{B}$ verschiedenen Bruch $\frac{P}{Q}$, für den $|Q\xi_0 - P| \leqq |B\xi_0 - A|$ und zugleich $Q \leqq B$, im Fall $B > 1$ sogar $Q < B$ ist.* (*Lagrange* 7.)

1) Zwar kann nach Formel (4) des § 13 auch

$$|B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| = |B_\nu\xi_0 - A_\nu|$$

sein; aber nur, wenn $\xi_{\nu+1} = 1$ ist, wenn also der Kettenbruch die Form hat $\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_\nu, 1]$. Dann ist aber $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ kein Näherungsbruch von ξ_0 (siehe die Definition Seite 43), so daß Satz 16 durch diese Ausnahme nicht berührt wird.

Beweis. Der erste Teil dieses Satzes ist schon durch Satz 16 erledigt. Was den zweiten Teil betrifft, so erkennt man leicht, daß für $B = 1$ der Bruch $\frac{P}{Q} = \frac{A_0}{B_0}$ stets das Verlangte leistet. In dem ungleich wichtigeren Fall $B > 1$ sei B_ν der erste Näherungsnenner, welcher nicht kleiner als B ist[1]), also

$$B_{\nu-1} < B \leq B_\nu .$$

Dann ist $B \leq B_\nu$, und außerdem, weil $\frac{A}{B}$ kein Näherungsbruch ist, gewiß $\frac{A}{B}$ von $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ verschieden. Nach Satz 16 ist daher

$$|B\xi_0 - A| \geqq |B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}|.$$

Da zugleich $B_{\nu-1} < B$ ist, so hat also der Bruch $\frac{P}{Q} = \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ die behauptete Eigenschaft.

In Satz 17 ist über den Näherungsbruch $\frac{A_0}{B_0}$ nichts ausgesagt. Für diesen erkennt man leicht, daß ein Bruch $\frac{P}{Q}$ mit den angegebenen Eigenschaften existiert oder nicht existiert, je nachdem $b_1 = 1$ oder $b_1 > 1$ ist. Für $b_1 = 1$ leistet nämlich der Bruch $\frac{P}{Q} = \frac{A_1}{B_1}$ das Verlangte. Hieran schließen wir die

Definition. *Ein Bruch $\frac{A}{B}$ heißt eine „beste Näherung von ξ_0“, wenn jeder andre Bruch, der näher oder ebenso nahe an ξ_0 liegt als $\frac{A}{B}$, notwendig einen größeren Nenner haben muß.*

Von größter Wichtigkeit ist nun

Satz 18. *Die Näherungsbrüche einer Zahl ξ_0 sind von der ersten Ordnung an „beste Näherungen“. Der Näherungsbruch nullter Ordnung ist eine „beste Näherung“ oder nicht, je nachdem der Teilnenner b_1 größer als 1 oder gleich 1 ist.*

Beweis. Für die nullte Ordnung erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes. Für höhere Ordnungen aber nehmen wir an, es sei etwa $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ keine beste Näherung. Dann muß es ex definitione einen von $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ verschiedenen Bruch $\frac{P}{Q}$ geben, für welchen

---

1) Der Fall, daß alle Näherungsnenner kleiner als B sind, ist ganz trivial. Dann ist ja der Kettenbruch endlich, und der letzte Näherungsbruch $\frac{A_n}{B_n}$ leistet das Verlangte, indem $B_n\xi_0 - A_n = 0$ ist.

$$\left|\xi_0 - \frac{P}{Q}\right| \leqq \left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right|, \quad Q \leqq B_\nu,$$

also durch Multiplikation auch

$$|Q\xi_0 - P| \leqq |B_\nu \xi_0 - A_\nu|$$

ist. Dies widerspricht aber dem Satz 16; also muß $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ in der Tat eine beste Näherung sein.

Übrigens ist diese Eigenschaft im Gegensatz zu der weitergehenden Eigenschaft, welche in Satz 17 ausgesprochen wurde, keineswegs charakteristisch für die Näherungsbrüche. Vielmehr werden wir im nächsten Paragraphen noch andere Brüche kennen lernen, welche ebenfalls beste Näherungen sind. Das Gesetz der besten Näherung (Satz 18) war im wesentlichen schon *Daniel Schwenter* **1** bekannt. Später kommt es bei *Wallis* **2a** und namentlich bei *Huygens* **1** vor, welch letzterer es auch praktisch anwandte, worüber näheres im folgenden Paragraphen.

§ 16. Nebennäherungsbrüche.

I. Als „Nebennäherungsbrüche" oder „eingeschaltete Brüche" bezeichnet man die Zahlen

$$(1) \qquad \frac{A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}, \ \frac{2A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{2B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}, \ldots, \frac{(b_\nu - 1)A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{(b_\nu - 1)B_{\nu-1} + B_{\nu-2}};$$

die dem Wert $\nu = 0$ entsprechenden $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots, \frac{b_0 - 1}{1}$ wollen wir jedoch nicht zu den Nebennäherungsbrüchen rechnen; wir denken uns also $\nu \geqq 1$. Wegen der Identität

$$(cA_{\nu-1} + A_{\nu-2})B_{\nu-1} - (cB_{\nu-1} + B_{\nu-2})A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$$

sind auch Zähler und Nenner von Nebennäherungsbrüchen relativ prim. Wir wollen jetzt die seither als Näherungsbrüche bezeichneten Zahlen der Deutlichkeit halber „Hauptnäherungsbrüche" nennen und mit dem Wort „Näherung" die Haupt- und Nebennäherungsbrüche zusammenfassen. Als Näherung in diesem Sinn gilt daher jede Zahl von der Form

$$\frac{cA_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1} + B_{\nu-2}} \qquad (c = 0, 1, \cdots, b_\nu; \nu \geqq 1),$$

wobei lediglich der für $\nu = 1$, $c = 0$ entstehende uneigentliche Bruch $\frac{A_{-1}}{B_{-1}} = \frac{1}{0}$ auszunehmen ist.

Die Brüche (1) liegen alle zwischen

$$\frac{0 \cdot A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{0 \cdot B_{\nu-1} + B_{\nu-2}} \quad \text{und} \quad \frac{b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}},$$

also zwischen $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, und zwar nähern sie sich in der angeschriebenen Reihenfolge beständig dem Wert $\frac{A_\nu}{B_\nu}$. Da aber $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$ und $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ auf der gleichen Seite von ξ_0 liegen, so liegen auch die Zahlen (1) auf dieser Seite. Man wird also alle Näherungen, die kleiner als ξ_0 sind, der Reihe nach erhalten, wenn man zwischen $\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_2}{B_2}, \frac{A_4}{B_4}, \cdots$ noch die betreffenden Nebennäherungsbrüche einschaltet. So entsteht die folgende Reihe von Näherungen:

$$(2)\begin{cases} \frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1+A_0}{B_1+B_0}, \frac{2A_1+A_0}{2B_1+B_0}, \ldots, \frac{b_2A_1+A_0}{b_2B_1+B_0}=\frac{A_2}{B_2}, \frac{A_3+A_2}{B_3+B_2}, \frac{2A_3+A_2}{2B_3+B_2}, \ldots, \\ \frac{b_4A_3+A_2}{b_4B_3+B_2}=\frac{A_4}{B_4}, \frac{A_5+A_4}{B_5+B_4}, \frac{2A_5+A_4}{2B_5+B_4}, \ldots, \frac{b_6A_5+A_4}{b_6B_5+B_4}=\frac{A_6}{B_6}, \frac{A_7+A_6}{B_7+B_6}, \ldots \end{cases}$$

Die Reihe dieser Brüche nähert sich wachsend dem Wert ξ_0. Analog ergeben sich die Näherungen, welche größer als ξ_0 sind:

$$(3)\begin{cases} \frac{A_0+A_{-1}}{B_0+B_{-1}}, \frac{2A_0+A_{-1}}{2B_0+B_{-1}}, \ldots, \frac{b_1A_0+A_{-1}}{b_1B_0+B_{-1}}=\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2+A_1}{B_2+B_1}, \frac{2A_2+A_1}{2B_2+B_1}, \ldots, \\ \frac{b_3A_2+A_1}{b_3B_2+B_1}=\frac{A_3}{B_3}, \frac{A_4+A_3}{B_4+B_3}, \frac{2A_4+A_3}{2B_4+B_3}, \ldots, \frac{b_5A_4+A_3}{b_5B_4+B_3}=\frac{A_5}{B_5}, \frac{A_6+A_5}{B_6+B_5}, \ldots; \end{cases}$$

diese nähern sich abnehmend dem Wert ξ_0. Man bemerke, daß beide Zahlenreihen auch nach wachsendem Nenner geordnet sind und daß beide mit Brüchen beginnen, deren Nenner gleich 1 ist. Man sieht weiter, daß von den beiden Näherungen

$$\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \text{ und } \frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}} \qquad (0 \leqq c \leqq b_\nu)$$

stets eine der Serie (2), die andere der Serie (3) angehört; sie schließen also den Wert ξ_0 ein, und daher sind die Zahlen

$$(4) \qquad \xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}, \; \xi_0 - \frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}},$$

wo c einen beliebigen der Werte $0, 1, \ldots, b_\nu$ bedeutet, von entgegengesetzten Vorzeichen.

Nun sei $\frac{P}{Q}$ ein Bruch, der näher oder ebenso nahe an ξ_0 (aber eventuell auf der andern Seite) liegt wie eine gewisse Näherung; also

$$\left|\xi_0 - \frac{P}{Q}\right| \leqq \left|\xi_0 - \frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}\right|.$$

Daraus folgt dann

$$\left|\frac{P}{Q}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| = \left|\left(\xi_0-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right)-\left(\xi_0-\frac{P}{Q}\right)\right|$$
$$\leqq \left|\xi_0-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| + \left|\xi_0-\frac{P}{Q}\right|$$
$$\leqq \left|\xi_0-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| + \left|\xi_0-\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}\right|$$
$$= \left|\left(\xi_0-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right)-\left(\xi_0-\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}\right)\right|,$$

letzteres, weil ja die beiden Klammergrößen von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Hier kann nicht beidemal Gleichheit eintreten. Denn beim erstenmal müßte ξ_0 zwischen $\frac{P}{Q}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ liegen; beim zweitenmal aber müßte $\frac{P}{Q}$ ebenso nahe an ξ_0 liegen wie $\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}$, also auf der andern Seite, und folglich auf der gleichen Seite wie $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$. Es ist also schließlich

$$\left|\frac{P}{Q}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| < \left|\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| = \frac{1}{B_{\nu-1}(cB_{\nu-1}+B_{\nu-2})},$$

oder, indem man mit $QB_{\nu-1}$ multipliziert,

$$|PB_{\nu-1}-QA_{\nu-1}| < \frac{Q}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}.$$

Wenn nun $\frac{P}{Q}$ von $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ verschieden, so ist $|PB_{\nu-1}-QA_{\nu-1}|$ eine **positive** ganze Zahl, also mindestens gleich 1, und aus der letzten Ungleichung folgt daher $Q > cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}$. Ist aber $\frac{P}{Q}=\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$, so darf man diesen Schluß nicht ziehen; somit ergibt sich

Satz 19. *Jeder Bruch, der näher oder ebenso nahe an ξ_0 liegt als die zwischen die Näherungsbrüche $(\nu-2)^{\text{ter}}$ und ν^{ter} Ordnung eingeschaltete Näherung*

$$\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}},$$

hat einen größeren Nenner als diese; eine Ausnahme bildet allenfalls der Näherungsbruch $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$. (*Bruno* 1.)

Da die Zahlen (4) von entgegengesetztem Zeichen sind, so kann $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ niemals zwischen ξ_0 und $\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}$ liegen; aus Satz 19 ist daher zu schließen:

Satz 20. *Jeder Bruch, der zwischen ξ_0 und einem Haupt- oder Nebennäherungsbruch liegt, hat einen größeren Nenner als dieser.* (*Lagrange* 7.)

Für die Hauptnäherungsbrüche ist diese Tatsache übrigens auch schon in Satz 18 enthalten. Von größter Wichtigkeit ist nun der Umstand, daß die in Satz 20 angegebene Eigenschaft die „Näherungen" völlig charakterisiert. Wir beweisen nämlich jetzt die Umkehrung von Satz 20:

Satz 21. *Wenn ein Bruch $\frac{P}{Q}$ von der Art ist, daß jeder zwischen ξ_0 und $\frac{P}{Q}$ fallende Bruch einen Nenner hat, der größer als Q, dann ist $\frac{P}{Q}$ einem Haupt- oder Nebennäherungsbruch von ξ_0 gleich.*

Beweis. Wenn $\frac{P}{Q}$ keiner Näherung gleich ist, also weder der Serie (2) noch (3) angehört, so sind zunächst die Fälle $\frac{P}{Q} < \xi_0$ und $\frac{P}{Q} > \xi_0$ zu unterscheiden. Für $\frac{P}{Q} < \xi_0$ muß $\frac{P}{Q}$ entweder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brüchen der Serie (2) liegen, oder aber kleiner als der erste sein: $\frac{P}{Q} < \frac{A_0}{B_0}$. Für $\frac{P}{Q} > \xi_0$ dagegen muß $\frac{P}{Q}$ entweder zwischen zwei aufeinanderfolgenden Brüchen der Serie (3) liegen, oder aber größer als der erste sein: $\frac{P}{Q} > \frac{A_0 + A_{-1}}{B_0 + B_{-1}}$. Wenn nun eine der Ungleichungen

$$\frac{P}{Q} < \frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1} \quad \text{oder} \quad \frac{P}{Q} > \frac{A_0 + A_{-1}}{B_0 + B_{-1}} = \frac{b_0 + 1}{1}$$

vorliegt, so gibt es einen zwischen ξ_0 und $\frac{P}{Q}$ liegenden Bruch mit dem Nenner 1, nämlich $\frac{b_0}{1}$ bzw. $\frac{b_0+1}{1}$; daher erfüllt $\frac{P}{Q}$ nicht die Voraussetzung von Satz 21. Wenn dagegen $\frac{P}{Q}$ zwischen zwei Zahlen der Reihe (2) oder der Reihe (3) fällt, so gelten im ersten Fall die Ungleichungen

$$\frac{(c-1)A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{(c-1)B_{\nu-1} + B_{\nu-2}} < \frac{P}{Q} < \frac{cA_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1} + B_{\nu-2}} < \xi_0$$

für ein gewisses ν und c, im zweiten die entgegengesetzten. Beidemal liegt also einerseits der Bruch $\frac{cA_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1} + B_{\nu-2}}$ zwischen ξ_0 und $\frac{P}{Q}$; anderseits ist aber auch

$$0 < \left|\frac{P}{Q} - \frac{(c-1)A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{(c-1)B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}\right| < \left|\frac{cA_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1} + B_{\nu-2}} - \frac{(c-1)A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{(c-1)B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}\right|$$

$$= \frac{1}{(cB_{\nu-1} + B_{\nu-2})((c-1)B_{\nu-1} + B_{\nu-2})},$$

also, indem man mit $Q((c-1)B_{\nu-1}+B_{\nu-2})$ multipliziert:

$$0<|P((c-1)B_{\nu-1}+B_{\nu-2})-Q((c-1)A_{\nu-1}+A_{\nu-2})|<\frac{Q}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}.$$

Hieraus folgt wieder, da das Mittelglied als positive ganze Zahl mindestens gleich 1 ist:

$$Q>cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}.$$

Der zwischen ξ_0 und $\frac{P}{Q}$ gelegene Bruch $\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}$ hat also einen Nenner kleiner als Q. Daher erfüllt $\frac{P}{Q}$ wieder nicht unsere Voraussetzung, womit Satz 21 bewiesen ist.[1])

II. Aus Satz 21 ergibt sich nun, daß insbesondere jeder Bruch, der eine „beste Näherung“ ist, ein Haupt- oder Nebennäherungsbruch sein muß. Die Hauptnäherungsbrüche sind nach Satz 18 auch wirklich beste Näherungen (wenigstens von der ersten Ordnung an); wir untersuchen jetzt noch, inwieweit auch die Nebennäherungsbrüche das gleiche leisten. Dazu gibt Satz 19 uns die Mittel in die Hand. Dieser lehrt nämlich, daß der Nebennäherungsbruch $\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}$ dann und nur dann eine beste Näherung sein wird, wenn er näher bei ξ_0 liegt als der Bruch $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$, wenn also

$$\left|\xi_0-\frac{cA_{\nu-1}+A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}\right|<\left|\xi_0-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|$$

ist. Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$\frac{|c(B_{\nu-1}\xi_0-A_{\nu-1})+B_{\nu-2}\xi_0-A_{\nu-2}|}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}<\frac{|B_{\nu-1}\xi_0-A_{\nu-1}|}{B_{\nu-1}};$$

da aber nach der allgemein gültigen Formel (4) des § 13

$$-\frac{B_{\nu-2}\xi_0-A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_0-A_{\nu-1}}=\xi_\nu$$

ist, so besagt dies soviel wie

$$\frac{|(c-\xi_\nu)(B_{\nu-1}\xi_0-A_{\nu-1})|}{cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}}<\frac{|B_{\nu-1}\xi_0-A_{\nu-1}|}{B_{\nu-1}},$$

oder also

$$|\xi_\nu-c|\,B_{\nu-1}<cB_{\nu-1}+B_{\nu-2}.$$

1) Die Sätze 20 und 21 werden sehr hübsch durch die Kleinschen Umrißpolygone veranschaulicht; indes wollen wir auf diese geometrische Interpretation der regelmäßigen Kettenbrüche, welche von der allgemeinen Theorie ziemlich abseits steht, nicht eingehen. Man vergleiche die Note *Klein* 1, sowie die ausführlichere Darstellung bei *Klein* 2.

Nun ist $c < b_\nu \leqq \xi_\nu$, so daß man auf der linken Seite dieser Ungleichung die Absolutstriche weglassen kann; es kommt dann schließlich

$$2cB_{\nu-1} + B_{\nu-2} > \xi_\nu B_{\nu-1}.$$

Diese notwendige und hinreichende Bedingung ist nun gewiß erfüllt, wenn $2c \geqq b_\nu + 1$ ist; dann wird nämlich

$$2cB_{\nu-1} + B_{\nu-2} \geqq (b_\nu + 1)B_{\nu-1} > \xi_\nu B_{\nu-1}.$$

Die Bedingung ist dagegen nicht erfüllt, wenn $2c \leqq b_\nu - 1$ ist; dann wird nämlich

$$2cB_{\nu-1} + B_{\nu-2} \leqq (b_\nu - 1)B_{\nu-1} + B_{\nu-1} = b_\nu B_{\nu-1} \leqq \xi_\nu B_{\nu-1}.$$

Unentschieden ist also nur noch der Fall $2c = b_\nu$; in diesem lautet die Bedingung:

$$b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} > \xi_\nu B_{\nu-1},$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > \xi_\nu,$$

und indem man beide Seiten in Kettenbrüche entwickelt,

$$[b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots, b_2, b_1] > [b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots].$$

Ob diese Bedingung erfüllt ist oder nicht, läßt sich aber nach Satz 7 und 8 in jedem Fall sofort entscheiden. Wir erhalten so

Satz 22. *Der Nebennäherungsbruch* $\dfrac{cA_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1} + B_{\nu-2}}$ *ist dann und nur dann eine „beste Näherung", wenn* $2c > b_\nu$ *oder auch wenn* $2c = b_\nu$ *und zugleich* $[b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots, b_2, b_1] > [b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots]$ *ist. Dagegen liegt für* $2c < b_\nu$ *niemals eine beste Näherung vor.*

Man sieht so, daß von den zwischen $\dfrac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$ und $\dfrac{A_\nu}{B_\nu}$ eingeschalteten Nebennäherungsbrüchen

$$\frac{A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}, \frac{2A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{2B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}, \ldots, \frac{(b_\nu - 1)A_{\nu-1} + A_{\nu-2}}{(b_\nu - 1)B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}$$

immer nur die zweite Hälfte beste Näherungen gibt, die erste Hälfte nicht. Ist die Anzahl $b_\nu - 1$ ungerade, so wird der mittlere Bruch eine beste Näherung sein oder nicht, je nachdem $[b_\nu, b_{\nu-1}, \ldots, b_2, b_1] > [b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots]$ ist oder nicht. Danach ist es nun leicht, die sämtlichen besten Näherungen der Reihe nach anzuschreiben, so zwar, daß jeder folgende Bruch näher bei ξ_0 liegt als ein vorausgehender. Die Brüche sind dann ganz von selbst auch nach wachsendem Nenner geordnet; sie werden teils größer, teils kleiner sein als ξ_0, und zwar findet der Übergang von größeren zu kleineren und umgekehrt

jedesmal nach einem Hauptnäherungsbruch statt. Sind $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{S}$ zwei aufeinander folgende Brüche dieser Reihe, so ist unter allen Brüchen, die näher an ξ_0 liegen wie $\frac{P}{Q}$, gerade $\frac{R}{S}$ der mit dem kleinsten Nenner.

III. Wir wollen diese Verhältnisse an dem Beispiel der Ludolphschen Zahl illustrieren. Auf S. 41 fanden wir

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \ldots].$$

Die Hauptnäherungsbrüche sind daher:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \ldots,$$

während die Nebennäherungsbrüche die Gestalt haben:

$$\frac{3c+1}{c}, \quad \frac{22c'+3}{7c'+1}, \quad \frac{355c'''+333}{113c'''+106}, \ldots$$
$$1 \leqq c \leqq 6 \quad 1 \leqq c' \leqq 14 \quad 1 \leqq c''' \leqq 291$$

Die Brüche der Form $\frac{333c''+22}{106c''+7}$ fallen aus, weil $b_3 = 1$ ist, also schon für $c'' = 1$ der nächste Hauptnäherungsbruch zum Vorschein kommt. Die Nebennäherungsbrüche sind „beste Näherungen" für

$c = 4, 5, 6$; also $\frac{13}{4}, \frac{16}{5}, \frac{19}{6}$,

$c' = 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$; also $\frac{179}{57}, \frac{201}{64}, \frac{223}{71}, \frac{245}{78}, \frac{267}{85}, \frac{289}{92}, \frac{311}{99}$,

$c''' = 147, 148, \ldots$, also $\frac{52518}{16717}, \frac{52873}{16830}, \ldots$

Ob auch schon der Wert $c''' = 146$ eine beste Näherung gibt, hängt davon ab, ob die Ungleichung

$$[b_4, b_3, b_2, b_1] > [b_4, b_5, b_6, \ldots]$$

erfüllt ist; diese wird aber: $[292, 1, 15, 7] > [292, 1, 1, \ldots]$, ist also nach Satz 8 in der Tat erfüllt; daher ist auch schon der für $c''' = 146$ entstehende Bruch $\frac{52163}{16604}$ eine beste Näherung. Hiernach sind nun die besten Näherungen der Reihe nach

$$\underline{\frac{3}{1}}, \overline{\frac{13}{4}}, \overline{\frac{16}{5}}, \overline{\frac{19}{6}}, \overline{\frac{22}{7}}, \underline{\frac{179}{57}}, \underline{\frac{201}{64}}, \underline{\frac{223}{71}}, \underline{\frac{245}{78}}, \underline{\frac{267}{85}}, \underline{\frac{289}{92}}, \underline{\frac{311}{99}},$$
$$\underline{\frac{333}{106}}, \overline{\frac{355}{113}}, \underline{\frac{52163}{16604}}, \underline{\frac{52518}{16717}}, \underline{\frac{52873}{16830}}, \ldots,$$

wobei wir diejenigen Brüche, die kleiner sind als π, unterstrichen, die größeren überstrichen haben. Eine Tabelle sämtlicher Haupt- und Nebennäherungsbrüche, die aus den 34 ersten Teilnennern hervorgehen, hat

Wallis 2a berechnet. Unter diesen Brüchen fällt $\frac{22}{7}$ als eine besonders günstige Näherung auf; denn um dem wahren Wert π noch näher zu kommen, muß man den Nenner ganz erheblich, von 7 bis auf 57, vergrößern. Vor allem aber ist $\frac{355}{113}$ eine vorzügliche Näherung; hier ist der Nenner noch nicht sehr groß; aber um dem wahren Wert noch näher zu kommen, müßte man die enorme Vergrößerung des Nenners bis auf 16604 in Kauf nehmen, und selbst dann wäre der Gewinn nur äußerst gering; der Fehler würde nämlich, wie die unten stehende Tabelle zeigt, nur um etwa 2‰ verkleinert. Dagegen ist der Bruch $\frac{333}{106}$, obwohl in unserem Sinn eine „beste Näherung“ und sogar ein Hauptnäherungsbruch, ziemlich ungünstig. Denn durch eine nur mäßige Erhöhung des Nenners auf 113 wird der Fehler schon bedeutend verkleinert. So erkennt man, daß die besonders günstigen Näherungen allemal dann zum Vorschein kommen, wenn große Teilnenner auftreten, hier 15 und 292.

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857, \qquad \text{Fehler } \pi - \frac{22}{7} = -0{,}001;$$

$$\frac{223}{71} = 3{,}140845, \qquad \text{Fehler} = +0{,}0007;$$

$$\frac{333}{106} = 3{,}1415094, \qquad \text{Fehler} = +0{,}00008;$$

$$\frac{355}{113} = 3{,}14159292035, \qquad \text{Fehler} = -0{,}00000026676;$$

$$\frac{52163}{16604} = 3{,}141592387376, \qquad \text{Fehler} = +0{,}00000026621.$$

Interessant ist, daß einige von diesen Brüchen als gute Approximationen von π längst bekannt waren, ehe man sich mit Kettenbrüchen beschäftigte. *Archimedes* fand, daß π zwischen $\frac{22}{7}$ und $\frac{223}{71}$ liegt; aus diesem Grunde wurde gerade der Bruch $\frac{223}{71}$ in die obige Fehlertabelle aufgenommen. Die beiden Brüche $\frac{333}{106}$ und $\frac{355}{113}$ kennt *Adrianus Metius* (1571—1635), und ums Jahr 1700 war der Wert $\frac{355}{113}$ sogar in Japan bekannt.[1])

---

1) Nach *Hayashi* 1. Das Verfahren, durch welches die Japaner diesen Näherungsbruch fanden, ist kaum mehr als eine hübsche Spielerei. Geradezu staunen muß man aber über Hayashis Angabe, daß im Jahr 1766 die beiden Brüche

$$\frac{5419351}{1725033}, \quad \frac{428224593349304}{136308121570117}$$

als gute Näherungen von π in Japan entdeckt wurden. Wie der erwähnten Wallisschen Tabelle zu entnehmen ist, sind das nämlich in der Tat Hauptnäherungsbrüche, und zwar diejenigen, welche den ziemlich großen Teilnennern 14 und 13

Die „besten Näherungen“ haben durch die Erfindung der Dezimalbrüche natürlich bedeutend von dem Wert verloren, der ihnen sonst für die Praxis des numerischen Rechnens zukommen würde. Daß sie aber trotz der Dezimalbrüche noch immer recht nützlich sind, zeigt zum Beispiel das Problem, durch welches *Huygens* 1 zur Erfindung der regelmäßigen Kettenbrüche angeregt wurde. Bei der Konstruktion eines Planetariums sah er sich nämlich der Aufgabe gegenüber, zwei ineinander greifende Zahnräder zu konstruieren, deren Umlaufszeiten sich verhalten sollen wie zwei der Beobachtung entnommene große ganze Zahlen $a:b$. Um das exakt zu erreichen, müßte man dem einen Rad a, dem andern b Zähne aufsetzen. Dies ist aber, wenn a, b sehr groß sind, praktisch nicht mehr ausführbar, und es handelt sich dann darum, das Verhältnis $a:b$ möglichst angenähert durch kleinere Zahlen auszudrücken, und zwar so, daß durch noch kleinere Zahlen eine bessere Annäherung nicht mehr möglich ist (sonst würde man eben die kleineren vorziehen). Huygens fand nun, daß man zu diesem Zweck $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch entwickeln muß, und daß stets die Haupt- sowie die eine Hälfte der Nebennäherungsbrüche die Aufgabe lösen. Somit ist der wesentliche Inhalt der Sätze 18 und 22 schon Huygens bekannt, wenn auch von einer Beweisführung im modernen Sinn natürlich keine Rede ist. Vollständig bewiesen, auch unter Berücksichtigung des Falles $2c=b_\nu$, wurde Satz 22 von *H. J. Stephen Smith* 1.

§ 17. Äquivalente Zahlen.

Definition. *Zwei irrationale Zahlen β, γ heißen miteinander äquivalent, wenn zwischen ihnen eine Gleichung der Form besteht*

$$\gamma = \frac{a\beta + b}{c\beta + d},$$

wo a, b, c, d ganze Zahlen sind, für die $ad - bc = \pm 1$ ist.

Indem man speziell $a = -1$, $c = 0$, $d = 1$ wählt, sieht man, daß insbesondere zwei irrationale Zahlen mit ganzzahliger Summe äquivalent sind. Ferner gilt der folgende Satz, dessen Beweis wir wohl dem Leser überlassen dürfen:

„Sind zwei Zahlen mit der gleichen dritten äquivalent, so sind sie auch miteinander äquivalent.“

vorausgehen (siehe die Fußnote S. 42). Es läßt sich schwer begreifen, wie man ohne ein kettenbruchähnliches Verfahren diese außerordentlich genauen „besten Näherungen“ herausbekommen kann. Zugleich ist aber damit doch eine gewisse Kontrolle für die Richtigkeit der Wallisschen Rechnung gegeben, im Gegensatz zu der Lambertschen abweichenden Rechnung.

Nun seien ξ_0, η_0 zwei irrationale Zahlen, deren regelmäßige Kettenbruchentwicklungen

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, g_0, g_1, g_2, \ldots],$$
$$\eta_0 = [d_0, d_1, \ldots, d_{m-1}, g_0, g_1, g_2, \ldots]$$

vom Teilnenner g_0 an übereinstimmen. Bezeichnet man die Näherungszähler und -Nenner des ersten Kettenbruches wie immer mit A_ν, B_ν, die des zweiten mit C_ν, D_ν und setzt noch

$$[g_0, g_1, g_2, \ldots] = \omega,$$

so ist

$$\xi_0 = \frac{A_{n-1}\omega + A_{n-2}}{B_{n-1}\omega + B_{n-2}}, \quad \eta_0 = \frac{C_{m-1}\omega + C_{m-2}}{D_{m-1}\omega + D_{m-2}}.$$

Demnach ist sowohl ξ_0 als η_0 mit ω äquivalent, so daß also ξ_0, η_0 auch miteinander äquivalent sind.

Wir nehmen jetzt umgekehrt an, daß zwei irrationale Zahlen ξ_0, η_0 miteinander äquivalent seien; also

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d}, \tag{1}$$

$$ad - bc = \pm 1. \tag{2}$$

Es läßt sich dann zeigen, daß die regelmäßigen Kettenbrüche für ξ_0 und η_0 von einer gewissen Stelle an miteinander übereinstimmen. Beim Beweis wollen wir die Zahl $c\xi_0 + d$ als positiv voraussetzen; dies läßt sich nötigenfalls dadurch erreichen, daß a, b, c, d durch $-a, -b, -c, -d$ ersetzt werden, was ohne Schaden geschehen kann. Nun sei in gewohnter Bezeichnung

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\nu-1}, \xi_\nu],$$

also

$$\xi_0 = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}}, \tag{3}$$

wo ξ_ν als vollständiger Quotient natürlich größer als 1 ist; für die zunächst beliebige Zahl ν behalten wir uns eine geeignete Wahl noch vor.

Aus der vorausgesetzten Gleichung (1) folgt nun, indem man für ξ_0 den Wert aus (3) einsetzt:

$$\eta_0 = \frac{P\xi_\nu + R}{Q\xi_\nu + S}, \tag{4}$$

wobei wir der Kürze halber

$$aA_{\nu-1} + bB_{\nu-1} = P, \quad aA_{\nu-2} + bB_{\nu-2} = R,$$
$$cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1} = Q, \quad cA_{\nu-2} + dB_{\nu-2} = S$$

gesetzt haben. Natürlich sind P, Q, R, S ganze Zahlen, und außerdem besteht die Gleichung

$$PS - QR = (ad - bc)(A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1}) = \pm 1.$$

Nun ist nach dem Näherungsgesetz (§ 13, Formel (11))

$$A_{\nu-1} = \xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}, \quad A_{\nu-2} = \xi_0 B_{\nu-2} + \frac{\delta'}{B_{\nu-2}},$$

wo δ, δ' absolut kleiner als 1 sind. Folglich wird, wenn man dies in die obigen Ausdrücke für P, Q, R, S einführt:

$$P = (a\xi_0 + b)B_{\nu-1} + \frac{a\delta}{B_{\nu-1}}, \quad R = (a\xi_0 + b)B_{\nu-2} + \frac{a\delta'}{B_{\nu-2}},$$

$$Q = (c\xi_0 + d)B_{\nu-1} + \frac{c\delta}{B_{\nu-1}}, \quad S = (c\xi_0 + d)B_{\nu-2} + \frac{c\delta'}{B_{\nu-2}}.$$

Da wir $c\xi_0 + d$ positiv gewählt haben, so werden also für hinlänglich große Werte von ν auch Q, S positiv und außerdem $Q > S$. Dann folgt aber aus (4) mit Hilfe von Satz 13, daß $\frac{R}{S}, \frac{P}{Q}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von η_0 sind, und daß ξ_ν der zugehörige vollständige Quotient ist. Man hat also

$$\eta_0 = [d_0, d_1, \ldots, d_{\mu-1}, \xi_\nu] = [d_0, d_1, \ldots, d_{\mu-1}, b_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots],$$

und damit ist bewiesen:

Satz 23. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die regelmäßigen Kettenbrüche für zwei irrationale Zahlen ξ_0, η_0 von einem gewissen Teilnenner an übereinstimmen, besteht in der Äquivalenz der Zahlen ξ_0, η_0.* (*Serret* **1.**)

Beispiel: Die Zahlen ξ_0 und $-\xi_0$ sind äquivalent (sie haben eine ganzzahlige Summe). Setzt man

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots],$$

so ist auch in der Tat

$$-\xi_0 = \begin{cases} [-(b_0+1), 1, b_1 - 1, b_2, b_3, \ldots] & \text{für } b_1 > 1, \\ [-(b_0+1), b_2 + 1, b_3, b_4, \ldots] & \text{für } b_1 = 1, \end{cases}$$

wie der Leser leicht verifizieren wird.

§ 18. Eine Anwendung.

Bereits in § 11 wurde der Satz bewiesen, daß eine Zahl der Form $a^2 + b^2$, wo a und b relativ prim, nur Teiler von der gleichen Form haben kann (Satz 5). Eine analoge Eigenschaft kommt aber noch einigen anderen Zahlformen zu, wie sich ebenfalls mit Hilfe von Kettenbrüchen beweisen läßt.

Satz 24. *Eine Zahl der Form $a^2 + 2\varepsilon b^2$, wo a, b relativ prim, und $\varepsilon = \pm 1$, hat nur Teiler der gleichen Form $\alpha^2 + 2\varepsilon\beta^2$.* (*Lagrange* **4.**)

Satz 25. *Jeder ungerade Teiler einer Zahl der Form a^2+3b^2, wo a, b relativ prim, ist wieder von der Form $\alpha^2+3\beta^2$.* (*Lagrange* 4.)

Beweis (nach *Lucas* 1): Wenn λ eine der Zahlen 2ε oder 3 bedeutet, so ist jeder Teiler von $a^2+\lambda b^2$ zugleich auch Teiler von

$$(a^2+\lambda b^2)(x^2+\lambda y^2) = (ax+\lambda by)^2+\lambda(ay-bx)^2.$$

Bei relativ primen a, b kann man aber nach § 10 x, y so wählen, daß $ay-bx=1$ ist; also genügt es, die beiden Sätze für Zahlen der Form $m^2+\lambda$ zu beweisen.

Sei daher n ein (positiver) Teiler von $m^2+\lambda$. Sollte $n=1$ oder $\lambda|$ sein, so ist durch die Formeln

$$1=1^2+\lambda\cdot 0^2,\quad 2=0^2+2\cdot 1^2=2^2-2\cdot 1^2,\quad 3=0^2+3\cdot 1^2$$

die Sache erledigt; sei also n von 1 und $|\lambda|$ verschieden. Dann ist der Bruch $\frac{m}{n}$ gewiß irreduzibel. Unter seinen Näherungsbrüchen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ gibt es, weil $n>1$ ist, sicher solche, für die $B_\nu^2<n$; denn mindestens $\frac{A_0}{B_0}$ hat diese Eigenschaft. Da $\frac{m}{n}$ irreduzibel, so gibt es aber auch solche, bei denen $B_\nu^2>n$ ist; denn mindestens der letzte Näherungsbruch hat diese Eigenschaft. Sei daher $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ derjenige sicher existierende und eindeutig bestimmte Näherungsbruch, für welchen

$$B_\nu^2<n\leqq B_{\nu+1}^2 \tag{1}$$

wird. Nach dem Näherungsgesetz (Satz 10) ist

$$0<\left(\frac{A_\nu}{B_\nu}-\frac{m}{n}\right)^2\leqq\left(\frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}}\right)^2.$$

Daher, wenn man mit nB_ν^2 multipliziert:

$$0<\frac{1}{n}(nA_\nu-mB_\nu)^2\leqq\frac{n}{B_{\nu+1}^2}.$$

Addiert man hierzu die Zahl $\frac{\lambda}{n}B_\nu^2$, so kommt

$$\frac{\lambda}{n}B_\nu^2<nA_\nu^2-2mA_\nu B_\nu+\frac{m^2+\lambda}{n}B_\nu^2\leqq\frac{n}{B_{\nu+1}^2}+\lambda\frac{B_\nu^2}{n}. \tag{2}$$

Daraus folgt aber mit Rücksicht auf (1), wenn $\lambda=2, 3$ ist:

$$0<nA_\nu^2-2mA_\nu B_\nu+\frac{m^2+\lambda}{n}B_\nu^2<1+\lambda; \tag{3a}$$

dagegen, wenn $\lambda=-2$ ist:

$$-2<nA_\nu^2-2mA_\nu B_\nu+\frac{m^2+\lambda}{n}B_\nu^2<1. \tag{3b}$$

In diesen Ungleichungen steht nun, weil $m^2 + \lambda$ nach Voraussetzung durch n teilbar ist, in der Mitte eine ganze Zahl; diese kann daher für $\lambda = 2, 3$ nur einen der Werte $1, 2, \lambda$, für $\lambda = -2$ nur einen der Werte $-1, 0$ haben. Multipliziert man dann noch mit n, so kommt:

(4) für $\lambda = 2$: $(nA_\nu - mB_\nu)^2 + 2B_\nu^2 = n$ oder $2n$,

(5) für $\lambda = -2$: $(nA_\nu - mB_\nu)^2 - 2B_\nu^2 = -n$ oder 0,

(6) für $\lambda = 3$: $(nA_\nu - mB_\nu)^2 + 3B_\nu^2 = n$ oder $2n$ oder $3n$.

Im Fall $\lambda = 2$ ergeben sich daher die beiden Möglichkeiten

$$n = (nA_\nu - mB_\nu)^2 + 2B_\nu^2$$

oder

$$n = B_\nu^2 + 2\left(\frac{nA_\nu - mB_\nu}{2}\right)^2,$$

so daß n in der Tat die Form $\alpha^2 + 2\beta^2$ hat.[1])

Im Fall $\lambda = -2$ ist in Gleichung (5) die Null unmöglich, weil sonst 2 ein Quadrat sein müßte; es bleibt also

$$n = 2B_\nu^2 - (nA_\nu - mB_\nu)^2.$$

Da aber die rechte Seite identisch gleich

$$(2B_\nu + nA_\nu - mB_\nu)^2 - 2(B_\nu + nA_\nu - mB_\nu)^2$$

ist, so ist damit auch dieser Fall erledigt.

Endlich im Fall $\lambda = 3$ ist bei ungeradem n die Gleichung

$$(nA_\nu - mB_\nu)^2 + 3B_\nu^2 = 2n$$

nicht möglich, weil die rechte Seite $\equiv 2 \pmod 4$ ist, während die linke offenbar nur $\equiv 0, \pm 1$ sein kann. Es bleiben also nach (6) nur die Möglichkeiten

$$n = (nA_\nu - mB_\nu)^2 + 3B_\nu^2$$

oder

$$n = B_\nu^2 + 3\left(\frac{nA_\nu - mB_\nu}{3}\right)^2,$$

womit auch Satz 25 vollständig bewiesen ist.

---

1) Man sieht auch leicht, worauf es uns aber nicht ankommt, daß α, β relativ prim sind; ebenso auch in den Fällen $\lambda = -2$ und $\lambda = 3$.

Drittes Kapitel.

Regelmäßige periodische Kettenbrüche.

§ 19. Rein- und gemischtperiodische Kettenbrüche.

I. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit unendlichen regelmäßigen Kettenbrüchen, deren Teilnenner ein bemerkenswertes Bildungsgesetz befolgen. Der einfachste Spezialfall, den wir vorausschicken wollen, besteht darin, daß alle Teilnenner einander gleich sind. Ein solcher Kettenbruch hat die Gestalt

$$\xi_0 = [b, b, b, \ldots],$$

und sein Wert läßt sich leicht in geschlossener Form angeben auf dem gleichen Weg, den wir schon in § 14, II bei dem Fall $b = 1$ eingeschlagen haben. Es ist nämlich auch, wenn ξ_1 unsere gewohnte Bedeutung hat,

$$\xi_1 = [b, b, b, \ldots] = \xi_0.$$

Anderseits aber $\xi_0 = b + \frac{1}{\xi_1}$, so daß ξ_0 eine Wurzel der Gleichung

$$x = b + \frac{1}{x}$$

oder

$$x^2 - bx - 1 = 0$$

sein muß. Man erhält daher

$$\xi_0 = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2},$$

und zwar ist das Vorzeichen der Wurzel positiv zu nehmen, weil ja $\xi_0 > b$, also positiv ist.

Der soeben behandelte Kettenbruch ist ein Spezialfall des folgenden allgemeineren:

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \ldots],$$

bei dem die Teilnenner $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ sich in unendlicher Folge „periodisch" wiederholen; ein solcher Kettenbruch ist also dadurch charakterisiert, daß stets

$$b_{k+\nu} = b_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Er heißt periodisch, und zwar speziell reinperiodisch; die

Zahlenfolge $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ heißt die Periode. Wir schreiben einen solchen Kettenbruch in der Form

$$\xi_0 = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}];$$

sein Anfangsglied b_0 ist positiv, da es auch an einer späteren Stelle wieder vorkommt ($b_0 = b_k$); daher sind nicht nur die Näherungsnenner B_ν, sondern auch die Näherungszähler A_ν positiv. Der Wert eines reinperiodischen Kettenbruches kann wieder leicht berechnet werden; denn es ist jetzt

$$\xi_0 = \xi_k = \xi_{2k} = \xi_{3k} = \cdots$$

Daher ergibt sich aus der Gleichung

$$\xi_0 = \frac{A_{k-1}\xi_k + A_{k-2}}{B_{k-1}\xi_k + B_{k-2}}$$

für ξ_0 die quadratische Gleichung

$$x = \frac{A_{k-1}x + A_{k-2}}{B_{k-1}x + B_{k-2}},$$

oder also

$$B_{k-1}x^2 + (B_{k-2} - A_{k-1})x - A_{k-2} = 0. \tag{1}$$

Diese Gleichung hat eine positive und eine negative Wurzel; da aber $\xi_0 > b_0$, also positiv ist, so folgt durch Auflösung:

$$\xi_0 = \frac{A_{k-1} - B_{k-2} + \sqrt{(A_{k-1} - B_{k-2})^2 + 4B_{k-1}A_{k-2}}}{2B_{k-1}},$$

wo die Quadratwurzel wieder positiv zu nehmen ist. Da ξ_0 als unendlicher Kettenbruch irrational ist, so kann der Radikand unmöglich ein Quadrat sein. Man erkennt dies auch durch Rechnung, indem man ihm die Form gibt:

$$\begin{aligned}(A_{k-1} + B_{k-2})^2 &+ 4(B_{k-1}A_{k-2} - B_{k-2}A_{k-1}) \\ &= (A_{k-1} + B_{k-2})^2 + 4(-1)^{k-1}.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wäre aber offenbar nur dann ein Quadrat, und zwar Null, wenn k gerade und $A_{k-1} + B_{k-2} = 2$ wäre; aber für gerade k ist stets

$$A_{k-1} + B_{k-2} \geqq A_1 + B_0 = b_0 b_1 + 1 + 1 > 2.$$

Wir haben bis jetzt bloß von der Gleichheit $\xi_0 = \xi_k$ Gebrauch gemacht; es ist aber auch, wie schon erwähnt, $\xi_0 = \xi_{nk}$. Wir dürfen daher in unserem ganzen Räsonnement k auch durch nk ersetzen und erhalten so für ξ_0 noch die unendlich vielen quadratischen Gleichungen

$$B_{nk-1}x^2 + (B_{nk-2} - A_{nk-1})x - A_{nk-2} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

die natürlich, weil ξ_0 eine eindeutig bestimmte irrationale Zahl ist, alle

miteinander identisch sein müssen. Wir wollen dies a priori klare Resultat auch durch Rechnung bestätigen; dazu ist nur nachzuweisen, daß die Koeffizienten der Gleichung sich proportional bleiben, wenn man die Zahl n durch irgendeine andere m ersetzt, daß also die Gleichungen

$$B_{nk-1}A_{mk-2} - A_{nk-2}B_{mk-1} = 0,$$
$$B_{nk-1}(B_{mk-2} - A_{mk-1}) - (B_{nk-2} - A_{nk-1})B_{mk-1} = 0,$$
$$A_{nk-2}(B_{mk-2} - A_{mk-1}) - (B_{nk-2} - A_{nk-1})A_{mk-2} = 0$$

bestehen. Diese folgen aber in der Tat aus der Periodizität, durch welche nämlich bewirkt wird, daß bei der Bezeichnung des § 5, II

$$A_\nu = A_{\nu,k} = A_{\nu,2k} = A_{\nu,3k} = \cdots,$$
$$B_\nu = B_{\nu,k} = B_{\nu,2k} = B_{\nu,3k} = \cdots,$$

ist, weil ja die b_ν unverändert bleiben, wenn man ihren Index um k erhöht. Daher ergibt sich aus den Fundamentalformeln, angewandt für den Wert $\lambda = nk$:

$$A_{\nu+nk-1} = A_{nk-1}A_{\nu-1} + A_{nk-2}B_{\nu-1},$$
$$B_{\nu+nk-1} = B_{nk-1}A_{\nu-1} + B_{nk-2}B_{\nu-1}.$$

Setzt man hier für ν speziell den Wert mk, sodann auch $mk - 1$, so bleiben die linken Seiten bei Vertauschung von n und m jedesmal ungeändert; es müssen also auch die rechten Seiten ungeändert bleiben. Daraus folgt

$$A_{(n+m)k-1} = A_{nk-1}A_{mk-1} + A_{nk-2}B_{mk-1} = A_{mk-1}A_{nk-1} + A_{mk-2}B_{nk-1},$$
$$B_{(n+m)k-1} = B_{nk-1}A_{mk-1} + B_{nk-2}B_{mk-1} = B_{mk-1}A_{nk-1} + B_{mk-2}B_{nk-1},$$
$$A_{(n+m)k-2} = A_{nk-1}A_{mk-2} + A_{nk-2}B_{mk-2} = A_{mk-1}A_{nk-2} + A_{mk-2}B_{nk-2},$$
$$B_{(n+m)k-2} = B_{nk-1}A_{mk-2} + B_{nk-2}B_{mk-2} = B_{mk-1}A_{nk-2} + B_{mk-2}B_{nk-2}.$$

Dies sind aber gerade die zu beweisenden Gleichungen, wie sich durch etwas andere Zusammenfassung ihrer Terme sofort ergibt.

II. Eine noch etwas allgemeinere Klasse von Kettenbrüchen erhält man, wenn man die Periode nicht schon beim Anfangsglied b_0, sondern etwa erst bei b_h beginnen läßt, so daß die Gleichung $b_{k+\nu} = b_\nu$ erst von $\nu = h$ an erfüllt ist. Derartige periodische Kettenbrüche, bei denen nun auch wieder $b_0 \leqq 0$ sein darf, haben die Form

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}, b_h, \ldots]$$

und heißen speziell gemischtperiodisch; der Zahlenkomplex b_h, $b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}$ ist wieder die Periode, während der Komplex

$b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}$ als Vorperiode bezeichnet wird. Wir schreiben auch solche Kettenbrüche in abgekürzter Form, indem wir die Periode überstreichen:

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}].$$

Ist $h = 0$, so kommt man auf den früheren Fall der reinen Periodizität zurück.

Auch der Wert eines gemischtperiodischen Kettenbruches läßt sich leicht berechnen. Es ist nämlich in unserer gewohnten Bezeichnung

$$\xi_0 = \frac{A_{h-1}\xi_h + A_{h-2}}{B_{h-1}\xi_h + B_{h-2}}, \tag{3}$$

und offenbar ist ξ_h gleich dem reinperiodischen Kettenbruch

$$\xi_h = [\overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}],$$

den wir bereits berechnen können. Dadurch ist dann auch der Wert von ξ_0 bekannt. Da sich ξ_0 rational durch ξ_h ausdrückt, und ξ_h Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist, so muß auch ξ_0 einer solchen Gleichung genügen, die sich wieder in verschiedenen Gestalten aufstellen läßt. Die einfachste erhält man, wenn man bedenkt, daß $\xi_{h+k} = \xi_h$ ist, so daß die Gleichung besteht:

$$\xi_0 = \frac{A_{h+k-1}\xi_h + A_{h+k-2}}{B_{h+k-1}\xi_h + B_{h+k-2}}. \tag{4}$$

Eliminiert man ξ_h aus (3) und (4), so ergibt sich die gesuchte Gleichung für ξ_0 in der Form:

$$P\xi_0^2 + Q\xi_0 + R = 0, \tag{5}$$

wobei

$$\begin{cases} P = B_{h-2}B_{h+k-1} - B_{h-1}B_{h+k-2}, \\ Q = B_{h-1}A_{h+k-2} + A_{h-1}B_{h+k-2} - A_{h-2}B_{h+k-1} - B_{h-2}A_{h+k-1}, \\ R = A_{h-2}A_{h+k-1} - A_{h-1}A_{h+k-2}. \end{cases} \tag{6}$$

Für $h = 0$ kommt also speziell $P = B_{k-1}$, $Q = B_{k-2} - A_{k-1}$, $R = -A_{k-2}$, in Übereinstimmung mit der für diesen Fall aufgestellten Gleichung (1). Für $h > 0$ ist freilich zunächst einzuwenden, daß vielleicht $P = Q = R = 0$ sein könnte, so daß die quadratische Gleichung eine identische wäre, die zur Berechnung von ξ_0 nichts nützte. Dies ist jedoch nicht möglich; denn wäre $P = 0$, also

$$B_{h-2}B_{h+k-1} = B_{h-1}B_{h+k-2},$$

so wäre die rechte Seite dieser Gleichung durch B_{h+k-1} teilbar. Da aber der Faktor B_{h+k-2} zu B_{h+k-1} relativ prim ist, so müßte der andere Faktor B_{h-1} durch B_{h+k-1} teilbar sein, während doch $B_{h-1} < B_{h+k-1}$ ist.[1])

1) Nur wenn $h = 0$, versagt dieser Schluß, weil $B_{-1} = 0$ ist. Aber dieser Fall ist schon erledigt, da er auf reine Periodizität führt.

Eine Schwierigkeit entsteht nun bei der Frage, welche von den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (5) dem Kettenbruch gleich ist. Dies läßt sich auf zwei Arten entscheiden. Erstens kann man nämlich die quadratische Gleichung für ξ_k aufstellen. Da der Kettenbruch für ξ_k reinperiodisch ist, so hat diese quadratische Gleichung, wie wir wissen, nur eine positive Wurzel, und diese ist ξ_k. Vermöge Gleichung (3) ist dann auch ξ_0 eindeutig bestimmt. Man kann aber zweitens auch an die Gleichung (5) direkt anknüpfen. Es muß nämlich ξ_0 zwischen b_0 und $b_0 + 1$ liegen. Hat nun die Gleichung (5) nur eine Wurzel in diesem Intervall, so muß diese ξ_0 sein. Liegen dagegen beide Wurzeln zwischen b_0 und $b_0 + 1$, so bedenke man, daß ξ_0 auch zwischen $[b_0, b_1]$ und $[b_0, b_1 + 1]$ liegen muß. Wenn also nur eine Wurzel in diesem engeren Intervall liegt, so ist dadurch die Frage entschieden; liegen aber beide Wurzeln darin, so beachte man weiter, daß ξ_0 auch zwischen $[b_0, b_1, b_2]$ und $[b_0, b_1, b_2 + 1]$ liegt. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man im allgemeinen rasch zum Ziel. Gleichwohl ist in der Praxis die erste Methode meist bequemer.

Als Beispiel berechnen wir den Kettenbruch

$$\xi_0 = [2, 3, \overline{10, 1, 1, 1}].$$

Hier ist

$$\xi_0 = \frac{A_1 \xi_2 + A_0}{B_1 \xi_2 + B_0} = \frac{7\xi_2 + 2}{3\xi_2 + 1},$$

wo ξ_2 ein reinperiodischer Kettenbruch, dessen Periode aus $k = 4$ Gliedern besteht:

$$\xi_2 = [\overline{10, 1, 1, 1}].$$

Um diesen letzteren zu berechnen, bilden wir seine Näherungszähler und -Nenner:

ν	-1	0	1	2	3
$A_{\nu,2}$	1	10	11	21	32
$B_{\nu,2}$	0	1	1	2	3

Die quadratische Gleichung für ξ_2 lautet daher (Formel (1)):

$$3x^2 + (2 - 32)x - 21 = 0$$

oder

$$x^2 - 10x - 7 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\xi_2 = 5 + \sqrt{32} = 5 + 4\sqrt{2}.$$

Setzt man dies oben in den Ausdruck für ξ_0 ein, so kommt

$$[2, 3, \overline{10, 1, 1, 1}] = \xi_0 = \frac{35 + 28\sqrt{2} + 2}{15 + 12\sqrt{2} + 1} = \frac{20 - \sqrt{2}}{8}.$$

Ist die Gliederzahl k nicht groß, so ist es meist bequemer, die quadratische Gleichung für den reinperiodischen Kettenbruch direkt aufzustellen, ohne auf die fertige Gleichung (1) zurückzugreifen. Zum Beispiel für $\xi_0 = [\overline{2, 3}]$ wird man einfach so verfahren:

$$\xi_0 = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi_0}} = 2 + \frac{\xi_0}{3\xi_0 + 1}.$$

Multipliziert man mit $3\xi_0 + 1$, so kommt die gewünschte Gleichung

$$3\xi_0^2 - 6\xi_0 - 2 = 0;$$

also ist

$$[\overline{2, 3}] = \frac{3 + \sqrt{15}}{3}.$$

III. Man kann, wo es zweckmäßig erscheint, einen reinperiodischen Kettenbruch auch als gemischtperiodisch auffassen, und einen gemischtperiodischen auch als einen ebensolchen mit längerer Vorperiode. Denn es ist ja offenbar

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}]$$
$$= [b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, b_h, \overline{b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}, b_h}].$$

Ferner kann man mehrere Perioden zu einer einzigen zusammenfassen und folglich einen Kettenbruch mit k-gliedriger Periode auch ansehen als einen mit (nk)-gliedriger Periode. Zum Beispiel ist

$$[b_0, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, \ldots, b_{h+k-1}}]$$
$$= [b_0, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, \ldots, b_{h+k-1}, b_h, \ldots, b_{h+k-1}}].$$

Im Grunde genommen haben wir ja hiervon schon bei Aufstellung der Gleichung (2) Gebrauch gemacht.

Wir nennen eine Periode primitiv, wenn sie nicht in dieser Weise durch Zusammenfassung von mehreren kleineren gebildet ist. Andernfalls heißt sie imprimitiv. Bei einem periodischen Kettenbruch ist dann die Gliederzahl einer imprimitiven Periode stets ein Multiplum von der Gliederzahl der primitiven Periode.

§ 20. Der Lagrangesche Satz von der Periodizität.

Eine reelle irrationale Zahl, die einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt, nennen wir eine quadratische Irrationalzahl. Mit dieser Terminologie läßt sich das Hauptergebnis des vorigen Paragraphen folgendermaßen aussprechen:

Satz 1. *Ein periodischer regelmäßiger Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar.* (*Euler* **1, 4**.)

Nun ist es eine der wichtigsten Tatsachen der ganzen Kettenbruchlehre, daß dieses Theorem sich umkehren läßt:

Satz 2. *Der regelmäßige Kettenbruch, in welchen sich eine quadratische Irrationalzahl entwickeln läßt, ist stets periodisch.* (*Lagrange* 3.)

Beweis. Jede quadratische Irrationalzahl hat die Form

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0}, \tag{1}$$

wo P_0, $Q_0 (\neq 0)$, D ganze Zahlen sind, und zwar D positiv, aber kein Quadrat; umgekehrt ist jede solche Zahl eine quadratische Irrationalzahl. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\sqrt{D}$ positiv annehmen, weil ja

$$\frac{-\sqrt{D} + P_0}{Q_0} = \frac{\sqrt{D} - P_0}{-Q_0}.$$

Ferner dürfen wir voraussetzen, daß

$$\frac{D - P_0^2}{Q_0} = Q_{-1} \tag{2}$$

eine ganze Zahl ist; sollte dies nämlich nicht von vorn herein der Fall sein, so setzen wir

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{Dc^2} + P_0 c}{Q_0 c} = \frac{\sqrt{D'} + P_0'}{Q_0'},$$

und jetzt wird die Zahl

$$\frac{D' - P_0'^2}{Q_0'} = c\,\frac{D - P_0^2}{Q_0}$$

bei geeigneter Wahl von c gewiß ganz. Wir denken uns also von vorn herein den Ausdruck (1) in der angegebenen Weise präpariert. Entwickelt man nun ξ_0 in einen Kettenbruch, so kommt zunächst:

$$\xi_0 = b_0 + \frac{1}{\xi_1};$$

also

$$\frac{1}{\xi_1} = \xi_0 - b_0 = \frac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0} - b_0 = \frac{\sqrt{D} + P_0 - b_0 Q_0}{Q_0},$$

woraus folgt

$$\xi_1 = \frac{Q_0}{\sqrt{D} + P_0 - b_0 Q_0} = \frac{\sqrt{D} + b_0 Q_0 - P_0}{\frac{1}{Q_0}[D - (b_0 Q_0 - P_0)^2]} = \frac{\sqrt{D} + P_1}{Q_1}.$$

Dabei ist

$$P_1 = b_0 Q_0 - P_0,$$

$$Q_1 = \frac{D - (b_0 Q_0 - P_0)^2}{Q_0} = \frac{D - P_0^2 + 2 b_0 Q_0 P_0 - b_0^2 Q_0^2}{Q_0} = Q_{-1} + 2 b_0 P_0 - b_0^2 Q_0.$$

Es sind also P_1, Q_1 ganze Zahlen, und außerdem ist

$$\frac{D - P_1^2}{Q_1} = \frac{D - (b_0 Q_0 - P_0)^2}{Q_1} = Q_0$$

wieder eine ganze Zahl. Folglich hat der Ausdruck

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{D} + P_1}{Q_1}$$

ganz die gleichen Eigenschaften, die wir von dem Ausdruck (1) vorausgesetzt haben. Geht man daher in der Kettenbruchentwicklung einen Schritt weiter, indem man $\xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2}$ setzt, so wird sich auch für ξ_2 wieder ein Ausdruck der gleichen Art ergeben. Bei Fortsetzung des Verfahrens erscheinen dann die vollständigen Quotienten immer in der Gestalt

$$\xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu}, \tag{3}$$

wobei P_ν, Q_ν, $\frac{D - P_\nu^2}{Q_\nu}$ ganze Zahlen sind.

Wir bezeichnen jetzt mit η_ν die zu ξ_ν konjugierte Zahl, das heißt

$$\eta_\nu = \frac{-\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu}. \tag{4}$$

Aus der Gleichung

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\nu-1}, \xi_\nu] = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}} \tag{5}$$

folgt dann, indem man das Zeichen von $\sqrt{D}$ ändert [1]):

$$\eta_0 = \frac{A_{\nu-1}\eta_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\eta_\nu + B_{\nu-2}}. \tag{6}$$

---

1) Daß das zulässig ist, zeigt man folgendermaßen. Die Gleichung (5) nimmt, wenn man mit dem Nenner heraufmultipliziert, die Form an:

$$U + V\sqrt{D} = 0, \tag{a}$$

wo U, V ganze Zahlen sind; ebenso nimmt (6) die Form an:

$$U - V\sqrt{D} = 0 \tag{b}$$

mit denselben Zahlen U, V. Man hat also nur zu zeigen, daß (b) eine Folge von (a) ist. Nun folgt aber aus (a): $V = 0$, $U = 0$, weil sonst $\sqrt{D} = -\frac{U}{V}$ daraus hervorginge, also $\sqrt{D}$ rational wäre. Daher ist in der Tat auch $U - V\sqrt{D} = 0$. W. z. b. w.

Überhaupt zieht hiernach jede Gleichung der Form $f(\sqrt{D}) = 0$, wo f eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten ist, immer auch $f(-\sqrt{D}) = 0$ nach sich.

Durch Auflösung nach η_ν ergibt sich hieraus

$$\eta_\nu = -\frac{\eta_0 B_{\nu-2} - A_{\nu-2}}{\eta_0 B_{\nu-1} - A_{\nu-1}} = -\frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} \cdot \frac{\eta_0 - \frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}}{\eta_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}}.$$

Da aber $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}, \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ Näherungsbrüche von ξ_0 sind, so nähert sich der letzte Bruch mit wachsendem ν dem Grenzwert $\frac{\eta_0 - \xi_0}{\eta_0 - \xi_0} = 1$; es ist also

$$\eta_\nu = -\frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}}(1 \pm \varepsilon_\nu),$$

wo ε_ν beliebig klein. Daher wird η_ν für genügend große Werte von ν jedenfalls negativ. Genauer findet man sogar, daß η_ν zwischen -1 und 0 liegt; denn aus der Gleichung $\xi_{\nu-1} = b_{\nu-1} + \frac{1}{\xi_\nu}$ folgt auch durch Übergang zu den konjugierten Zahlen (vgl. die Fußnote S. 75): $\eta_{\nu-1} = b_{\nu-1} + \frac{1}{\eta_\nu}$, und, weil für genügend große ν natürlich auch $\eta_{\nu-1}$ negativ ist, so schließt man hieraus, daß

$$\frac{1}{\eta_\nu} = -b_{\nu-1} + \eta_{\nu-1} < -b_{\nu-1} \leq -1$$

ist, woraus die Behauptung folgt. Da also $-1 < \eta_\nu < 0$, anderseits aber $\xi_\nu > 1$, so werden die Zahlen $\xi_\nu - \eta_\nu$ und $\xi_\nu + \eta_\nu$ positiv. Dies besagt aber, wenn man für ξ_ν, η_ν die Werte aus (3), (4) einsetzt:

$$\frac{2\sqrt{D}}{Q_\nu} > 0, \quad \frac{2P_\nu}{Q_\nu} > 0;$$

also jedenfalls $Q_\nu > 0$, $P_\nu > 0$. Weiter muß, damit η_ν negativ wird, $P_\nu < \sqrt{D}$ sein, also, wenn E die größte in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet:

$$P_\nu \leq E. \tag{7}$$

Endlich findet man noch, weil $\xi_\nu > 1$ sein muß,

$$\frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} > 1, \text{ oder } Q_\nu < \sqrt{D} + P_\nu,$$

also auch

$$Q_\nu \leq 2E. \tag{8}$$

Damit ist gezeigt, daß die P_ν, Q_ν von einem gewissen Index ν an positive ganze Zahlen sind, welche höchstens gleich E, bzw. $2E$ sein können. Es liegen also bei großem ν für P_ν überhaupt bloß E und für Q_ν bloß $2E$ verschiedene Möglichkeiten vor, daher für $\xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu}$

bloß $2E^2$ Möglichkeiten. Folglich müssen notwendig mehrere ξ_ν den gleichen Wert haben, etwa $\xi_h = \xi_{h+k}$; das heißt aber

$$[b_h, b_{h+1}, b_{h+2}, \ldots] = [b_{h+k}, b_{h+k+1}, b_{h+k+2}, \ldots],$$

und weil eine unendliche regelmäßige Kettenbruchentwicklung nur auf eine Weise möglich ist, so folgt hieraus

$$b_{h+k} = b_h,\; b_{h+k+1} = b_{h+1},\; b_{h+k+2} = b_{h+2}, \ldots$$

womit die Periodizität bewiesen ist.

Zugleich zeigt unsere Analyse, daß die primitive Periode höchstens $2E^2$ Glieder aufweisen kann, weil für ξ_ν bloß $2E^2$ verschiedene Werte möglich sind, sobald ν genügend groß ist; zumeist wird die Periode sogar sehr viel weniger Glieder haben. Jedoch ist zu beachten, daß wir $\frac{D-P_0^2}{Q_0}$ als ganze Zahl vorausgesetzt haben; es wäre zum Beispiel falsch, wenn

$$\xi_0 = \frac{20-\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}-20}{-8}$$

ist, einfach $D = 2$, also $E = 1$ zu setzen und daraus zu schließen, daß die Periode höchstens zwei Glieder hat. Vielmehr müssen wir

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{32}-80}{-32}$$

also $D = 32$ setzen, weil erst bei diesem Ansatz $D - P_0^2$ durch Q_0 teilbar wird. Es ist dann $E = 5$; also können wir nur schließen, daß die Periode höchstens $2E^2 = 50$ Glieder hat. In Wahrheit hat sie, wie wir auf Seite 72 sahen, vier Glieder, so daß die vorhin erhaltene Höchstzahl 2 in der Tat falsch ist.

§ 21. Zweiter Beweis des Lagrangeschen Satzes.

Der im vorigen Paragraphen mitgeteilte Beweis des Lagrangeschen Satzes weicht zwar in der Form erheblich von dem Lagrangeschen Originalbeweis ab; doch ist er seinem Wesen nach kaum davon verschieden; Grundlage und Hilfsmittel sind die gleichen. Dagegen ist der folgende sehr einfache Beweis, der von *Charves* 1 herrührt, der Idee nach verschieden, indem er als wesentlichstes Beweismoment das Näherungsgesetz zu Hilfe nimmt. Dabei sei bemerkt, daß die zahlreichen Beweise, die außerdem existieren, alle mehr oder weniger auf einen der beiden hinauslaufen.

Die quadratische Gleichung, welcher ξ_0 genügt, sei

$$a\xi_0^2 + b\xi_0 + c = 0, \tag{1}$$

wo a, b, c ganze Zahlen. Wenn wir nun ξ_0 in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickeln, so ist in unserer gewohnten Bezeichnung

$$\xi_0 = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}}. \tag{2}$$

Setzt man dies in (1) ein, so kommt

$$a(A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2})^2 + b(A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2})(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}) \\ + c(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2})^2 = 0,$$

oder

$$p_\nu \xi_\nu^2 + q_\nu \xi_\nu + r_\nu = 0, \tag{3}$$

wobei

$$p_\nu = aA_{\nu-1}^2 + bA_{\nu-1}B_{\nu-1} + cB_{\nu-1}^2 \tag{4}$$

$$q_\nu = 2aA_{\nu-1}A_{\nu-2} + b(A_{\nu-1}B_{\nu-2} + A_{\nu-2}B_{\nu-1}) + 2cB_{\nu-1}B_{\nu-2} \tag{5}$$

$$r_\nu = aA_{\nu-2}^2 + bA_{\nu-2}B_{\nu-2} + cB_{\nu-2}^2. \tag{6}$$

Gleichung (3) ist keine identische. Denn wäre etwa $p_\nu = 0$, so würde ein Vergleich von (1) mit (4) lehren, daß die Gleichung (1) die rationale Wurzel $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ hat; dann müßten aber beide Wurzeln rational sein, während ξ_0 doch irrational ist.

Wenn wir nun zeigen können, daß die ganzen Zahlen p_ν, q_ν, r_ν absolut unter einer von ν unabhängigen Schranke bleiben, so sind unter den quadratischen Gleichungen für die vollständigen Quotienten ξ_ν nur eine endliche Anzahl verschiedener. Daher sind für die ξ_ν selbst nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte möglich, woraus die Periodizität wieder augenblicklich folgt.

Eine solche Schranke für die p_ν, q_ν, r_ν findet man aber leicht durch Anwendung des Näherungsgesetzes; nach diesem ist nämlich

$$A_{\nu-1} = \xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}, \qquad |\delta| < 1.$$

Setzt man dies in (4) ein, so kommt

$$p_\nu = a\left(\xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}\right)^2 + b\left(\xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}\right)B_{\nu-1} + cB_{\nu-1}^2$$

$$= (a\xi_0^2 + b\xi_0 + c)B_{\nu-1}^2 + 2a\xi_0\delta + a\frac{\delta^2}{B_{\nu-1}^2} + b\delta.$$

Da aber $a\xi_0^2 + b\xi_0 + c = 0$ ist, so folgt hieraus

$$|p_\nu| < |2a\xi_0| + |a| + |b|.$$

Unter der gleichen Schranke bleibt auch r_ν, weil nach (4) und (6) ja $r_\nu = p_{\nu-1}$ ist. Daß endlich auch q_ν unter einer Schranke bleibt, ergibt

sich sogleich aus der durch einfache Ausrechnung zu verifizierenden Identität

$$q_\nu^2 - p_\nu r_\nu = (b^2 - ac)(A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1})^2;$$

da nämlich $A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1} = \pm 1$ ist, so folgt hieraus

$$q_\nu^2 \leqq |p_\nu r_\nu| + |b^2 - ac| < (|2a\xi_0| + |a| + |b|)^2 + |b^2 - ac|.$$

Man findet aber eine Schranke für q_ν auch, indem man das Näherungsgesetz in der schärferen Form

$$A_{\nu-1} = \xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}, \quad A_{\nu-2} = \xi_0 B_{\nu-2} + \frac{\delta'}{B_{\nu-1}}, \qquad |\delta|<1, |\delta'|<1$$

anwendet. Setzt man nämlich diese Werte von $A_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$ in Gleichung (5) ein, so kommt

$$\begin{aligned} q_\nu = {} & 2a\left(\xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}\right)\left(\xi_0 B_{\nu-2} + \frac{\delta'}{B_{\nu-1}}\right) \\ & + b\left(\xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_{\nu-1}}\right)B_{\nu-2} + b\left(\xi_0 B_{\nu-2} + \frac{\delta'}{B_{\nu-1}}\right)B_{\nu-1} \\ & \qquad + 2cB_{\nu-1}B_{\nu-2} \\ = {} & 2B_{\nu-1}B_{\nu-2}(a\xi_0^2 + b\xi_0 + c) + 2a\xi_0\left(\delta\frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} + \delta'\right) + 2a\frac{\delta\delta'}{B_{\nu-1}^2} \\ & + b\left(\delta\frac{B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} + \delta'\right). \end{aligned}$$

Also, weil wieder $a\xi_0^2 + b\xi_0 + c = 0$ ist,

$$|q_\nu| < |4a\xi_0| + |2a| + |2b|.$$

Daher bleiben in der Tat p_ν, q_ν, r_ν absolut unter einer von ν unabhängigen Schranke; w. z. b. w.

Dieser Beweis des Lagrangeschen Satzes ist viel kürzer als der erste, was ja nur natürlich ist, da er bessere Hilfsmittel, nämlich das Näherungsgesetz, benutzt. Gleichwohl hat auch der erste Beweis seine besonderen Vorzüge, weil er uns gleichzeitig einige Nebenresultate lieferte, die wir alsbald gebrauchen werden.

§ 22. Reduzierte Zahlen und reine Periodizität.

I. **Definition.** *Eine quadratische Irrationalzahl heißt reduziert, wenn sie größer ist als* 1, *und wenn ihre Konjugierte zwischen* -1 *und* 0 *liegt.*[1])

---

1) Dies entspricht der Gaußschen Definition der reduzierten quadratischen Form mit positiver Determinante (*Gauß* 1, § 183).

Auf Seite 76 haben wir gesehen, daß die vollständigen Quotienten ξ_ν, die bei Entwicklung einer quadratischen Irrationalzahl in einen regelmäßigen Kettenbruch auftreten, für genügend große Werte von ν gerade diese Eigenschaft haben; sie sind also reduzierte Zahlen. Wir untersuchen jetzt speziell einen reinperiodischen Kettenbruch

$$\xi_0 = [\overline{b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}}].$$

Hier ist $\xi_0 = \xi_k = \xi_{2k} = \xi_{3k} = \cdots$; folglich wird ξ_0 auch einem ξ_ν mit passend gewähltem, aber beliebig großem Index gleich; ein solches ξ_ν ist aber eine reduzierte Zahl, und daher ist ξ_0 selbst eine solche. Wir erhalten also

Satz 3. *Ein reinperiodischer regelmäßiger Kettenbruch stellt eine reduzierte quadratische Irrationalzahl dar.* (*Galois* **1.**)

Dieses Theorem läßt sich noch auf eine zweite Art beweisen. Einerseits ist nämlich wegen der reinen Periodizität: $b_0 = b_k \geqq 1$; also gewiß $\xi_0 > 1$. Anderseits ist ξ_0 die positive Wurzel der quadratischen Gleichung

$$B_{k-1}x^2 + (B_{k-2} - A_{k-1})x - A_{k-2} = 0 \qquad (\S\ 19,\ \text{Formel (1)}).$$

Die zu ξ_0 konjugierte Zahl η_0, das heißt die andere Wurzel dieser Gleichung, ist negativ. Da aber die linke Seite für $x = 0$ und $x = -1$ die Werte

$$-A_{k-2},\ \text{bzw.}\ (B_{k-1} - B_{k-2}) + (A_{k-1} - A_{k-2})$$

annimmt, welche von entgegengesetztem Zeichen sind, so liegt η_0 zwischen 0 und -1. Daher ist in der Tat ξ_0 eine reduzierte Zahl. Satz 3 läßt sich wieder umkehren:

Satz 4. *Der regelmäßige Kettenbruch, in den sich eine reduzierte quadratische Irrationalzahl entwickeln läßt, ist stets reinperiodisch.* (*Galois* **1.**)

Beweis. Wir bezeichnen wieder allgemein mit η_ν die zu ξ_ν konjugierte Zahl. Ist ξ_0 reduziert, so bestehen die Ungleichungen

$$\xi_0 > 1,\ -1 < \eta_0 < 0.$$

Entwickelt man also ξ_0 in einen Kettenbruch, so erhält man zunächst

$$\xi_0 = b_0 + \frac{1}{\xi_1},\ b_0 \geqq 1,$$

und, indem man zu den konjugierten Zahlen übergeht (vgl. S. 75, Fußnote):

$$\eta_0 = b_0 + \frac{1}{\eta_1}.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{1}{\eta_1} = -b_0 + \eta_0 < -b_0 \leqq -1,$$

also $-1 < \eta_1 < 0$, so daß auch ξ_1 eine reduzierte Zahl ist. Geht man in der Kettenbruchentwicklung einen Schritt weiter, so erweist sich ebenso ξ_2, und bei Fortsetzung des Verfahrens überhaupt jeder vollständige Quotient ξ_ν als eine reduzierte Zahl; es ist also stets

$$-1 < \eta_\nu < 0.$$

Aus der Gleichung

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}}$$

folgt nun durch Übergang zu den konjugierten Zahlen:

$$\eta_\nu = b_\nu + \frac{1}{\eta_{\nu+1}},$$

oder

$$-\frac{1}{\eta_{\nu+1}} = b_\nu - \eta_\nu.$$

Da aber η_ν zwischen 0 und -1, also $-\eta_\nu$ zwischen 0 und 1 liegt, so lehrt diese letzte Gleichung, daß b_ν nicht nur die in ξ_ν, sondern zugleich die in $-\frac{1}{\eta_{\nu+1}}$ enthaltene größte ganze Zahl ist.

Nehmen wir nun an, der periodische Kettenbruch, in den sich ξ_0 entwickeln läßt, sei nicht reinperiodisch, sondern die Periode beginne etwa erst mit b_h, wo $h \geqq 1$; es ist dann

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}],$$

wobei, da die Periode nicht schon mit b_{h-1} beginnen soll,

$$b_{h-1} \neq b_{h+k-1}$$

sein muß. Wegen der Periodizität ist jetzt $\xi_h = \xi_{h+k}$; also auch $\eta_h = \eta_{h+k}$, oder, was dasselbe sagt:

$$-\frac{1}{\eta_h} = -\frac{1}{\eta_{h+k}}.$$

Nimmt man aber hier beiderseits die größten ganzen Zahlen heraus, so kommt nach dem Bewiesenen: $b_{h-1} = b_{h+k-1}$, im Widerspruch mit unserer Annahme. Der Kettenbruch muß also reinperiodisch sein. W. z. b. w.

II. Über die Vorperioden bei gemischtperiodischen Kettenbrüchen gibt folgender Satz einige Auskunft:

Satz 5. *Wird die quadratische Irrationalzahl $\xi_0 > 1$, deren Konjugierte η_0 ist, in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt, so erhält man*

1. *für $-1 < \eta_0 < 0$: reine Periodizität,*
2. *für $\eta_0 < -1$: ein Glied vor der Periode,*
3. *für $\eta_0 > 0$: ein oder mehr Glieder vor der Periode.*

Der Fall 1 ist im Vorstehenden schon erledigt, weil in diesem ξ_0 reduziert ist; ebenso aber auch der Fall 3; denn da in diesem ξ_0 nicht reduziert ist, kann der Kettenbruch nach Satz 3 nicht reinperiodisch sein. Es bleibt noch der Fall 2. Auch in diesem kann der Kettenbruch nicht reinperiodisch sein. Da aber jetzt aus der Gleichung $\eta_0 = b_0 + \frac{1}{\eta_1}$ sogleich

$$-\frac{1}{\eta_1} = b_0 - \eta_0 > -\eta_0 > 1$$

folgt, so ist $-1 < \eta_1 < 0$, also ξ_1 reduziert, und folglich der Kettenbruch für ξ_1 reinperiodisch. Bei dem Kettenbruch für ξ_0 geht also nur das eine Glied b_0 der Periode voraus. W. z. b. w.

§ 23. Inverse Perioden. Satz von Galois.

I. Sei $\xi_0 = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$ ein reinperiodischer Kettenbruch, also ξ_0 eine reduzierte Zahl. Die vollständigen Quotienten ξ_ν sind dann ebenfalls reduzierte Zahlen, und für sie besteht das System von Gleichungen

$$\xi_0 = b_0 + \frac{1}{\xi_1},\ \xi_1 = b_1 + \frac{1}{\xi_2}, \ldots, \xi_{k-2} = b_{k-2} + \frac{1}{\xi_{k-1}},\ \xi_{k-1} = b_{k-1} + \frac{1}{\xi_0},$$

in deren letzter von der Beziehung $\xi_0 = \xi_k$ Gebrauch gemacht ist. Geht man zu den konjugierten Zahlen über, so erhält man

$$\eta_0 = b_0 + \frac{1}{\eta_1},\ \eta_1 = b_1 + \frac{1}{\eta_2}, \ldots, \eta_{k-2} = b_{k-2} + \frac{1}{\eta_{k-1}},\ \eta_{k-1} = b_{k-1} + \frac{1}{\eta_0},$$

oder in umgekehrter Reihenfolge mit leichter Umstellung der Terme

$$-\frac{1}{\eta_0} = b_{k-1} - \eta_{k-1},\ -\frac{1}{\eta_{k-1}} = b_{k-2} - \eta_{k-2}, \ldots, -\frac{1}{\eta_2} = b_1 - \eta_1,$$
$$-\frac{1}{\eta_1} = b_0 - \eta_0.$$

Der Deutlichkeit halber ändern wir nun ein wenig die Bezeichnung, indem wir setzen

$$-\frac{1}{\eta_0} = \zeta_0,\ -\frac{1}{\eta_\nu} = \zeta_{k-\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Da ξ_ν reduziert, also $-1 < \eta_\nu < 0$ ist, so sind alle ζ_ν größer als 1, und die vorausgehenden Gleichungen lauten:

$$\zeta_0 = b_{k-1} + \frac{1}{\zeta_1},\ \zeta_1 = b_{k-2} + \frac{1}{\zeta_2}, \ldots, \zeta_{k-2} = b_1 + \frac{1}{\zeta_{k-1}},\ \zeta_{k-1} = b_0 + \frac{1}{\zeta_0},$$

woraus sofort die Kettenbruchentwicklung hervorgeht:

$$-\frac{1}{\eta_0} = \zeta_0 = [\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0}].$$

Die Periode dieses Kettenbruches entsteht aus der ursprünglichen, indem man die Reihenfolge ihrer Glieder umkehrt; wir nennen sie zu ihr **invers**. So können wir das folgende von *Galois* 1 herrührende Theorem aussprechen:

Satz 6. *Ist ξ_0 ein reinperiodischer regelmäßiger Kettenbruch*

$$\xi_0 = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}],$$

und η_0 die zu ξ_0 konjugierte Zahl, so ist der regelmäßige Kettenbruch für die Zahl $-\frac{1}{\eta_0}$ ebenfalls reinperiodisch, und zwar ist seine Periode die inverse der vorigen:

$$-\frac{1}{\eta_0} = [\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0}].$$

II. Auch die Reihen der vollständigen Quotienten der beiden Kettenbrüche zeigen eine gewisse Inversion, wie wir jetzt beweisen wollen. Zu dem Zweck entwickeln wir zuerst einige Hilfsformeln, die auch für gemischte Periodizität gelten und die uns auch später noch von Nutzen sein werden. Wie in § 20 nehmen wir dabei ξ_0 wieder in der Form an

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0}, \tag{1}$$

wo

$$\frac{D - P_0^2}{Q_0} = Q_{-1} \tag{2}$$

eine ganze Zahl ist. Dann ist, wie wir sahen, allgemein $\xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu}$, wo auch P_ν, Q_ν ganze Zahlen sind. Die Gleichung $\xi_\nu = b_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}}$ ergibt daher

$$\frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = b_\nu + \frac{Q_{\nu+1}}{\sqrt{D} + P_{\nu+1}},$$

oder nach Beseitigung der Nenner:

$$D + P_\nu P_{\nu+1} + (P_\nu + P_{\nu+1})\sqrt{D} = b_\nu Q_\nu \sqrt{D} + b_\nu Q_\nu P_{\nu+1} + Q_\nu Q_{\nu+1}.$$

Diese Formel spaltet sich aber wegen der Irrationalität von $\sqrt{D}$ sofort in zwei, nämlich

$$D + P_\nu P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu P_{\nu+1} + Q_\nu Q_{\nu+1}, \tag{3}$$

$$P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu. \tag{4}$$

Multipliziert man Gleichung (4) mit $P_{\nu+1}$ und subtrahiert sie dann von (3), so kommt

$$D - P_{\nu+1}^2 = Q_\nu Q_{\nu+1}, \tag{5}$$

eine Formel, die mit Rücksicht auf (2) auch noch für $\nu = -1$ gilt. In (3), (4), (5) haben wir die wichtigen Hilfsformeln gewonnen, die wir ableiten wollten.

Nun sei wieder

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0} = [\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$$

ein reinperiodischer Kettenbruch. Die vollständigen Quotienten sind der Reihe nach $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$, oder

$$(6) \qquad \frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0}, \quad \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_1}, \quad \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-1}};$$

von hier an wiederholen sie sich periodisch. Ebenso sind mit unserer obigen Bezeichnung die vollständigen Quotienten des Kettenbruches

$$-\frac{1}{\eta_0} = \zeta_0 = [\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0}]$$

diese: $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}$, oder was dasselbe ist

$$(7) \qquad -\frac{1}{\eta_0}, -\frac{1}{\eta_{k-1}}, -\frac{1}{\eta_{k-2}}, \ldots, -\frac{1}{\eta_2}, -\frac{1}{\eta_1}.$$

Es ist aber

$$\xi_\nu = \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu}, \quad \text{also} \quad \eta_\nu = \frac{-\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu};$$

daher

$$-\frac{1}{\eta_\nu} = \frac{Q_\nu}{\sqrt{D}-P_\nu} = \frac{Q_\nu(\sqrt{D}+P_\nu)}{D-P_\nu^2}.$$

Nach (5) ist aber $D - P_\nu^2 = Q_{\nu-1} Q_\nu$: also

$$-\frac{1}{\eta_\nu} = \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_{\nu-1}}.$$

Die vollständigen Quotienten (7) sind daher die folgenden:

$$\frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_{-1}}, \quad \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-2}}, \quad \frac{\sqrt{D}+P_{k-2}}{Q_{k-3}}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_1}, \quad \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_0}.$$

Hier kann aber der erste Nenner Q_{-1} noch etwas anders ausgedrückt werden. Es ist nämlich $\xi_0 = \xi_k$, also $P_0 = P_k$, $Q_0 = Q_k$. Dann lehrt aber die Formel (5):

$$Q_{-1} Q_0 = D - P_0^2 = D - P_k^2 = Q_{k-1} Q_k = Q_{k-1} Q_0,$$

also $Q_{-1} = Q_{k-1}$. Wir erhalten daher

Satz 7. *Sind die vollständigen Quotienten des reinperiodischen Kettenbruches* $[\overline{b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}}]$ *der Reihe nach*

$$\frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_0}, \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_1}, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-1}},$$

wobei $D - P_0^2$ *durch* Q_0 *teilbar ist, so sind*

$$\frac{\sqrt{D}+P_0}{Q_{k-1}}, \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-2}}, \frac{\sqrt{D}+P_{k-2}}{Q_{k-3}}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_0}$$

diejenigen des Kettenbruches $[\overline{b_{k-1}, b_{k-2}, \ldots, b_1, b_0}]$, *dessen Periode die inverse der vorigen ist.* (*Legendre* **3.**)

III. Aus dem Galoisschen Satz ergibt sich leicht noch folgender

Satz 8. *Die regelmäßigen Kettenbrüche für zwei zueinander konjugierte quadratische Irrationalzahlen haben inverse Perioden.* (*Serret* **1.**)

Beweis. Sei

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{h-1}, \overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}];$$

daraus folgt

$$\xi_0 = \frac{A_{h-1}\xi_h + A_{h-2}}{B_{h-1}\xi_h + B_{h-2}}, \tag{8}$$

wobei

$$\xi_h = [\overline{b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}}]$$

reinperiodisch ist. Nach dem Galoisschen Satz 6 ist daher

$$-\frac{1}{\eta_h} = [\overline{b_{h+k-1}, b_{h+k-2}, \ldots, b_{h+1}, b_h}].$$

Anderseits erhält man aus (8), wenn man zu den konjugierten Zahlen übergeht:

$$\eta_0 = \frac{A_{h-1}\eta_h + A_{h-2}}{B_{h-1}\eta_h + B_{h-2}} = \frac{A_{h-2}\left(-\frac{1}{\eta_h}\right) + (-A_{h-1})}{B_{h-2}\left(-\frac{1}{\eta_h}\right) + (-B_{h-1})}.$$

Die Zahlen η_0 und $-\frac{1}{\eta_h}$ sind also äquivalent, so daß nach Satz 23, Kap. II, ihre regelmäßigen Kettenbrüche von einer gewissen Stelle an übereinstimmen. Folglich muß auch der Kettenbruch für η_0 die Periode

$$b_{h+k-1}, b_{h+k-2}, \ldots, b_{h+1}, b_h$$

haben, das heißt aber die zur Periode von ξ_0 inverse. W. z. b. w.

Man findet zum Beispiel

$$\frac{14-\sqrt{37}}{8} = [2, 1, 1, \overline{1, 3, 2}],$$

$$\frac{14+\sqrt{37}}{8} = [6, \overline{1, 2, 3}],$$

wobei es allerdings zunächst scheint, als ob der zweite Kettenbruch nicht die inverse Periode des ersten hätte. Doch tritt dies sofort in die Erscheinung, wenn man die Periode des zweiten an passender Stelle beginnen läßt, nämlich

$$\frac{14+\sqrt{37}}{3} = [6, 1, \overline{2, 3, 1}].$$

Interessant ist der von *Serret*[1] behandelte Fall, wenn zwei konjugierte Zahlen ξ_0, η_0 miteinander äquivalent sind. Dann hat nach Satz 23, Kap. II, η_0 die gleiche Periode wie ξ_0; anderseits nach dem soeben Bewiesenen auch die inverse Periode. Es wäre aber falsch, hieraus zu schließen, daß die Periode notwendig symmetrisch ist. Das kann sie zwar sein; im allgemeinen braucht sie aber erst dann in die inverse überzugehen, wenn man sie an geeigneter anderer Stelle beginnen läßt. Ist also wieder

$$b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+k-1}$$

die Periode, so wird es einen Index i geben, derart, daß die Periode

$$b_{h+i}, b_{h+i+1}, \ldots, b_{h+k-1}, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+i-1}$$

zur vorigen invers ist. Teilt man daher erstere in die zwei Abschnitte

$$b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+i-1} \,\|\, b_{h+i}, b_{h+i+1}, \ldots, b_{h+k-1},$$

und analog auch die zweite

$$b_{h+i}, b_{h+i+1}, \ldots, b_{h+k-1} \,\|\, b_h, b_{h+1}, \ldots, b_{h+i-1},$$

so sieht man, weil beide zueinander invers sein müssen, daß jeder Abschnitt für sich symmetrisch ist. Die ganze Periode setzt sich also aus zwei Teilen zusammen, von denen jeder symmetrisch ist. Ausnahmsweise kann aber auch der eine Teil wegfallen und die Periode also selbst symmetrisch sein; dies ist nämlich der Fall, wenn $i = 0$ ist.

Die Zahl $\frac{\sqrt{7}+3}{2}$ zum Beispiel gibt mit ihrer Konjugierten die Summe 3, ist also mit ihr äquivalent. Ihre Periode muß daher die angegebene Eigenschaft haben. In der Tat findet man

$$\frac{\sqrt{7}+3}{2} = [2, \overline{1, 4, 1, 1}],$$

so daß sich die Periode aus den beiden symmetrischen Teilen (1, 4, 1) und (1) zusammensetzt.

§ 24. Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen.

I. Sei d eine rationale, nicht notwendig ganze Zahl, größer als 1, aber nicht das Quadrat einer rationalen Zahl. Es ist dann $\sqrt{d}$ eine quadratische Irrationalzahl, und wenn man diese in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt, so wird nach Satz 5 ein Glied der Periode vorangehen; es ist also

$$\sqrt{d} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_k}]. \tag{1}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\sqrt{d} - b_0} = [\overline{b_1, b_2, \ldots, b_k}],$$

und wenn man auf diesen reinperiodischen Kettenbruch den Galoisschen Satz 6 anwendet, erhält man

$$\sqrt{d} + b_0 = [\overline{b_k, b_{k-1}, \ldots, b_2, b_1}] = [b_k, \overline{b_{k-1}, \ldots, b_2, b_1, b_k}]. \tag{2}$$

Anderseits liefert aber der Kettenbruch (1) direkt:

$$\sqrt{d} + b_0 = [2b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_k}].$$

Durch Vergleich mit dem vorigen ergibt sich wegen der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung:

$$b_k = 2b_0,\ b_{k-1} = b_1,\ b_{k-2} = b_2, \ldots, b_1 = b_{k-1}.$$

Daher sieht der Kettenbruch (1) schließlich so aus:

$$\sqrt{d} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}].$$

Die Periode beginnt also gleich nach dem Anfangsglied und sie besteht aus einem symmetrischen Teil, gefolgt von dem doppelten Anfangsglied; übrigens kann auch $k = 1$ sein, dann hat der symmetrische Teil Null Glieder, d. h. er fällt weg. Dies Gesetz fand *Legendre* 3.

Umgekehrt wollen wir nun zeigen, daß ein regelmäßiger Kettenbruch dieser Form stets die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl darstellt. Da er nämlich periodisch ist, so muß er jedenfalls eine quadratische Irrationalzahl ξ_0 sein, deren Konjugierte wir mit η_0 bezeichnen wollen. Es ist also

$$[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] = \xi_0;$$

folglich

$$[\overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] = \frac{1}{\xi_0 - b_0},$$

und daher durch Anwendung des Galoisschen Satzes

$$[\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}] = b_0 - \eta_0.$$

Subtrahiert man beiderseits b_0, so kommt

$$[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] = -\eta_0.$$

Anderseits war aber dieser Kettenbruch gleich ξ_0. Es ist also $\xi_0 + \eta_0 = 0$, und folglich hat die quadratische Gleichung für ξ_0 die Form $a\xi_0^2 - c = 0$, so daß $\xi_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ist; w. z. b. w. Natürlich muß auch $\xi_0 > 1$ sein; denn $b_0 = 0$ ist ausgeschlossen, weil sonst $b_k = 2b_0 = 0$, also der Kettenbruch gar nicht regelmäßig wäre. Wir sprechen diese Resultate aus in

Satz 9. *Der regelmäßige Kettenbruch für die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl größer als* 1 *ist von der Form*

$$[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}],$$

und umgekehrt stellt jeder Kettenbruch von dieser Form die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl größer als 1 *dar.*

II. Wir wollen jetzt beweisen, daß auch die vollständigen Quotienten eine gewisse Symmetrie befolgen. Zu dem Zweck setzen wir $\sqrt{d} = \frac{\sqrt{D}}{Q_0}$, wo D, Q_0 ganze Zahlen sind, und zwar D durch Q_0 teilbar. Dadurch haben wir wieder unsere frühere Bezeichnung; nur ist dem speziellen Fall entsprechend $P_0 = 0$. Bezeichnet wieder k die Gliederzahl der Periode des Kettenbruches

$$\frac{\sqrt{D}}{Q_0} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}],$$

so sind seine vollständigen Quotienten der Reihe nach

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{D}}{Q_0}, \quad \overline{\xi_1 = \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_1}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_2}, \ldots, \xi_k = \frac{\sqrt{D}+P_k}{Q_k}},$$

wo durch den Strich die Periode angedeutet ist. Da aber auch

$$\xi_k = [2b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] = \xi_0 + b_0 = \frac{\sqrt{D} + b_0 Q_0}{Q_0}, \tag{3}$$

so folgt zunächst

$$Q_k = Q_0, \quad P_k = b_0 Q_0.$$

Sodann sind die vollständigen Quotienten des reinperiodischen Kettenbruches $[\overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$ der Reihe nach $\overline{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k}$, also

$$\overline{\frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_1}, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_k}{Q_k}}.$$

Diejenigen des Kettenbruches

$$(4) \qquad [\overline{2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1}]$$

sind dann, weil seine Periode die inverse der vorigen ist, nach Satz 7:

$$\overline{\frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_k}, \frac{\sqrt{D}+P_k}{Q_{k-1}}, \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-2}}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_1}},$$

oder, indem man die Periode eine Stelle weiter rechts beginnen läßt und berücksichtigt, daß $Q_k = Q_0$ ist:

$$\frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_0}, \overline{\frac{\sqrt{D}+P_k}{Q_{k-1}}, \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-2}}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_1}, \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_0}}.$$

Anderseits sind diese vollständigen Quotienten, da der Kettenbruch (4) augenscheinlich den Wert $\xi_0 + b_0$ hat, gleich $\xi_0 + b_0, \overline{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k}$. Es ist also insbesondere

$$\frac{\sqrt{D}+P_k}{Q_{k-1}} = \xi_1, \frac{\sqrt{D}+P_{k-1}}{Q_{k-2}} = \xi_2, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_1} = \xi_{k-1}, \frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_0} = \xi_k.$$

Dies besagt aber, da doch allgemein $\xi_\nu = \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu}$ war:

$$P_k = P_1, \; P_{k-1} = P_2, \ldots, P_1 = P_k,$$
$$Q_{k-1} = Q_1, \; Q_{k-2} = Q_2, \ldots, Q_0 = Q_k,$$

und folglich sind die beiden Zahlenfolgen

$$P_1, P_2, \ldots, P_k,$$
$$Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$$

symmetrisch. Dieses Ergebnis fassen wir mit einem Teil der Aussage von Satz 9 zusammen in das folgende Theorem von *Muir* 1:

Satz 10. *Entwickelt man die Zahl* $\frac{\sqrt{D}}{Q_0}$, *wo* Q_0 *ein Teiler von* D *und kleiner als* $\sqrt{D}$ *ist, in einen regelmäßigen Kettenbruch*

$$\frac{\sqrt{D}}{Q_0} = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, 2b_0}],$$

und bezeichnet man die Reihe seiner vollständigen Quotienten mit

$$\frac{\sqrt{D}}{Q_0}, \overline{\frac{\sqrt{D}+P_1}{Q_1}, \frac{\sqrt{D}+P_2}{Q_2}, \ldots, \frac{\sqrt{D}+P_k}{Q_k}},$$

so sind die drei Zahlenfolgen

$$b_1, b_2, \ldots, b_{k-2}, b_{k-1}$$
$$P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}, P_k$$
$$Q_0, Q_1, \ldots, Q_{k-1}, Q_k$$

symmetrisch. Es ist also

$$b_\nu = b_{k-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$$
$$P_{\nu+1} = P_{k-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1)$$
$$Q_\nu = Q_{k-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k).$$

III. Die hiermit bewiesene Symmetrie der P_ν, Q_ν bringt es mit sich, daß es bei geradem k zwei P_ν mit aufeinanderfolgenden Indizes gibt, die einander gleich sind, nämlich $P_{\frac{k}{2}} = P_{\frac{k}{2}+1}$. Ebenso gibt es bei ungeradem k zwei aufeinanderfolgende Q_ν, die einander gleich sind, nämlich $Q_{\frac{k-1}{2}} = Q_{\frac{k+1}{2}}$. Für die Praxis ist nun von größter Wichtigkeit, daß, wenn die k-gliedrige Periode die primitive ist, zwei aufeinanderfolgende P_ν oder Q_ν auch nur in den soeben bezeichneten Fällen einander gleich sein können.

Wegen der Primitivität, und weil die Periode nicht schon mit b_0 beginnt, sind nämlich die vollständigen Quotienten

$$\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k \tag{5}$$

alle voneinander verschieden. Es ist ferner unter Berücksichtigung von Satz 10

$$\xi_{k-\nu} = \frac{\sqrt{D} + P_{k-\nu}}{Q_{k-\nu}} = \frac{\sqrt{D} + P_{\nu+1}}{Q_\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{6}$$

Wenn nun einmal $P_{\nu+1} = P_\nu$ ist, so ergibt sich hieraus

$$\xi_{k-\nu} = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = \xi_\nu;$$

folglich, weil die Zahlen (5) alle voneinander verschieden sind: $k - \nu = \nu$. Daher ist k gerade, und $\nu = \frac{k}{2}$. Es ist also in diesem Fall die Gliederzahl $k-1$ des symmetrischen Periodenteils ungerade, und $b_\nu = b_{\frac{k}{2}}$ ist das Mittelglied.

Ist dagegen einmal $Q_{\nu+1} = Q_\nu$, so folgt aus (6)

$$\xi_{k-\nu} = \frac{\sqrt{D} + P_{\nu+1}}{Q_{\nu+1}} = \xi_{\nu+1}.$$

Daher ist $k - \nu = \nu + 1$; folglich k ungerade, und $\nu = \frac{k-1}{2}$. In diesem Fall ist also die Gliederzahl des symmetrischen Periodenteiles gerade, und $b_\nu = b_{\frac{k-1}{2}}$ ist das letzte Glied der ersten Hälfte. Man erhält also

Satz 11. *Hat der regelmäßige Kettenbruch für die Zahl* $\xi_0 = \frac{\sqrt{D}}{Q_0}$, *wo* Q_0 *ein Teiler von D und kleiner als* $\sqrt{D}$ *ist, eine primitive Periode von k Gliedern, und sind*

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{D} + P_1}{Q_1},\ \xi_2 = \frac{\sqrt{D} + P_2}{Q_2},\ \ldots,\ \xi_k = \frac{\sqrt{D} + P_k}{Q_k}$$

die zugehörigen vollständigen Quotienten, so ist für diese stets $P_\nu \neq P_{\nu+1}$; *nur, wenn k gerade und* $\nu = \frac{k}{2}$, *ist* $P_\nu = P_{\nu+1}$. *Ebenso ist stets* $Q_\nu \neq Q_{\nu+1}$; *nur, wenn k ungerade und* $\nu = \frac{k-1}{2}$, *ist* $Q_\nu = Q_{\nu+1}$. (*Muir* **1.**)

Die praktische Bedeutung dieses Satzes besteht darin, *daß er, sobald man im Verlauf der Rechnung am Ende der ersten Periodenhälfte angelangt ist, dies zu erkennen gestattet.* Die zweite Hälfte ist dann wegen der Symmetrie von selbst bekannt, ohne daß man die Rechnung weiter fortzusetzen braucht, die sich also dadurch um die Hälfte verringert. Wir illustrieren dies an je einem Beispiel für ungerade und gerade Werte von *k*.

Beispiel I: $\sqrt{73} = \frac{\sqrt{73}}{1}$

$$\frac{\sqrt{73}}{1} = 8 + \frac{\sqrt{73}-8}{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{73}-8} = \frac{\sqrt{73}+8}{9} = 1 + \frac{\sqrt{73}-1}{9}$$

$$\frac{9}{\sqrt{73}-1} = \frac{\sqrt{73}+1}{8} = 1 + \frac{\sqrt{73}-7}{8}$$

$$\frac{8}{\sqrt{73}-7} = \frac{\sqrt{73}+7}{3} = 5 + \frac{\sqrt{73}-8}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{73}-8} = \frac{\sqrt{73}+8}{3}$$

Weiter braucht man jetzt die Rechnung nicht mehr fortzusetzen. Denn da die zwei letzten Nenner Q_ν einander gleich, nämlich 3, sind, so ist die Gliederzahl der Periode ungerade; also die des symmetrischen Periodenteils gerade, und die Teilnenner 1, 1, 5 bilden die erste Hälfte. Man erhält also, da das letzte Periodenglied gleich dem doppelten Anfangsglied sein muß:

$$\sqrt{73} = [8, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$$

Beispiel II: $\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{4}$ $\left(\frac{52}{4} = \text{ganz}\right)$

$$\frac{\sqrt{52}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{52}-4}{4}$$

$$\frac{4}{\sqrt{52}-4} = \frac{\sqrt{52}+4}{9} = 1 + \frac{\sqrt{52}-5}{9}$$

$$\frac{9}{\sqrt{52}-5} = \frac{\sqrt{52}+5}{3} = 4 + \frac{\sqrt{52}-7}{3}$$

$$\frac{3}{\sqrt{52}-7} = \frac{\sqrt{52}+7}{1} = 14 + \frac{\sqrt{52}-7}{1}$$

Weiter braucht man die Rechnung nicht fortzusetzen. Denn da jedesmal das P_ν der folgenden Zeile gleich der Zahl wird, welche auf der rechten Seite der vorausgehenden Zeile negativ steht, also zuletzt 7, so bekommt P_ν hier zweimal nacheinander den gleichen Wert 7. Daher ist die Gliederzahl der Periode gerade; also die des symmetrischen Periodenteils ungerade, und 14 ist das Mittelglied. Da das letzte Periodenglied gleich dem doppelten Anfangsglied ist, kommt daher:

$$\frac{\sqrt{13}}{2} = [1, \overline{1, 4, 14, 4, 1, 2}].$$

IV. Aus Satz 10 folgt noch ein bemerkenswertes Resultat für den Fall, daß k ungerade ist; sei etwa $k = 2r + 1$. Dann ist nach Satz 10:

$$Q_\nu = Q_{2r+1-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, 2r+1),$$

also speziell für $\nu = r$:

$$Q_r = Q_{r+1}.$$

Nun haben wir aber in § 23 die ganz allgemein gültige Gleichung (5) bewiesen:

$$D - P_{\nu+1}^2 = Q_\nu Q_{\nu+1}.$$

Aus dieser folgt für $\nu = r$:

$$D - P_{r+1}^2 = Q_r Q_{r+1} = Q_{r+1}^2.$$

Wir erhalten also

Satz 12. *Besitzt die Zahl D einen Teiler Q_0 kleiner als $\sqrt{D}$ und von der Beschaffenheit, daß der regelmäßige Kettenbruch für die Zahl $\frac{\sqrt{D}}{Q_0}$ eine Periode von ungerader Gliederzahl $2r + 1$ hat, so ist D die Summe von zwei Quadraten; und zwar besteht, wenn $\xi_{r+1} = \frac{\sqrt{D} + P_{r+1}}{Q_{r+1}}$ der $(r+1)^{te}$ vollständige Quotient ist $\left(\xi_0 = \frac{\sqrt{D}}{Q_0}\right.$ als nullter gerechnet$\left.\right)$, die Zerlegung:*

$$D = P_{r+1}^2 + Q_{r+1}^2.$$

Die Zahl D wird demnach insbesondere dann die Summe von zwei Quadraten sein, wenn der Kettenbruch für $\sqrt{D}$ eine Periode von ungerader Gliederzahl hat; dann ist einfach $Q_0 = 1$. Wie wir später zeigen werden (S. 106), sind in diesem Fall die Quadrate sicher relativ prim, was für $Q_0 > 1$ nicht immer zutrifft.

§ 25. Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen.

I. Ein regelmäßiger Kettenbruch der Form

$$\xi_0 = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}] \tag{1}$$

stellt nach Satz 9 die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl dar; wir untersuchen jetzt die Beschränkungen, denen die b_ν unterliegen müssen' damit dies eine ganze Zahl ist. Bezeichnet k die Gliederzahl der primitiven Periode, so sind die vollständigen Quotienten

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \tag{2}$$

wieder alle von einander verschieden. Ist $\xi_0 = \sqrt{D}$, wo D eine ganze Zahl, so muß zunächst b_0 gleich der größten in $\sqrt{D}$ enthaltenen ganzen

Zahl E sein. Ferner sind in den vollständigen Quotienten $\xi_\nu = \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu}$ die P_ν, Q_ν ganze Zahlen, und speziell $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$. Für $\nu \geqq 1$ aber sind die ξ_ν als reinperiodische Kettenbrüche reduzierte Zahlen, und daher folgt genau wie Seite 76:

$$0 < P_\nu \leqq E \quad = b_0 \qquad \nu \geqq 1 \tag{3}$$

$$0 < Q_\nu \leqq 2E = 2b_0 \qquad \nu \geqq 1. \tag{4}$$

Während außerdem $Q_k = Q_0 = 1$ ist, wollen wir jetzt noch beweisen, daß

$$Q_\nu \geqq 2 \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots, k-1 \tag{5}$$

sein muß. In der Tat, wenn für einen dieser ν-Werte $Q_\nu = 1$ wäre, so hätte man

$$\xi_\nu = \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{1} = \xi_0 + P_\nu,$$

und folglich $\xi_{\nu+1} = \xi_1$, im Widerspruch mit der Tatsache, daß die Zahlen (2) alle voneinander verschieden sind.

Von der Gleichheit $Q_\nu = 2$ läßt sich weiter zeigen, daß sie nur für den Index $\nu = \frac{k}{2}$ eintreten kann. In der Tat ist unter Berücksichtigung von Satz 10

$$\xi_\nu - b_\nu = \frac{\sqrt{D}+P_\nu}{Q_\nu} - b_\nu,$$

$$\xi_{k-\nu} - b_{k-\nu} = \frac{\sqrt{D}+P_{k-\nu}}{Q_{k-\nu}} - b_{k-\nu} = \frac{\sqrt{D}+P_{\nu+1}}{Q_\nu} - b_\nu.$$

Daher durch Subtraktion

$$(\xi_\nu - b_\nu) - (\xi_{k-\nu} - b_{k-\nu}) = \frac{P_\nu - P_{\nu+1}}{Q_\nu}.$$

Die beiden Klammergrößen der linken Seite liegen aber zwischen 0 und 1; also folgt

$$|P_\nu - P_{\nu+1}| < Q_\nu. \tag{6}$$

Anderseits ist nach der allgemein gültigen Formel (4) Seite 83

$$P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu. \tag{7}$$

Wenn nun einmal $Q_\nu = 2$, so folgt aus (6) und (7):

$$|P_\nu - P_{\nu+1}| < 2, \quad P_\nu + P_{\nu+1} = 2b_\nu.$$

Daher ist $P_\nu + P_{\nu+1}$, also auch $P_\nu - P_{\nu+1}$ eine gerade Zahl, und zwar letztere absolut kleiner als 2; sie muß also Null sein, d. h. $P_\nu = P_{\nu+1}$. Nach Satz 11 ist dann aber $\nu = \frac{k}{2}$; dies gibt

Satz 13. *Entwickelt man $\xi_0 = \sqrt{D}$, wo D eine ganze nicht quadratische Zahl, in einen regelmäßigen Kettenbruch $[b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$, und ist k die Gliederzahl der primitiven Periode, so sind die Nenner Q_ν der vollständigen Quotienten*

$$\xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1)$$

mindestens gleich 3; allenfalls, wenn k gerade und $\nu = \frac{k}{2}$, kann $Q_\nu = 2$ sein.

Nun beweisen wir weiter

Satz 14. *Unter den Voraussetzungen von Satz 13 sind die b_ν des symmetrischen Periodenteiles kleiner als $\frac{2}{3} b_0$, abgesehen allenfalls bei geradem k von dem Mittelglied $\left(\nu = \frac{k}{2}\right)$. Ist dieses Mittelglied größer als $\frac{2}{3} b_0$, so kann es nur einen der Werte b_0 oder $b_0 - 1$ haben, und gleichzeitig ist $Q_{\frac{k}{2}} = 2$.*

Beweis. Für $b_\nu \geqq \frac{2}{3} b_0$ ist nach Formel (7)

$$P_\nu + P_{\nu+1} = b_\nu Q_\nu \geqq \frac{2}{3} b_0 Q_\nu,$$

also mit Rücksicht auf (3):

$$Q_\nu \leqq \frac{P_\nu + P_{\nu+1}}{\frac{2}{3} b_0} \leqq \frac{2 b_0}{\frac{2}{3} b_0} = 3.$$

Dabei kann Gleichheit nur eintreten, wenn $b_\nu = \frac{2}{3} b_0$ und gleichzeitig $P_\nu = P_{\nu+1} = b_0$ ist; aber dann muß nach Satz 11 gewiß $\nu = \frac{k}{2}$ sein, also b_ν das Mittelglied des symmetrischen Periodenteiles, womit dieser Fall erledigt ist. In allen andern Fällen, also insbesondere, wenn $b_\nu > \frac{2}{3} b_0$ ist, muß $Q_\nu < 3$, also $Q_\nu = 2$ sein, so daß nach Satz 13 wiederum $\nu = \frac{k}{2}$ ist. Für $\nu = \frac{k}{2}$ ist aber, wenn wir zunächst noch Q_ν beliebig lassen, $P_\nu = P_{\nu+1}$, also auch

$$P_\nu = \frac{P_\nu + P_{\nu+1}}{2} = \frac{b_\nu Q_\nu}{2};$$

daher einerseits mit Rücksicht auf (3)

$$b_\nu = \frac{2 P_\nu}{Q_\nu} \leqq \frac{2 b_0}{Q_\nu}; \tag{8}$$

anderseits aber

$$b_\nu + 1 > \xi_\nu = \frac{\sqrt{D} + P_\nu}{Q_\nu} = \frac{\sqrt{D} + \frac{1}{2} b_\nu Q_\nu}{Q_\nu} > \frac{b_0 + \frac{1}{2} b_\nu Q_\nu}{Q_\nu} = \frac{b_0}{Q_\nu} + \frac{1}{2} b_\nu.$$

Daher

(9) $$b_\nu > \frac{2 b_0}{Q_\nu} - 2.$$

Wegen (8) und (9) und, weil $\frac{b_\nu Q_\nu}{2} = P_\nu$ eine ganze Zahl ist, *kommen für die Zahl* $b_\nu \left(\nu = \frac{k}{2}\right)$ *überhaupt nur die* Q_ν *Möglichkeiten in Betracht:*

$$b_\nu = \frac{2 b_0}{Q_\nu}, \quad \frac{2(b_0 - 1)}{Q_\nu}, \quad \frac{2(b_0 - 2)}{Q_\nu}, \ldots, \frac{2(b_0 - Q_\nu + 1)}{Q_\nu}$$

(*Stern* 4). Speziell für $Q_\nu = 2$ kann also nur $b_\nu = b_0$ oder $b_0 - 1$ sein, womit Satz 14 vollständig bewiesen ist. Zugleich ergibt sich aus (8), daß für $Q_\nu = 2$ stets $P_\nu = b_\nu$ sein muß.

Eine Ergänzung zu Satz 14 ist

Satz 15. *Wenn unter den Voraussetzungen von Satz 13 k gerade ist, und* $Q_{\frac{k}{2}} = 2$, *so ist stets* $P_{\frac{k}{2}} = b_{\frac{k}{2}} = b_0$ *oder* $b_0 - 1$. *Umgekehrt ist für* $b_{\frac{k}{2}} = b_0$ *oder* $b_0 - 1$ *stets* $Q_{\frac{k}{2}} = 2$, *ausgenommen die Fälle* $D = 8$ *und* $D = 12$, *in welchen* $b_{\frac{k}{2}} = b_0 - 1$, *und trotzdem* $Q_{\frac{k}{2}} = 4$ *bzw.* 3 *ist.*

Beweis. Da wir den ersten Teil des Satzes soeben schon bewiesen haben, handelt es sich nur um den zweiten. Wenn dann $b_\nu > \frac{2}{3} b_0$ für $\nu = \frac{k}{2}$, so ist schon im Satz 14 ausgesprochen, daß $Q_\nu = 2$ ist, so daß nur noch der Fall $b_\nu \leqq \frac{2}{3} b_0$ übrig bleibt. Da aber $b_\nu = b_0$ oder $b_0 - 1$ sein soll, und da nicht $b_0 \leqq \frac{2}{3} b_0$, so führt dies zu

$$0 < b_\nu = b_0 - 1 \leqq \frac{2}{3} b_0,$$

also $b_0 = 2$ oder 3, so daß für D bloß die zehn Möglichkeiten

$$D = 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15$$

übrig bleiben. Prüft man diese einzeln durch, so zeigt sich, daß in der Tat $D = 8$ und $D = 12$ als Ausnahmen bestehen bleiben. Bei $D = 8$ ist nämlich $\sqrt{8} = [2, \overline{1, 4}]$; der symmetrische Periodenteil besteht also aus dem einen Glied $1 = b_0 - 1$, und man findet: $\xi_1 = \frac{\sqrt{8} + 2}{4}$, daher $Q_1 = 4$. Bei $D = 12$ ist $\sqrt{12} = [3, \overline{2, 6}]$; der symmetrische Perioden-

teil besteht also wieder aus dem einen Glied $2 = b_0 - 1$, und man findet: $\xi_1 = \frac{\sqrt{12}+3}{3}$, also $Q_1 = 3$.

II. Nach Th. Muir heißt die primitive Periode von $\sqrt{D}$ (D ganzzahlig) kulminierend, wenn ihre Gliederzahl k gerade und $b_{\frac{k}{2}} = b_0$ ist; fastkulminierend, wenn $b_{\frac{k}{2}} = b_0 - 1$ ist. Wir werden in § 27 sehen, daß es zu jedem b_0 wirklich kulminierende und fastkulminierende Perioden gibt. Hier wollen wir nur noch folgenden von *Göpel* **1** herrührenden Satz beweisen:

Satz 16. *Abgesehen von den Fällen $D = 8$ und 12 muß bei einer fastkulminierenden Periode von k Gliedern $b_{\frac{k}{2}-1} = 1$ sein; also*

$$\sqrt{D} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, 1, b_0 - 1, 1, \ldots, b_1, 2b_0}].$$

Beweis. Die Formeln $\sqrt{8} = [2, \overline{1, 4}]$ und $\sqrt{12} = [3, \overline{2, 6}]$ zeigen, daß jedenfalls $D = 8$ und $D = 12$ Ausnahmen bilden. Sieht man von diesen ab und setzt wieder $\frac{k}{2} = \nu$, so ist nach Voraussetzung $b_\nu = b_0 - 1$, also nach Satz 15

$$P_\nu = b_\nu = b_0 - 1, \; Q_\nu = 2.$$

Ferner ist nach der allgemein gültigen Formel (5), Seite 83

$$D - P_\nu^2 = Q_{\nu-1} Q_\nu;$$

also

$$Q_{\nu-1} = \frac{D - P_\nu^2}{Q_\nu} = \frac{D - (b_0 - 1)^2}{2} \geqq \frac{b_0^2 + 1 - (b_0 - 1)^2}{2} = b_0.$$

Daher mit Rücksicht auf Formel (4), S. 83:

$$P_{\nu-1} + P_\nu = b_{\nu-1} Q_{\nu-1} \geqq b_{\nu-1} b_0.$$

Da aber $P_\nu = b_0 - 1$, und da $P_{\nu-1}$ nach (3) auch nicht größer als b_0 sein kann, so folgt hieraus $b_{\nu-1} < 2$; also in der Tat $b_{\nu-1} = 1$. W. z. b. w. Einige weitere Sätze von der Art des Satz 16 findet man bei *Muir* **6**.

III. Die Sätze 14, 16 enthalten zwar notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingungen dafür, daß der Kettenbruch die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl darstellt. Die Eruierung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen knüpfen wir an folgende Fragestellung an:

Wenn in dem regelmäßigen periodischen Kettenbruch

$$\xi_0 = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$$

der symmetrische Periodenteil $b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1$ gegeben ist, wie muß alsdann b_0 beschaffen sein, damit $\xi_0^2 = D$ ganzzahlig wird?

Zunächst wissen wir aus Satz 9, daß ξ_0 gewiß die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist, daß also bei der quadratischen Gleichung, welcher ξ_0 genügt, das lineare Glied herausfallen muß. Diese quadratische Gleichung ergibt sich, wenn k die Gliederzahl der (nicht notwendig primitiven) Periode bedeutet, aus der Beziehung

$$\xi_0 = \frac{A_{k-1}\xi_k + A_{k-2}}{B_{k-1}\xi_k + B_{k-2}},$$

indem man darin $\xi_k = b_0 + \xi_0$ einsetzt. Es kommt dann

$$B_{k-1}\xi_0^2 + (b_0 B_{k-1} + B_{k-2})\xi_0 = A_{k-1}\xi_0 + b_0 A_{k-1} + A_{k-2}.$$

Weil aber das lineare Glied von selbst herausfallen muß, so ist zunächst

$$(10) \qquad b_0 B_{k-1} + B_{k-2} = A_{k-1}\ ^{1)},$$

und die quadratische Gleichung lautet dann einfach

$$B_{k-1}\xi_0^2 = b_0 A_{k-1} + A_{k-2}.$$

Setzen wir $\xi_0^2 = D$, so handelt es sich also darum, b_0 so zu bestimmen, daß die durch die Gleichung

$$(11) \qquad DB_{k-1} = b_0 A_{k-1} + A_{k-2}$$

definierte Zahl D ganz wird. Wir haben daher eine diophantische Gleichung mit den Unbekannten b_0 und D zu lösen. Diese ist aber nicht linear, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte; denn die Koeffizienten A_{k-1}, A_{k-2} sind selbst noch lineare Funktionen von b_0, und zwar ist nach den Formeln 27, Kap. I

$$(12) \qquad A_{k-1} = b_0 A_{k-2,1} + B_{k-2,1}, \quad B_{k-1} = A_{k-2,1}$$

$$(13) \qquad A_{k-2} = b_0 A_{k-3,1} + B_{k-3,1}, \quad B_{k-2} = A_{k-3,1}.$$

Setzt man dies in (11) ein, so kommt

$$(14) \qquad DA_{k-2,1} = b_0(b_0 A_{k-2,1} + B_{k-2,1}) + b_0 A_{k-3,1} + B_{k-3,1}.$$

Diese Gleichung läßt sich aber noch etwas vereinfachen. Substituiert man nämlich in Formel (10) für B_{k-1}, B_{k-2} die Werte aus (12) und (13), so erhält man

$$b_0 A_{k-2,1} + A_{k-3,1} = A_{k-1},$$

und wenn man dies mit der ersten Gleichung (12) vergleicht,

$$(15) \qquad A_{k-3,1} = B_{k-2,1}\ ^{2)}.$$

1) Dies ergibt sich auch aus § 11, I, da der $(k+1)$-gliedrige Kettenbruch

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, b_0] = \frac{b_0 A_{k-1} + A_{k-2}}{b_0 B_{k-1} + B_{k-2}}$$

symmetrisch, und sein vorletzter Näherungszähler A_{k-1} ist.

2) Diese Gleichung kann übrigens auch direkt aus § 11, I entnommen werden, weil ja der Kettenbruch

$$[b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1] = \frac{A_{k-2,1}}{B_{k-2,1}}$$

symmetrisch ist.

Setzt man dies in die diophantische Gleichung (14) ein, so nimmt sie die Gestalt an:

$$(16)\qquad A_{k-2,1}(D-b_0^2) - B_{k-2,1}\cdot 2b_0 = B_{k-3,1}.$$

Diese Gleichung ist aber in den beiden Unbekannten $2b_0$, $D-b_0^2$ linear und läßt sich sofort auflösen. Da nämlich

$$(17)\qquad A_{k-2,1}B_{k-3,1} - B_{k-2,1}A_{k-3,1} = (-1)^{k-3}$$

ist, so lautet die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} 2b_0 &= (-1)^{k-3}A_{k-3,1}B_{k-3,1} + mA_{k-2,1} \\ D-b_0^2 &= (-1)^{k-3}B_{k-3,1}B_{k-3,1} + mB_{k-2,1} \\ &= (-1)^{k-3}B_{k-3,1}^2 + mA_{k-3,1} \qquad \text{(nach (15))}, \end{aligned}$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Da aber nicht nur $2b_0$, sondern b_0 selbst ganzzahlig und zwar positiv sein soll, so muß man m auf solche Werte beschränken, für welche der Ausdruck

$$(-1)^{k-3}A_{k-3,1}B_{k-3,1} + mA_{k-2,1}$$

eine positive gerade Zahl wird. Wir erhalten somit

Satz 17. *Wenn von dem regelmäßigen Kettenbruch*

$$\xi_0 = [b_0, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_2, b_1, 2b_0}]$$

mit k-gliedriger Periode der symmetrische Teil der Periode vorgegeben ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ξ_0 die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ist, darin, daß b_0 die Form hat (Bezeichnung siehe § 5, II):

$$b_0 = \frac{mA_{k-2,1} - (-1)^k A_{k-3,1}B_{k-3,1}}{2},$$

wo m eine ganze Zahl bedeutet. Und zwar ist dann

$$\xi_0 = \sqrt{D} = \sqrt{b_0^2 + mA_{k-3,1} - (-1)^k B_{k-3,1}^2}.$$

Dieses schöne Theorem, für das wir sogleich eine Reihe von Einzelbeispielen aufstellen werden, findet sich bereits im Jahre 1765 bei *Euler* **9**, der die betreffenden Formeln für $k = 1, 2, \ldots 8$ einzeln angibt, woraus wohl zu schließen ist, daß er die Allgemeingültigkeit völlig durchschaut hat. Freilich war das Gesetz der Periodizität damals noch nicht bekannt; das hat Euler der Erfahrung entnommen und darauf seine weiteren Schlüsse richtig aufgebaut. In neuerer Zeit ist das Theorem von mehreren unabhängigen Autoren neu entdeckt worden, zuerst von *Muir* **1, 2**; einige Jahre später von *K. E. Hoffmann* **1**. Muir hat bemerkt, daß der Ausdruck für b_0 dann und nur dann ganzzahliger Werte fähig ist, wenn von den Zahlen $A_{k-3,1}$, $B_{k-3,1}$ die eine gerade

ist.[1]) Dann wird nämlich b_0 zum mindesten für gerade Werte von m ganzzahlig. Sind dagegen beide ungerade, so können wegen (17) die Zahlen $A_{k-2,1}$ und $B_{k-2,1}$ nicht ebenfalls beide ungerade sein; aber nach (15) ist $B_{k-2,1} = A_{k-3,1}$, also nach unserer Annahme ungerade, daher muß $A_{k-2,1}$ gerade sein. Unter diesen Umständen wird aber der für b_0 gefundene Ausdruck nie eine ganze Zahl.

IV. Wir wenden uns nun den einfachsten Beispielen zu, indem wir alle ganzen Zahlen aufsuchen, deren Quadratwurzeln Perioden mit 1, 2, 3, 4 Gliedern besitzen.

Erstes Beispiel: $k = 1$.

In diesem Fall ist

$$A_{k-3,1} = A_{-2,1} = 0;\; B_{k-3,1} = B_{-2,1} = 1;\; A_{k-2,1} = A_{-1,1} = 1;$$

daher

$$b_0 = \frac{m}{2};\quad D = b_0^2 + 1.$$

Es ist also b_0 beliebig, und man erhält

$$\sqrt{b_0^2 + 1} = [b_0, \overline{2b_0}].$$

Zweites Beispiel: $k = 2$.

In diesem Fall ist

$$A_{k-3,1} = A_{-1,1} = 1;\; B_{k-3,1} = B_{-1,1} = 0;\; A_{k-2,1} = A_{0,1} = b_1.$$

Daher

$$b_0 = \frac{m b_1}{2},\quad D = b_0^2 + m.$$

Es muß also b_1 ein Teiler von $2b_0$ sein, und man erhält

$$\sqrt{b_0^2 + m} = \left[b_0, \overline{\frac{2b_0}{m}, 2b_0}\right],$$

so oft m ein Teiler von $2b_0$ ist.

Drittes Beispiel: $k = 3$.

In diesem Fall ist

$$A_{k-3,1} = A_{0,1} = b_1;\; B_{k-3,1} = B_{0,1} = 1;$$
$$A_{k-2,1} = A_{1,1} = b_1 b_2 + 1 = b_1^2 + 1,$$

letzteres, weil ja (b_1, b_2) der symmetrische Teil, also $b_1 = b_2$ ist. Daher

$$b_0 = \frac{m(b_1^2 + 1) + b_1}{2},\quad D = b_0^2 + m b_1 + 1.$$

1) Daß beide gerade sind, ist wegen (17) nicht möglich.

Damit b_0 ganzzahlig ist, muß b_1 gerade $(= 2b)$, und ebenso m gerade $(= 2n)$ sein, und es ergibt sich

$$\sqrt{(n(4b^2+1)+b)^2+4nb+1}$$
$$= [n(4b^2+1)+b, \overline{2b, 2b, 2n(4b^2+1)+2b}].$$

Viertes Beispiel: $k = 4$.

In diesem Fall ist

$$A_{k-3,1} = A_{1,1} = b_1 b_2 + 1; \; B_{k-3,1} = B_{1,1} = b_2;$$
$$A_{k-2,1} = A_{2,1} = b_1 b_2 b_3 + b_3 + b_1 = b_1^2 b_2 + 2b_1,$$

weil ja (b_1, b_2, b_3) der symmetrische Teil, also $b_3 = b_1$ ist. Daher

$$b_0 = \frac{m(b_1^2 b_2 + 2b_1) - (b_1 b_2 + 1) b_2}{2},$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{b_0^2 + m(b_1 b_2 + 1) - b_2^2} = [b_0, \overline{b_1, b_2, b_1, 2b_0}].$$

Wenn hier b_2 gerade ist, so wird b_0 stets ganzzahlig; wenn aber b_2 ungerade, so muß auch b_1 ungerade, und m gerade sein.

Diese Beispiele mögen genügen. Setzt man in ihnen für die b_ν, m, n eine Reihe kleiner Zahlen ein, so erhält man eine ziemliche Anzahl von Quadratwurzeln, deren Kettenbruchentwicklung somit bekannt ist. Zum Beispiel findet man unter den Quadratwurzeln aus den Zahlen zwischen 1 und 100 bereits 56 dieser Art; die betreffenden Kettenbrüche können daher ohne alle Rechnung im Lauf weniger Minuten hingeschrieben werden. Will man eine größere Tabelle berechnen, so tut man gut, auch für $k > 4$ noch ein paar einfache Spezialformeln aufzustellen. Solche sind auf anderm Weg von *de Jonquières* **1**, **2**, und in großer Anzahl von *Boutin* **1** angegeben worden. Doch können wir auf deren vollständige Mitteilung verzichten, weil sie nichts enthalten, was nicht aus dem Muirschen Satz 17 ohne Schwierigkeit entnommen werden kann. Man bringt es leicht dahin, daß die meisten Zahlen der zu berechnenden Tabelle in den aufgestellten Spezialformeln enthalten sind; für die andern muß man freilich die Rechnung direkt in Angriff nehmen. Solche Tabellen sind mehrfach berechnet worden; die größte ist die von *Degen* **1**, welche die Zahlen $D < 1000$ umfaßt. Von anderen sei etwa die bei *Seeling* **1** erwähnt, welche bis $D = 602$ reicht. Wir schließen hier ebenfalls eine kleine Tabelle an. Die Konstruktion ist derart, daß in der ersten Spalte die Zahlen D, in der zweiten die Reihe der Teilnenner des zu $\sqrt{D}$ gehörigen Kettenbruches aufgeführt sind. Dabei ist, um Raum zu sparen, außer dem Anfangsglied nur die erste Hälfte des symmetrischen Periodenteiles angegeben, weil damit ja die ganze Periode bekannt ist. Hat der symmetrische Teil eine ungerade Gliederzahl, also ein Mittelglied, so ist dies durch Einklammerung dieses

Gliedes angedeutet. Besitzt die Periode einen nullgliedrigen, d. h. keinen symmetrischen Teil, so steht natürlich nur das Anfangsglied in der Tabelle. Es ist also zum Beispiel:

$$\sqrt{50} = [7, \overline{14}];\ \sqrt{51} = [7, \bar{7}, 14];\ \sqrt{53} = [7, \overline{3, 1, 1, 3, 14}];$$
$$\sqrt{54} = [7, \overline{2, 1, 6, 1, 2, 14}].$$

Die Erklärung der mit x und y überschriebenen Spalten erfolgt in § 26.

D		x	y	D		x	y
2	1	1	1	53	7, 3, 1	182	25
3	1, (1)	2	1	54	7, 2, 1, (6)	485	66
5	2	2	1	55	7, 2, (2)	89	12
6	2, (2)	5	2	56	7, (2)	15	2
7	2, 1, (1)	8	3	57	7, 1, 1, (4)	151	20
8	2, (1)	3	1	58	7, 1, 1, 1	99	13
10	3	3	1	59	7, 1, 2, (7)	530	69
11	3, (3)	10	3	60	7, 1, (2)	31	4
12	3, (2)	7	2	61	7, 1, 4, 3, 1, 2	29718	3805
13	3, 1, 1	18	5	62	7, 1, (6)	63	8
14	3, 1, (2)	15	4	63	7, (1)	8	1
15	3, (1)	4	1	65	8	8	1
17	4	4	1	66	8, (8)	65	8
18	4, (4)	17	4	67	8, 5, 2, 1, 1, (7)	48842	5967
19	4, 2, 1, (3)	170	39	68	8, (4)	33	4
20	4, (2)	9	2	69	8, 3, 3, 1, (4)	7775	936
21	4, 1, 1, (2)	55	12	70	8, 2, 1, (2)	251	30
22	4, 1, 2, (4)	197	42	71	8, 2, 2, 1, (7)	3480	413
23	4, 1, (3)	24	5	72	8, (2)	17	2
24	4, (1)	5	1	73	8, 1, 1, 5	1068	125
26	5	5	1	74	8, 1, 1	43	5
27	5, (5)	26	5	75	8, 1, (1)	26	3
28	5, 3, (2)	127	24	76	8, 1, 2, 1, 1, 5, (4)	57799	6630
29	5, 2, 1	70	13	77	8, 1, 3, (2)	351	40
30	5, (2)	11	2	78	8, 1, (4)	53	6
31	5, 1, 1, 3, (5)	1520	273	79	8, 1, (7)	80	9
32	5, 1, (1)	17	3	80	8, (1)	9	1
33	5, 1, (2)	23	4	82	9	9	1
34	5, 1, (4)	35	6	83	9, (9)	82	9
35	5, (1)	6	1	84	9, (6)	55	6
37	6	6	1	85	9, 4, 1	378	41
38	6, (6)	37	6	86	9, 3, 1, 1, 1, (8)	10405	1122
39	6, (4)	25	4	87	9, (3)	28	3
40	6, (3)	19	3	88	9, 2, 1, (1)	197	21
41	6, 2	32	5	89	9, 2, 3	500	53
42	6, (2)	13	2	90	9, (2)	19	2
43	6, 1, 1, 3, 1, (5)	3482	531	91	9, 1, 1, 5, (1)	1574	165
44	6, 1, 1, 1, (2)	199	30	92	9, 1, 1, 2, (4)	1151	120
45	6, 1, 2, (2)	161	24	93	9, 1, 1, 1, 4, (6)	12151	1260
46	6, 1, 3, 1, 1, 2, (6)	24335	3588	94	9, 1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, (8)	2143295	221064
47	6, 1, (5)	48	7	95	9, 1, (2)	39	4
48	6, (1)	7	1	96	9, 1, (3)	49	5
50	7	7	1	97	9, 1, 5, 1, 1, 1	5604	569
51	7, (7)	50	7	98	9, 1, (8)	99	10
52	7, 4, 1, (2)	649	90	99	9, (1)	10	1

§ 26. Die Pellsche Gleichung.

I. Als Pellsche Gleichung bezeichnet man die diophantische Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

wo D positiv ganz, aber kein Quadrat ist. Dieses von *Fermat* gestellte Problem wurde zuerst von *Pell* (nach dem Zeugnis *Eulers*) und *Wallis* **2 c**, später von *Euler* **9** mit ziemlichem Erfolg in Angriff genommen. Die vollständige Lösung, insbesondere der Nachweis, daß überhaupt immer Lösungen außer der trivialen $x = \pm 1$, $y = 0$ existieren, gelang aber erst Lagrange auf zwei verschiedenen Wegen. (*Lagrange* **1**, **2**.) Wir können unserer Untersuchung gleich eine etwas allgemeinere Gleichung zugrunde legen wie die Pellsche, nämlich

$$x^2 - Dy^2 = \pm L, \quad 0 < L < \sqrt{D},$$

und uns dabei auf relativ prime Lösungen beschränken. Darauf läßt sich offenbar der allgemeine Fall zurückführen; denn wenn x und y einen Teiler d gemein haben sollen, so muß L den Teiler d^2 haben, und man kann die ganze Gleichung durch d^2 dividieren. Auch darf man x, y positiv annehmen.

Ist $x = p$, $y = q$ eine Lösung unserer Gleichung, so muß nach Satz 12, Kap. II, wegen der Voraussetzung $L < \sqrt{D}$ jedenfalls $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch von $\sqrt{D}$ sein (*Lagrange* **7**). Wir werden daher einfach für x, y die verschiedenen Näherungszähler A_ν und -Nenner B_ν einsetzen und zusehen, ob die Gleichung erfüllt ist. Um die hierzu nötigen Hilfsmittel bereit zu stellen, gehen wir mit unserer gewohnten Bezeichnung aus von der für alle ν gültigen Formel

$$(1) \qquad \sqrt{D} = \xi_0 = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}} = \frac{A_{\nu-1}(\sqrt{D} + P_\nu) + A_{\nu-2}Q_\nu}{B_{\nu-1}(\sqrt{D} + P_\nu) + B_{\nu-2}Q_\nu}.$$

Multipliziert man mit dem Nenner herauf, so kommt

$$DB_{\nu-1} + (B_{\nu-1}P_\nu + B_{\nu-2}Q_\nu)\sqrt{D} = A_{\nu-1}\sqrt{D} + A_{\nu-1}P_\nu + A_{\nu-2}Q_\nu,$$

eine Gleichung, die sich sofort in zwei spaltet:

$$(2) \qquad A_{\nu-1} = B_{\nu-1}P_\nu + B_{\nu-2}Q_\nu,$$

$$(3) \qquad DB_{\nu-1} = A_{\nu-1}P_\nu + A_{\nu-2}Q_\nu.$$

Von diesen multiplizieren wir die erste mit $A_{\nu-1}$, die zweite mit $B_{\nu-1}$, und subtrahieren sie dann; dadurch ergibt sich

$$(4) \qquad A_{\nu-1}^2 - DB_{\nu-1}^2 = (A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1})Q_\nu = (-1)^\nu Q_\nu.$$

Unsere diophantische Gleichung wird daher dann und nur dann auflösbar sein, wenn L unter den Zahlen Q_ν vorkommt und wenn dabei das gegebene Vorzeichen $\pm$ den Wert $(-1)^\nu$ hat. Es gibt dann immer gleich unendlich viele Lösungen; denn ist k die Gliederzahl der primitiven Periode, so ist auch

$$A_{nk+\nu-1}^2 - DB_{nk+\nu-1}^2 = (-1)^{nk+\nu} Q_{nk+\nu} = (-1)^{nk}(-1)^\nu Q_\nu,$$

und dies wird mindestens für gerade n ebenfalls gleich $(-1)^\nu Q_\nu$. Wenn k ungerade ist, so kommt für gerade n das entgegengesetzte Zeichen wie für ungerade n; in diesem Fall ist also die Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm L$, wenn L unter den Zahlen Q_ν vorkommt, für beide Vorzeichen auflösbar. In der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{D}$ haben wir somit ein unfehlbares Mittel, um jederzeit zu entscheiden, ob die diophantische Gleichung lösbar ist, und gegebenenfalls die unendlich vielen Lösungen auch anzugeben. Diese Lösungsmethode stammt von *Euler* **9**, der bereits die Formel (4) fand.

Wir wenden uns jetzt speziell der Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1$$

zu. Bei dieser ist also ν derart zu wählen, daß $Q_\nu = 1$ ist, und dies findet nach § 25, I dann und nur dann statt, wenn ν ein Vielfaches von k. Setzen wir also $\nu = nk$ in (4) ein, so kommt

$$A_{nk-1}^2 - DB_{nk-1}^2 = (-1)^{nk},$$

und es gibt keine anderen Lösungen. Daher der in vollem Umfange von *Legendre* **3**, zum Teil auch schon von *Lagrange* **1**, **2** herrührende

Satz 18. *Die Pellsche Gleichung $x^2 - Dy^2 = +1$ ist immer lösbar, und zwar auf unendlich viele Arten. Ist $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung von $\sqrt{D}$, und ist k die Gliederzahl der primitiven Periode, so ist die Gesamtheit aller Lösungen:*

$$x = A_{nk-1},\ y = B_{nk-1} \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \ldots \text{ bei geradem } k \\ n = 2, 4, 6, \ldots \text{ bei ungeradem } k \end{pmatrix}.$$

Dagegen ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ dann und nur dann lösbar, wenn k ungerade ist, und zwar lauten dann die Lösungen:

$$x = A_{nk-1},\ y = B_{nk-1} \qquad (n = 1, 3, 5, 7, \ldots).$$

Übrigens kommt auch für $n = 0$ eine Lösung der Pellschen Gleichung heraus, nämlich die triviale $x = 1$, $y = 0$, welche kein Interesse bietet.

II. Die unendlich vielen Lösungen der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ stehen untereinander in einem bemerkenswerten schon von *Lagrange* **1** erkannten Zusammenhang. Nach den Fundamentalformeln ist nämlich

$$(5)\qquad \begin{cases} A_{\nu+k-1} = A_{k-1}A_{\nu-1,k} + A_{k-2}B_{\nu-1,k}, \\ B_{\nu+k-1} = B_{k-1}A_{\nu-1,k} + B_{k-2}B_{\nu-1,k}. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\frac{A_{\nu-1,k}}{B_{\nu-1,k}} = [b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k+\nu-1}] = [2b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1}]$$
$$= b_0 + [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{\nu-1}] = b_0 + \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{b_0 B_{\nu-1} + A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}.$$

Also, da beide Brüche irreduzibel sind:

$$A_{\nu-1,k} = b_0 B_{\nu-1} + A_{\nu-1}; \quad B_{\nu-1,k} = B_{\nu-1}.$$

Setzt man das in (5) ein, so kommt

$$A_{\nu+k-1} = A_{k-1}(b_0 B_{\nu-1} + A_{\nu-1}) + A_{k-2}B_{\nu-1}$$
$$= B_{\nu-1}(b_0 A_{k-1} + A_{k-2}) + A_{\nu-1}A_{k-1},$$
$$B_{\nu+k-1} = B_{k-1}(b_0 B_{\nu-1} + A_{\nu-1}) + B_{k-2}B_{\nu-1}$$
$$= B_{\nu-1}(b_0 B_{k-1} + B_{k-2}) + A_{\nu-1}B_{k-1}.$$

Dies läßt sich noch etwas anders schreiben; denn die Formeln (2), (3) besagen für $\nu = k$:

$$A_{k-1} = b_0 B_{k-1} + B_{k-2}\ ^{1)},$$
$$DB_{k-1} = b_0 A_{k-1} + A_{k-2}\ ^{1)},$$

so daß die beiden letzten Gleichungen noch übergehen in

$$A_{\nu+k-1} = B_{\nu-1}DB_{k-1} + A_{\nu-1}A_{k-1},$$
$$B_{\nu+k-1} = B_{\nu-1}A_{k-1} \quad + A_{\nu-1}B_{k-1}.$$

Diese beiden Formeln lassen sich aber in die eine zusammenfassen:

$$(6)\qquad A_{\nu+k-1} + B_{\nu+k-1}\sqrt{D} = (A_{\nu-1} + B_{\nu-1}\sqrt{D})(A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{D}).$$

Wählt man hier speziell $\nu = (n-1)k$, so ergibt sich

$$A_{nk-1} + B_{nk-1}\sqrt{D} = (A_{(n-1)k-1} + B_{(n-1)k-1}\sqrt{D})(A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{D}),$$

und hieraus sogleich

$$(7)\qquad A_{nk-1} + B_{nk-1}\sqrt{D} = (A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{D})^n.$$

Diese Formel drückt den erwähnten Zusammenhang aus. Sie gestattet, sobald die eine Lösung A_{k-1}, B_{k-1} der Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 1$

---

1) In der Tat ist ja $P_k = b_0$, wie sich aus $\xi_k = \xi_0 + b_0$, d. h. aus

$$\frac{\sqrt{D} + P_k}{Q_k} = \sqrt{D} + b_0$$

sofort ergibt.

bekannt ist, alle andern der Reihe nach sehr viel rascher zu berechnen, als dies durch die gewöhnlichen Rekursionsformeln für die Näherungszähler und -Nenner möglich wäre. Gleichung (7) zerfällt nämlich, wenn man auf die rechte Seite den binomischen Satz anwendet, sofort in die zwei folgenden:

$$(8)\begin{cases} A_{nk-1} = A_{k-1}^n + \binom{n}{2} A_{k-1}^{n-2} B_{k-1}^2 D + \binom{n}{4} A_{k-1}^{n-4} B_{k-1}^4 D^2 + \cdots \\ B_{nk-1} = \binom{n}{1} A_{k-1}^{n-1} B_{k-1} + \binom{n}{3} A_{k-1}^{n-3} B_{k-1}^3 D + \binom{n}{5} A_{k-1}^{n-5} B_{k-1}^5 D^2 + \cdots \end{cases}$$

In der Tabelle S. 101 sind in den mit x, y überschriebenen Spalten die Werte von A_{k-1}, B_{k-1} angegeben. Diese sind nun Lösungen der Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = +1$$

oder der Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = -1,$$

je nachdem k gerade oder ungerade ist. Das ist aber aus der Tabelle sofort zu ersehen; denn wenn k gerade, so ist die Gliederzahl des symmetrischen Periodenteiles ungerade; es gibt also ein mittleres Glied, und dies ist in der zweiten Spalte eingeklammert. Die Werte x, y der Tabelle geben daher eine Lösung der ersten oder zweiten Gleichung, je nachdem in der zweiten Spalte die letzte Zahl eingeklammert ist oder nicht. Im ersten Fall, wenn also k gerade, hat die zweite Gleichung, wie wir sahen, überhaupt keine Lösung. Im zweiten Fall lautet die kleinste Lösung der ersten Gleichung: $x = A_{2k-1}$, $y = B_{2k-1}$, und ergibt sich daher nach (7) aus der Formel

$$x + y\sqrt{D} = (A_{k-1} + B_{k-1}\sqrt{D})^2,$$

also

$$x = A_{k-1}^2 + DB_{k-1}^2, \quad y = 2A_{k-1}B_{k-1}.$$

Für $D = 13$ zum Beispiel liefert die Tabelle $A_{k-1} = 18$, $B_{k-1} = 5$, und da die letzte Zahl der zweiten Spalte nicht eingeklammert ist, so ist dies eine Lösung der Gleichung $x^2 - 13y^2 = -1$, wie auch die Ausrechnung bestätigt. Es ist nun

$$(18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13};$$

also ist $x = 649$, $y = 180$ die kleinste Lösung der Gleichung $x^2 - 13y^2 = 1$.

Umfangreichere Tafeln für die kleinste Lösung der Pellschen Gleichung findet man bei *Degen* **1** (bis $D = 1000$), und bei *Legendre* **3** (bis $D = 1003$).

III. Ein Blick auf die zweite Spalte unserer Tabelle zeigt, daß die letzte Ziffer viel häufiger eingeklammert als nicht eingeklammert ist. Das heißt aber, die Zahlen D, für welche die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$

lösbar ist, sind verhältnismäßig selten.[1]) Ein allgemeines Kriterium, das über die Lösbarkeit dieser Gleichung entscheidet, ohne daß man die Kettenbruchentwicklung wirklich durchführt, ist nicht bekannt. Doch gibt es in dieser Richtung einige bemerkenswerte Sätze, die wir jetzt entwickeln wollen.

Wenn die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ besteht, so ist zunächst D ein Teiler von $x^2 + 1$; nach Satz 5, Kap. II, muß daher D als Summe von zwei relativ primen Quadraten darstellbar sein. In der Tat ist uns eine solche Darstellung auch schon bekannt. Denn da in unserem Fall k ungerade, also etwa $k = 2r + 1$ ist, so folgt aus Satz 12 mit $Q_0 = 1$:

$$D = P_{r+1}^2 + Q_{r+1}^2,$$

und wir müssen nur noch zeigen, daß P_{r+1} und Q_{r+1} relativ prim sind. Haben aber P_{r+1} und Q_{r+1} einen Teiler d gemein, so muß D durch d^2 teilbar sein, und aus den nach Formel (4) bestehenden Gleichungen

$$A_r^2 - DB_r^2 \quad = (-1)^{r+1} Q_{r+1},$$

$$A_{r-1}^2 - DB_{r-1}^2 = (-1)^r Q_r = (-1)^r Q_{r+1} \text{ [2])}$$

folgt dann, daß auch A_r^2 und A_{r-1}^2 den Teiler d haben Da aber A_r und A_{r-1} relativ prim sind, so ist $d = 1$. Wir erhalten also

Satz 19. *Die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ ist sicher nur dann auflösbar, wenn D die Summe von zwei relativ primen Quadraten ist.*

Diese Bedingung ist aber nur notwendig, nicht hinreichend. Zum Beispiel ist $34 = 25 + 9$ die Summe von zwei relativ primen Quadraten; trotzdem ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, wie die Klammer in der zweiten Spalte der Tabelle anzeigt, nicht lösbar.

Weiter beweisen wir

Satz 20. *Von den drei Gleichungen*

$$x^2 - Dy^2 = -1; \quad x^2 - Dy^2 = 2; \quad x^2 - Dy^2 = -2$$

ist, abgesehen vom Fall $D = 2$, höchstens eine lösbar.

Beweis: Sei zunächst $D \geqq 5$. Dann ist $2 < \sqrt{D}$, also kann die Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ nach den Erörterungen zu Beginn dieses Paragraphen nur bestehen, wenn 2 unter den Zahlen Q_ν vorkommt. Nach Satz 13 ist aber $Q_\nu = 2$ nur für $\nu \equiv \frac{k}{2} \pmod{k}$ möglich; es ist also k gerade, und daher die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht lösbar.

---

1) Eine Tabelle aller Zahlen D unter 7000, für welche die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ lösbar ist, hat *Seeling* 2 aufgestellt.

2) Es ist $Q_r = Q_{r+1}$, weil die Zahlenreihe $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2r+1}$ symmetrisch ist (nach Satz 10).

Aber auch die Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ ist nicht für beide Vorzeichen möglich; es ist nämlich, wenn $k = 2r$ gesetzt wird und $Q_r = 2$ ist, nach (4):

$$A_{nk+r-1}^2 - DB_{nk+r-1}^2 = (-1)^{nk+r} Q_{nk+r} = (-1)^r \cdot 2,$$

und wir wissen, daß keine anderen Lösungen existieren. Nun bleiben noch die bisher ausgeschlossenen Zahlen $D = 2, 3$ zu untersuchen. Für $D = 3$ ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$, wie die Klammer in der Tabelle zeigt, nicht möglich; ebensowenig ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 2$ möglich, weil offenbar $x^2 - 2$ nie durch 3 teilbar sein kann. Endlich für $D = 2$ sind alle drei Gleichungen lösbar; es ist nämlich

$$1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1; \quad 2^2 - 2 \cdot 1^2 = 2; \quad 4^2 - 2 \cdot 3^2 = -2,$$

so daß $D = 2$ als Ausnahme bestehen bleibt.

Der hiermit bewiesene Satz 20 läßt sich in gewissen Fällen umkehren. Sei nämlich die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht lösbar, also $k = 2r$. Wegen der Symmetrie der Zahlenreihe $P_1, P_2, \ldots, P_{2r}$ (Satz 10) folgt dann aus der schon oft benutzten Formel (4) S. 83 für $\nu = r$:

$$2P_r = b_r Q_r. \tag{9}$$

Setzt man daher in den Formeln (2), (3) speziell $\nu = r$ und multipliziert mit 2, so kommt

$$2A_{r-1} = B_{r-1} \cdot 2P_r + 2B_{r-2} Q_r = (B_{r-1} b_r + 2B_{r-2}) Q_r, \tag{10}$$

$$2DB_{r-1} = A_{r-1} \cdot 2P_r + 2A_{r-2} Q_r = (A_{r-1} b_r + 2A_{r-2}) Q_r. \tag{11}$$

Folglich ist Q_r ein (von 1 verschiedener) gemeinsamer Teiler von $2A_{r-1}$ und $2DB_{r-1}$; also, weil A_{r-1} und B_{r-1} relativ prim sind, ein gemeinsamer Teiler von $2A_{r-1}$ und $2D$. Aus Formel (4) für $\nu = r$ ergibt sich dann, wenn man mit 4 multipliziert und durch Q_r dividiert:

$$Q_r \left(\frac{2A_{r-1}}{Q_r}\right)^2 - \frac{2D}{Q_r} \cdot 2B_{r-1}^2 = (-1)^r \cdot 4.$$

Infolgedessen haben die ganzen Zahlen Q_r und $\frac{2D}{Q_r}$ keinen ungeraden Faktor gemein. *Daher enthält Q_r jeden ungeraden Primfaktor von D, wenn überhaupt, so in der gleichen Potenz wie D.*

Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz 21. *Ist die nichtquadratische Zahl D eine (erste oder höhere) Potenz einer ungeraden Primzahl oder das Doppelte einer solchen Potenz, so ist von den drei Gleichungen*

$$x^2 - Dy^2 = -1; \quad x^2 - Dy^2 = 2; \quad x^2 - Dy^2 = -2$$

immer eine, aber auch nur eine lösbar.

Beweis. Daß höchstens eine dieser drei Gleichungen lösbar ist, wurde bereits in Satz 20 bewiesen; es bleibt noch zu zeigen, daß wirklich eine lösbar ist. Sei etwa die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ nicht lösbar, also $k = 2r$. Dann muß nach dem soeben Bewiesenen Q_r ein Teiler von $2D$ sein, der jeden ungeraden Primfaktor von D, wenn überhaupt, so in der gleichen Potenz wie D enthält. Dies gibt aber, weil D nach unsern Voraussetzungen bloß einen ungeraden Primfaktor hat und auch nicht durch 4 teilbar ist, nur die fünf Möglichkeiten

$$Q_r = 2D,\ D,\ \frac{D}{2},\ 4,\ 2,$$

und zwar die Fälle $Q_r = \frac{D}{2}$, 4 nur, wenn D gerade ist. Nun sind aber die Möglichkeiten $Q_r = 2D,\ D,\ \frac{D}{2}$ ohne weiters auszuschließen. Denn wegen (9) müßte dann P_r durch D oder $\frac{D}{2}$ teilbar sein; allein es ist nach § 25, Formel (3) $P_r \leqq b_0$, also a fortiori, da in Satz 21 D mindestens gleich 3 ist, $P_r \leqq \sqrt{D} - 1 < \frac{D}{2}$. Aber auch $Q_r = 4$ ist nicht möglich. Dann wäre nämlich nach (10) A_{r-1} gerade, also B_{r-1} ungerade; daher in (11) die rechte Seite durch 8, die linke nur durch 4 teilbar. Es bleibt also einzig $Q_r = 2$ übrig. Dann ist aber nach Formel (4) für $\nu = r$:

$$A_{r-1}^2 - DB_{r-1}^2 = (-1)^r \cdot 2,$$

womit Satz 21 vollständig bewiesen ist.

Der Satz läßt sich für spezielle Formen von Primzahlen noch präzisieren:

Satz 22. *Ist die nichtquadratische Zahl D eine Potenz einer Primzahl der Form $4n + 1$, oder das Doppelte einer Potenz einer Primzahl der Form $8n + 5$, so ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -1$ lösbar.*

Beweis. Nach Satz 21 ist nur zu zeigen, daß die Gleichungen $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ unmöglich sind. Wenn aber erstens D eine Potenz von $4n + 1$ ist, so hat D selbst die Form $4n + 1$, und dann ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ unmöglich, weil die rechte Seite $\equiv 2 \pmod 4$ ist, während die linke nur $\equiv 0,\ \pm 1$ sein kann.

Wenn aber zweitens D einen Primfaktor der Form $8n + 5$ hat, so muß dieser, wenn die Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ lösbar ist, auch ein Teiler von $x^2 \mp 2$ sein, also nach Satz 24, Kap. II die Form $a^2 \mp 2b^2$ haben. Nun sieht man aber leicht, daß eine Zahl der Form $a^2 \mp 2b^2$ nicht $\equiv 5 \pmod 8$ sein kann, so daß die Gleichung $8n + 5 = a^2 \mp 2b^2$ unmöglich ist. Also hat die Gleichung $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ keine Lösung.

Man bemerke, daß für das Doppelte einer Potenz einer Primzahl der Form $8n + 1$ ein ähnlicher Satz nicht gilt. Vielmehr gibt es unter

diesen Zahlen sowohl solche, für welche $x^2 - Dy^2 = -1$ lösbar ist (Beispiel: $15^2 - 226 \cdot 1^2 = -1$), als auch solche, für die $x^2 - Dy^2 = 2$ lösbar ist (Beispiel: $6^2 - 34 \cdot 1^2 = 2$), und endlich auch solche, für die $x^2 - Dy^2 = -2$ lösbar ist (Beispiel: $12^2 - 146 \cdot 1^2 = -2$).

Satz 23. *Ist die nichtquadratische Zahl D eine Potenz einer Primzahl der Form $8n + 7$, oder das Doppelte einer solchen Potenz, so ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 2$ lösbar.*

Beweis: Nach Satz 21 ist nur zu zeigen, daß die Gleichungen

$$x^2 - Dy^2 = -1; \; x^2 - Dy^2 = -2$$

unmöglich sind. Da aber D einen Primfaktor der Form $8n + 7$ hat, so müßte dieser, wenn eine der beiden Gleichungen möglich wäre, auch ein Teiler von $x^2 + 1$ bzw. $x^2 + 2$ sein. Er müßte daher nach den Sätzen 5 und 24, Kap. II selbst von der Form $a^2 + b^2$ bzw. $a^2 + 2b^2$ sein. Man sieht aber leicht, daß diese Ausdrücke nicht $\equiv 7 \pmod 8$ sein können, daß also die Gleichungen

$$8n + 7 = a^2 + b^2; \; 8n + 7 = a^2 + 2b^2$$

nicht möglich sind.

Satz 24. *Ist die nichtquadratische Zahl D eine Potenz einer Primzahl der Form $8n + 3$, oder das Doppelte einer solchen Potenz, so ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -2$ lösbar.*

Beweis. Es braucht wieder bloß gezeigt zu werden, daß die Gleichungen

$$x^2 - Dy^2 = -1; \; x^2 - Dy^2 = 2$$

unmöglich sind. Da nun D einen Primfaktor der Form $8n + 3$ hat, so müßte dieser, wenn eine der beiden Gleichungen möglich wäre, ein Teiler von $x^2 + 1$, bzw. $x^2 - 2$ sein. Nach den Sätzen 5 und 24, Kap. II müßte er also die Form $a^2 + b^2$ bzw. $a^2 - 2b^2$ haben. Aber die Gleichungen

$$8n + 3 = a^2 + b^2; \; 8n + 3 = a^2 - 2b^2$$

sind offenbar wieder unmöglich.

Die Sätze 21 bis 24 stammen in der Hauptsache von *Legendre* **3**, *Göpel* **1**, *Roberts* **1**. Durch Kombination der Sätze 19 und 22 erhält man noch einen der schönsten Sätze der elementaren Zahlentheorie:

Satz 25. *Eine Primzahl der Form $4n + 1$ läßt sich als Summe von zwei Quadraten darstellen.*

Dieses *Fermat*sche Theorem wurde zuerst von *Euler* **7** bewiesen; ein Beweis, der sich im Prinzip mit unserm deckt, findet sich zuerst bei *Gauß* **1**, § 265. Ähnliche Sätze gelten auch für die Primzahlen der Form $8n + 7$ und $8n + 3$. Nach Satz 23 ist nämlich eine Primzahl

der Form $8n+7$ Teiler von x^2-2, so daß sie nach Satz 24, Kap. II die Gestalt a^2-2b^2 hat. Ebenso ist eine Primzahl der Form $8n+3$ nach Satz 24 Teiler von x^2+2, so daß sie nach Satz 24, Kap. II die Gestalt a^2+2b^2 hat. Daher:

Satz 26. *Eine Primzahl der Form $8n+7$ läßt sich in der Gestalt a^2-2b^2 darstellen.* (*Lagrange* **5**, *Göpel* **1**.)

Satz 27. *Eine Primzahl der Form $8n+3$ läßt sich in der Gestalt a^2+2b^2 darstellen.* (*Lagrange* **5**, *Göpel* **1**.)

Hierzu sei bemerkt, daß es ganz ohne Belang ist, die Sätze 25, 26, 27 so, wie die vorausgehenden, ebenfalls für höhere Potenzen der betreffenden Primzahlen oder deren Doppeltes auszusprechen. Denn die Zahl 2, sowie das Produkt von zwei beliebigen Zahlen der betreffenden Form läßt sich stets wieder in die gleiche Form setzen:

$$2=1^2+1^2;\quad 2=0^2+2\cdot 1^2;\quad 2=2^2-2\cdot 1^2;$$

$$(a^2+\lambda b^2)(c^2+\lambda d^2)=(ac+\lambda bd)^2+\lambda(ad-bc)^2\quad (\lambda=1,\pm 2).$$

§ 27. Kulminierende und fastkulminierende Perioden.

I. Daß es zu jedem Anfangsglied b_0 kulminierende Perioden gibt, zeigt das zweite Beispiel auf Seite 99. Nach diesem ist nämlich speziell für $m=2$:

$$\sqrt{b_0^2+2}=[b_0,\overline{b_0,\ 2b_0}];$$

hier ist die Periode kulminierend. Eine fastkulminierende entsteht aus dem vierten Beispiel auf Seite 100, wenn man $b_1=1$, $m=b_0$ setzt; es wird dann nämlich $b_2=b_0-1$, und man erhält den Kettenbruch mit fastkulminierender Periode:

$$\sqrt{(b_0+1)^2-2}=[b_0,\overline{1,\ b_0-1,\ 1,\ 2b_0}].$$

Beide Formeln finden sich bereits bei *Euler* **9**. Außer diesen Beispielen ist dem vorigen Paragraphen zu entnehmen, daß, wenn D eine Potenz einer Primzahl der Form $4n+3$ oder das Doppelte ist, die Periode von $\sqrt{D}$ entweder kulminierend oder fastkulminierend wird. In der Tat ist dann nach den Sätzen 23, 24 eine der Gleichungen $x^2-Dy^2=\pm 2$ lösbar, folglich kommt unter den Zahlen Q_ν die 2 vor. Dann ist aber nach Satz 15 das Mittelglied des symmetrischen Periodenteiles gleich b_0 oder b_0-1, also in der Tat die Periode kulminierend oder fastkulminierend.

Wir wollen jetzt neben diesen Einzelfällen auch die allgemeine Form derjenigen ganzen Zahlen untersuchen, deren Quadratwurzel kul-

minierende oder fastkulminierende Perioden besitzen. Zunächst sind die beiden Perioden von

$$\sqrt{8} = [2, \overline{1, 4}]; \quad \sqrt{12} = [3, \overline{2, 6}]$$

fastkulminierend; von ihnen sehen wir in der Folge ab, da sie der allgemeinen Untersuchung sich nicht unterordnen. Bezeichnen wir dann die Gliederzahl der primitiven Periode mit $k = 2r$, so ergibt sich der Wert des Kettenbruches

$$\sqrt{D} = [b_0, \overline{b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_1, 2b_0}]$$

wie auf Seite 97 aus der Gleichung

$$(1) \qquad DB_{2r-1} = b_0 A_{2r-1} + A_{2r-2}.$$

Da aber außerdem $b_r = b_0$ oder $b_0 - 1$ sein soll, so muß nach Satz 15 $Q_r = 2$, und folglich nach dem gleichen Satz auch $P_r = b_r$ sein. Die Formeln (2), (3) des vorigen Paragraphen lauten daher für $\nu = r$:

$$(2) \qquad A_{r-1} = b_r B_{r-1} + 2B_{r-2}$$

$$(3) \qquad DB_{r-1} = b_r A_{r-1} + 2A_{r-2}.$$

Wir werden am Schluß dieses Paragraphen (Ziffer IV) den Beweis nachtragen, daß die Gleichungen (2), (3) eo ipso (1) nach sich ziehen. Unter Vorwegnahme dieses Resultats haben wir demnach nur die Aufgabe, die Zahlen b_ν und D in allgemeinster Weise so zu wählen, daß die Gleichungen (2), (3) erfüllt sind, und zugleich $b_r = b_0$ oder $b_r = b_0 - 1$ ist. Da dann Gleichung (1) von selbst erfüllt ist, haben wir damit im ersten Fall die allgemeinste kulminierende, im zweiten die allgemeinste fastkulminierende Periode. Nun läßt sich Gleichung (2) etwas anders schreiben; nach den Formeln (27), Kap. I ist nämlich identisch

$$(4) \qquad A_{r-1} = b_0 A_{r-2,1} + B_{r-2,1}; \quad B_{r-1} = A_{r-2,1}; \quad B_{r-2} = A_{r-3,1},$$

wodurch (2) übergeht in

$$(5) \qquad 2A_{r-3,1} = B_{r-2,1} + (b_0 - b_r) A_{r-2,1}.$$

Indem wir zuerst den Fall der kulminierenden Perioden behandeln, haben wir $b_r = b_0$; also kommt

$$2A_{r-3,1} = B_{r-2,1}.$$

Dies ist zunächst eine Bedingung, welcher die Teilnenner $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$ genügen müssen; wir denken sie erfüllt. Dann handelt es sich noch darum, die Zahlen $b_0 = b_r$ und D so zu wählen, daß auch Gleichung (3) besteht. Nun ist aber wieder nach den Formeln (27), Kap. I:

$$A_{r-1} = b_0 A_{r-2,1} + B_{r-2,1}; \quad B_{r-1} = A_{r-2,1}$$

$$A_{r-2} = b_0 A_{r-3,1} + B_{r-3,1} = b_0 \frac{B_{r-2,1}}{2} + B_{r-3,1}.$$

Setzt man dies in Gleichung (3) ein und berücksichtigt $b_r = b_0$, so geht sie über in

$$DA_{r-2,1} = b_0(b_0 A_{r-2,1} + B_{r-2,1}) + 2\left(b_0 \frac{B_{r-2,1}}{2} + B_{r-3,1}\right),$$

oder

$$A_{r-2,1}(D - b_0^2) - B_{r-2,1} \cdot 2b_0 = 2B_{r-3,1}.$$

Dies ist nun eine in den Unbekannten $2b_0$, $D - b_0^2$ lineare diophantische Gleichung, die sich sofort auflösen läßt. Da nämlich identisch

$$A_{r-2,1} B_{r-3,1} - B_{r-2,1} A_{r-3,1} = (-1)^{r-3}$$

ist, so lautet die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} 2b_0 &= (-1)^{r-3} A_{r-3,1} \cdot 2B_{r-3,1} + m A_{r-2,1} \\ D - b_0^2 &= (-1)^{r-3} B_{r-3,1} \cdot 2B_{r-3,1} + m B_{r-2,1} \\ &= (-1)^{r-3} 2B_{r-3,1}^2 + 2m A_{r-3,1}, \end{aligned}$$

wo m eine ganze Zahl. Nun ist aber $B_{r-2,1} = 2A_{r-3,1}$ gerade, folglich $A_{r-2,1}$ gewiß ungerade. Es muß also, damit b_0 ganzzahlig wird, m eine gerade Zahl sein; setzt man daher $m = 2n$, so ergibt sich der folgende von *Muir* 6 herrührende

Satz 28. *Wenn der regelmäßige Kettenbruch*

$$[b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{r-1}, b_0, b_{r-1}, \ldots, b_1, 2b_0}]$$

mit kulminierender Periode die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl D sein soll, so müssen bei der Bezeichnung des § 5, II die Teilnenner b_1, $b_2, \ldots, b_{r-1}$ die Gleichung $2A_{r-3,1} = B_{r-2,1}$ befriedigen. Ist dies der Fall, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung darin, daß b_0 die Form hat

$$b_0 = n A_{r-2,1} - (-1)^r A_{r-3,1} B_{r-3,1},$$

wo n eine ganze Zahl. Und zwar ist dann

$$D = b_0^2 + 4n A_{r-3,1} - (-1)^r 2B_{r-3,1}^2.$$

Als Beispiel wollen wir alle ganzen Zahlen bestimmen, deren Quadratwurzeln kulminierende Perioden von 6 Gliedern haben. Hier ist $r = 3$; die Bedingung $2A_{r-3,1} = B_{r-2,1}$ lautet also einfach: $2A_{0,1} = B_{1,1}$, das heißt

$$2b_1 = b_2.$$

Für b_0 und D ergeben sich die Ausdrücke

$$\begin{aligned} b_0 &= nA_{1,1} + A_{0,1}B_{0,1} = n(b_1 b_2 + 1) + b_1 = n(2b_1^2 + 1) + b_1, \\ D &= b_0^2 + 4nA_{0,1} + 2B_{0,1}^2 = b_0^2 + 4nb_1 + 2. \end{aligned}$$

Man erhält also für die allgemeinste 6-gliedrige kulminierende Periode die Formel

$$\sqrt{b_0^2 + 4nb_1 + 2} = [b_0, \overline{b_1, 2b_1, b_0, 2b_1, b_1, 2b_0}],$$

wobei

$$b_0 = n(2b_1^2 + 1) + b_1,$$

und wo n, b_1 beliebige positive ganze Zahlen sind. Auch $n = 0$ ist zulässig; doch ist dann die 6-gliedrige Periode imprimitiv, während die primitive nur zwei Glieder umfaßt.

II. Wir untersuchen nunmehr ebenso die fastkulminierenden Perioden. Bei diesen ist $b_r = b_0 - 1$, also lautet diesmal die Bedingung (5)

$$2A_{r-3,1} = B_{r-2,1} + A_{r-2,1}.$$

Ist sie erfüllt, so geht (3) über in

$$\begin{aligned} DA_{r-2,1} &= (b_0 - 1)(b_0 A_{r-2,1} + B_{r-2,1}) + 2(b_0 A_{r-3,1} + B_{r-3,1}) \\ &= b_0^2 A_{r-2,1} + 2b_0 B_{r-2,1} - B_{r-2,1} + 2B_{r-3,1}, \end{aligned}$$

oder

$$A_{r-2,1}(D - b_0^2) - B_{r-2,1}(2b_0 - 1) = 2B_{r-3,1}.$$

Das ist jetzt eine lineare diophantische Gleichung für die Unbekannten $2b_0 - 1$ und $D - b_0^2$; ihre allgemeine Lösung lautet analog wie vorhin

$$\begin{aligned} 2b_0 - 1 &= (-1)^{r-3} A_{r-3,1} \cdot 2B_{r-3,1} + mA_{r-2,1}, \\ D - b_0^2 &= (-1)^{r-3} B_{r-3,1} \cdot 2B_{r-3,1} + mB_{r-2,1}. \end{aligned}$$

Nun sind die Zahlen $A_{r-2,1}$, $B_{r-2,1}$ relativ prim, können also nicht beide gerade sein. Wegen der Bedingung $2A_{r-3,1} = B_{r-2,1} + A_{r-2,1}$ sind sie daher beide ungerade. Dann wird aber der Ausdruck für b_0 dann und nur dann ganzzahlig, wenn m ungerade ist. Setzt man demgemäß $m = 2n + 1$, so erhält man den ebenfalls von *Muir* 6 herrührenden

Satz 29. *Wenn der Kettenbruch*

$$[b_0, \overline{b_1, \ldots, b_{r-1}, b_0 - 1, b_{r-1}, \ldots, b_1, 2b_0}]$$

mit fastkulminierender Periode die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl $D(\neq 8, 12)$ *sein soll, so müssen die Teilnenner* $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$ *bei der Bezeichung des § 5, II die Gleichung* $2A_{r-3,1} = B_{r-2,1} + A_{r-2,1}$ *befriedigen. Ist dies der Fall, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung darin, daß* b_0 *die Form hat*

$$b_0 = \frac{1 + (2n+1)A_{r-2,1}}{2} - (-1)^r A_{r-3,1} B_{r-3,1},$$

wo n *eine ganze Zahl. Und zwar ist dann*

$$D = b_0^2 + (2n+1)B_{r-2,1} - (-1)^r 2B_{r-3,1}^2.$$

Bereits in Satz 16 fanden wir, daß bei einer fastkulminierenden Periode von $2r$ Gliedern $b_{r-1} = 1$ sein muß; das muß sich natürlich auch aus unsern jetzigen Formeln ergeben. In der Tat besagt die Bedingung

$$2A_{r-3,1} = B_{r-2,1} + A_{r-2,1}$$

soviel wie

$$\begin{aligned} 2B_{r-2} &= B_{r-2,1} + B_{r-1} \\ &= B_{r-2,1} + b_{r-1} B_{r-2} + B_{r-3}. \end{aligned}$$

Nun können $B_{r-2,1}$ und B_{r-3} nicht beide Null sein; denn das erstere würde $r = 1$, das letztere $r = 2$ erfordern. Es ist somit

$$2B_{r-2} > b_{r-1}B_{r-2},$$

daher $b_{r-1} < 2$, also in der Tat $b_{r-1} = 1$.

Als Beispiel suchen wir die allgemeine Form der 6-gliedrigen fastkulminierenden Perioden. Bei diesen ist $r = 3$; die Bedingung

$$2A_{r-3,1} = B_{r-2,1} + A_{r-2,1}$$

lautet also einfach $2A_{0,1} = B_{1,1} + A_{1,1}$, oder

$$2b_1 = b_2 + b_1 b_2 + 1,$$

oder, da $b_2 = b_{r-1} = 1$ sein muß,

$$2b_1 = b_1 + 2; \text{ also } b_1 = 2.$$

Sodann ist

$$A_{r-3,1} = A_{0,1} = b_1 = 2; \; A_{r-2,1} = A_{1,1} = b_1 b_2 + 1 = 3$$

$$B_{r-3,1} = B_{0,1} = 1; \qquad B_{r-2,1} = B_{1,1} = b_2 = 1.$$

Also wird

$$b_0 = \frac{1 + (2n+1)\cdot 3}{2} + 2 = 3n + 4,$$

$$D = b_0^2 + 2n + 1 + 2 = (3n+4)^2 + 2n + 3.$$

Setzt man noch $n - 1$ an Stelle von n, so ergibt sich

$$\sqrt{(3n+1)^2 + 2n + 1} = [3n+1, \overline{2, 1, 3n, 1, 2, 6n+2}]$$

als die allgemeine Form einer fastkulminierenden Periode von sechs Gliedern.

III. Die Zahlen D, deren Quadratwurzeln kulminierende oder fastkulminierende Perioden besitzen, haben noch eine bemerkenswerte Eigenschaft, welche sich aus den Sätzen 28 und 29 nicht erkennen läßt. Wir sehen dabei wieder von den Zahlen $D = 8$ und 12 ab. Ist $k = 2r$ die Gliederzahl der primitiven Periode, so ist nach Satz 15 $Q_r = 2$, also

$$A_{r-1}^2 - DB_{r-1}^2 = (-1)^r \cdot 2 \qquad (\S\ 26, \text{ Formel } (4)).$$

Daher ist D ein Teiler von $A_{r-1}^2 - (-1)^r \cdot 2$, und muß daher nach Satz 24, Kap. II sich selbst in der Gestalt $a^2 - (-1)^r 2b^2$ darstellen lassen. Beispielsweise müssen die Zahlen

$$[n(2b_1^2 + 1) + b_1]^2 + 4nb_1 + 2; \; (3n+1)^2 + 2n + 1$$

sich in der Form $a^2 + 2b^2$ darstellen lassen; denn ihre Quadratwurzeln haben, wie wir Seite 112 und 114 sahen, kulminierende bzw. fastkulminierende Perioden von 6 Gliedern. Und in der Tat ist auch identisch:

$$[n(2b_1^2+1)+b_1]^2+4nb_1+2=(2nb_1^2+b_1-n)^2+2(2nb_1+1)^2$$
$$(3n+1)^2+2n+1=n^2+2(2n+1)^2.$$

Es wäre nun höchst wünschenswert, ist aber bis heute nicht erreicht, daß man ebenso wie bei diesen zwei Beispielen, auch im allgemeinen Fall die Darstellung von D in der Gestalt $a^2 \pm 2b^2$ wirklich leisten könnte, etwa auf Grund der in den Sätzen 28 und 29 gegebenen Muirschen Darstellung. Dazu wäre wohl in erster Linie eine vollständige Diskussion der in diesen Sätzen auftretenden Bedingungsgleichungen

$$2A_{r-3,1}=B_{r-2,1} \text{ bzw. } 2A_{r-3,1}=B_{r-2,1}+A_{r-2,1}$$

erforderlich, die aber bis jetzt noch nicht geleistet ist.

IV. Es ist noch der Beweis nachzutragen, daß die Gleichung (1) eine Folge von (2), (3) ist. Nun hat der symmetrische Kettenbruch

$$[b_0, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_1, b_0] = \frac{b_0 A_{2r-1}+A_{2r-2}}{b_0 B_{2r-1}+B_{2r-2}}$$

eine ungerade Gliederzahl $2r+1$. Durch Anwendung der für diesen Fall aufgestellten Formeln (11), (13) des § 11 erhält man daher:

$$b_0 A_{2r-1}+A_{2r-2}=A_{r-1}(A_r+A_{r-2})=A_{r-1}(b_r A_{r-1}+2A_{r-2}),$$
$$B_{2r-1}=B_{r-1}(B_r+B_{r-2})=B_{r-1}(b_r B_{r-1}+2B_{r-2}).$$

Also mit Rücksicht auf (2) und (3):

$$b_0 A_{2r-1}+A_{2r-2}=A_{r-1}DB_{r-1},$$
$$B_{2r-1}=B_{r-1}A_{r-1},$$

woraus in der Tat sofort die Gleichung (1) hervorgeht. W. z. b. w.

Viertes Kapitel.

Hurwitzsche Kettenbrüche. — Transzendente Zahlen.

§ 28. Drei Hilfssätze.

I. Seien ξ_0, η_0 zwei irrationale Zahlen, welche durch die Gleichung verbunden sind:

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d}, \tag{1}$$

wo a, b, c, d ganze rationale Zahlen bedeuten. Natürlich ist $ad - bc$ von Null verschieden, weil sonst $\eta_0 = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, also rational wäre. Entwickelt man ξ_0 in einen regelmäßigen Kettenbruch

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots] \tag{2}$$

und bezeichnet wieder mit $A_{\nu-1}$, $B_{\nu-1}$ den Näherungszähler und -Nenner $(\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von ξ_0, so werden die Zahlen

$$\frac{a\dfrac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} + b}{c\dfrac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} + d} = \frac{aA_{\nu-1} + bB_{\nu-1}}{cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1}}$$

sich beliebig wenig von η_0 unterscheiden, wenn ν hinreichend groß ist. Daraus folgt zwar keineswegs, daß es Näherungsbrüche von η_0 sind; doch kann dies für einzelne Werte von ν sehr wohl der Fall sein. Um hierfür wenigstens ein hinreichendes Kriterium zu gewinnen, setzen wir die Zahl

$$ad - bc = n \tag{3}$$

als positiv voraus; ferner sei auch $c\xi_0 + d$ positiv. Dann ist nach dem Näherungsgesetz (§ 13, Formel (10))

$$A_{\nu-1} - \xi_0 B_{\nu-1} = \frac{\delta}{B_\nu},$$

wobei $|\delta| < 1$ mit Ausschluß der Gleichheit, weil ξ_0 irrational. Also ist

$$cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1} = c\left(\xi_0 B_{\nu-1} + \frac{\delta}{B_\nu}\right) + dB_{\nu-1}$$
$$= B_{\nu-1}(c\xi_0 + d) + \frac{c\delta}{B_\nu}.$$

Daher ist auch $cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1}$ gewiß positiv, sobald nur ν so groß ist, daß die Ungleichungen

$$B_{\nu-1}(c\xi_0 + d) \geqq 1; \quad B_\nu \geqq |c| \tag{4}$$

bestehen. Wir nehmen dies von jetzt ab an.

Nach Satz 11, Kap. II wird nun $\frac{aA_{\nu-1} + bB_{\nu-1}}{cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1}}$ sicher dann einem Näherungsbruch von η_0 gleich sein, wenn

$$\left|\eta_0 - \frac{aA_{\nu-1} + bB_{\nu-1}}{cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1}}\right| < \frac{1}{2(cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1})^2} \tag{5}$$

ist. Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber gleich

$$\left|\frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d} - \frac{aA_{\nu-1} + bB_{\nu-1}}{cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1}}\right| = \frac{(ad - bc)\,|\xi_0 B_{\nu-1} - A_{\nu-1}|}{(c\xi_0 + d)(cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1})}$$
$$= \frac{n\frac{|\delta|}{B_\nu}}{(c\xi_0 + d)(cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1})},$$

so daß die Bedingung (5) übergeht in

$$\frac{(c\xi_0 + d)B_\nu}{|\delta|n} > 2(cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1})$$
$$= 2B_{\nu-1}(c\xi_0 + d) + \frac{2c\delta}{B_\nu}.$$

Diese wird aber wegen $|\delta| < 1$, $B_\nu \geqq b_\nu B_{\nu-1}$ a fortiori erfüllt, wenn man sogar

$$\frac{c\xi_0 + d}{n} b_\nu B_{\nu-1} \geqq 2B_{\nu-1}(c\xi_0 + d) + \frac{2|c|}{B_\nu}$$

fordert, oder, was dasselbe ist:

$$b_\nu \geqq 2n + \frac{2n|c|}{(c\xi_0 + d)B_{\nu-1}B_\nu}. \tag{6}$$

Hieraus schließt man leicht, daß auch die einfachere Bedingung

$$b_\nu \geqq 2n + |c| \tag{7}$$

genügt. Aus dieser ergibt sich nämlich

$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \geqq b_\nu \geqq 2n + |c| \geqq 2n;$$

also auch

$$b_\nu \geqq 2n + |c| \geqq 2n + \frac{2n|c|}{B_\nu}.$$

Wegen der ersten der vorausgesetzten Ungleichungen (4) folgt hieraus erst recht

$$b_\nu \geqq 2n + \frac{2n|c|}{(c\xi_0 + d)\, B_{\nu-1} B_\nu},$$

also in der Tat (6), wie behauptet war. Zusammenfassend ergibt sich:

Hilfssatz 1. *Wenn zwei irrationale Zahlen ξ_0, η_0 durch die Relation*

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d} \quad (c\xi_0 + d > 0,\ ad - bc = n > 0)$$

miteinander verbunden sind, wo a, b, c, d ganze rationale Zahlen; wenn ferner die Näherungszähler und -Nenner von

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$$

mit A_ν, B_ν bezeichnet werden; wenn endlich für einen gewissen Index ν_0 die Ungleichungen

$$B_{\nu_0 - 1}(c\xi_0 + d) \geqq 1, \quad b_{\nu_0} \geqq 2n + |c|$$

bestehen: dann hat der Bruch

$$\frac{a A_{\nu_0 - 1} + b B_{\nu_0 - 1}}{c A_{\nu_0 - 1} + d B_{\nu_0 - 1}}$$

einen positiven Nenner und ist einem Näherungsbruch von η_0 gleich.

Bei der Formulierung dieses Satzes konnte die in (4) gemachte zweite Voraussetzung $B_{\nu_0} \geqq |c|$ unterdrückt werden, weil sie wegen

$$b_{\nu_0} \geqq 2n + |c|$$

ohnedies erfüllt ist.

Wir geben hierzu ein Beispiel: Sei

$$b_\nu = 1 + 2\nu, \text{ also } \xi_0 = [1, 3, 5, 7, \ldots].$$

Setzt man

$$\eta_0 = \frac{\xi_0 - 1}{\xi_0 + 1},$$

so ist

$$a = 1,\ b = -1,\ c = 1,\ d = 1,\ n = ad - bc = 2,$$

$$c\xi_0 + d = \xi_0 + 1 > 2.$$

Also sind die Bedingungen

$$B_{\nu-1}(c\xi_0 + d) \geqq 1, \ b_\nu \geqq 2n + |c| = 5$$

von $\nu = 2$ an dauernd erfüllt, und folglich müssen die Brüche

$$\frac{A_{\nu-1} - B_{\nu-1}}{A_{\nu-1} + B_{\nu-1}} \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

sämtlich gewissen Näherungsbrüchen von η_0 gleich sein.

Das Beispiel lehrt aber, daß die angegebene Form der Näherungsbrüche von η_0 nicht immer die irreduzible zu sein braucht. Denn hier ist

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{4}{3}, \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{21}{16}, \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{151}{115}, \ldots.$$

Es sind also A_3, B_3, und wie man leicht erkennt, überhaupt $A_{3\nu}$, $B_{3\nu}$ stets ungerade, so daß Zähler und Nenner des Bruches $\frac{A_{3\nu} - B_{3\nu}}{A_{3\nu} + B_{3\nu}}$ den Faktor 2 gemein haben.

II. Wir lassen jetzt die Voraussetzungen des Hilfssatz 1 fortbestehen. Wenn dann

$$\eta_0 = [d_0, d_1, d_2, \ldots] \tag{8}$$

der regelmäßige Kettenbruch für η_0 ist, und wenn seine Näherungszähler und -Nenner mit C_ν, D_ν bezeichnet werden, so können wir

$$\frac{a A_{\nu_0-1} + b B_{\nu_0-1}}{c A_{\nu_0-1} + d B_{\nu_0-1}} = \frac{C_{\mu_0-1}}{D_{\mu_0-1}} \tag{9}$$

setzen, wobei sich über die Abhängigkeit des Index μ_0 von ν_0 folgendes aussagen läßt. Es ist

$$\begin{aligned}
\eta_0 - \frac{C_{\mu_0-1}}{D_{\mu_0-1}} &= \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d} - \frac{a A_{\nu_0-1} + b B_{\nu_0-1}}{c A_{\nu_0-1} + d B_{\nu_0-1}} \\
&= \frac{(ad - bc)(\xi_0 B_{\nu_0-1} - A_{\nu_0-1})}{(c\xi_0 + d)(c A_{\nu_0-1} + d B_{\nu_0-1})} \\
&= \frac{n B_{\nu_0-1}\left(\xi_0 - \frac{A_{\nu_0-1}}{B_{\nu_0-1}}\right)}{(c\xi_0 + d)(c A_{\nu_0-1} + d B_{\nu_0-1})}.
\end{aligned}$$

Folglich haben die Zahlen $\eta_0 - \frac{C_{\mu_0-1}}{D_{\mu_0-1}}$ und $\xi_0 - \frac{A_{\nu_0-1}}{B_{\nu_0-1}}$ gleiches Vorzeichen; es ist also $(-1)^{\mu_0-1} = (-1)^{\nu_0-1}$, oder

$$\mu_0 \equiv \nu_0 \pmod 2. \tag{10}$$

Die Gleichung (9) läßt sich dahin interpretieren, daß dem Abschnitt $b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}$ des Kettenbruches für ξ_0 ein entsprechender

Abschnitt $d_0, d_1, \ldots, d_{\mu_0-1}$ des Kettenbruches für η_0 zugeordnet ist, wobei $\mu_0 - \nu_0$ eine gerade Zahl, und derart, daß die Gleichung besteht:

$$(11) \qquad \frac{a[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}] + b}{c[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}] + d} = [d_0, d_1, \ldots, d_{\mu_0-1}],$$

welche ja mit (9) gleichbedeutend ist.

Bedeuten jetzt $\xi_{\nu_0}, \eta_{\mu_0}$ die durch die Gleichungen

$$\xi_0 = [b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}, \xi_{\nu_0}], \quad \eta_0 = [d_0, d_1, \ldots, d_{\mu_0-1}, \eta_{\mu_0}]$$

definierten vollständigen Quotienten, so ist auch

$$(12) \qquad \xi_0 = \frac{A_{\nu_0-1}\xi_{\nu_0} + A_{\nu_0-2}}{B_{\nu_0-1}\xi_{\nu_0} + B_{\nu_0-2}}, \quad \eta_0 = \frac{C_{\mu_0-1}\eta_{\mu_0} + C_{\mu_0-2}}{D_{\mu_0-1}\eta_{\mu_0} + D_{\mu_0-2}}.$$

Daher muß wegen (1) zwischen ξ_{ν_0} und η_{μ_0} eine Gleichung bestehen, die wir jetzt herleiten wollen. Zunächst ergibt sich aus (9):

$$(13) \qquad \begin{cases} r_0 C_{\mu_0-1} = aA_{\nu_0-1} + bB_{\nu_0-1} \\ r_0 D_{\mu_0-1} = cA_{\nu_0-1} + dB_{\nu_0-1}, \end{cases}$$

wo r_0 der größte gemeinsame Teiler der zwei rechts stehenden Zahlen ist. Hieraus findet man

$$(14) \qquad \begin{cases} r_0\{C_{\mu_0-1}(cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) - D_{\mu_0-1}(aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2})\} \\ = (aA_{\nu_0-1} + bB_{\nu_0-1})(cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) \\ - (cA_{\nu_0-1} + dB_{\nu_0-1})(aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2}) \\ = (ad - bc)(A_{\nu_0-1}B_{\nu_0-2} - A_{\nu_0-2}B_{\nu_0-1}) = n(-1)^{\nu_0}. \end{cases}$$

Es ist also r_0 ein Teiler von n. Setzen wir demgemäß

$$(15) \qquad n = r_0 s_0,$$

so ist auch s_0 eine ganze positive Zahl, und zwar ergibt sich aus (14) für sie der Wert:

$$(16) \quad (-1)^{\nu_0} s_0 = C_{\mu_0-1}(cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) - D_{\mu_0-1}(aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2}).$$

Neben r_0 und s_0 werden wir sogleich noch eine ganze Zahl t_0 gebrauchen, die durch die Formel definiert ist:

$$(17) \quad (-1)^{\nu_0} t_0 = C_{\mu_0-2}(cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) - D_{\mu_0-2}(aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2}).$$

Setzt man nach diesen Vorbereitungen in Gleichung (1) für ξ_0, η_0 die Werte aus (12) ein, so kommt

$$\frac{C_{\mu_0-1}\eta_{\mu_0} + C_{\mu_0-2}}{D_{\mu_0-1}\eta_{\mu_0} + D_{\mu_0-2}} = \frac{a(A_{\nu_0-1}\xi_{\nu_0} + A_{\nu_0-2}) + b(B_{\nu_0-1}\xi_{\nu_0} + B_{\nu_0-2})}{c(A_{\nu_0-1}\xi_{\nu_0} + A_{\nu_0-2}) + d(B_{\nu_0-1}\xi_{\nu_0} + B_{\nu_0-2})}$$

$$= \frac{r_0 C_{\mu_0-1}\xi_{\nu_0} + aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2}}{r_0 D_{\mu_0-1}\xi_{\nu_0} + cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}} \quad \text{(nach (13))}.$$

Durch Auflösung nach η_{μ_0} findet man hieraus:

$$\begin{aligned} -\eta_{\mu_0}\{ C_{\mu_0-1}(r_0 D_{\mu_0-1}\xi_{\nu_0} + cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) \\ - D_{\mu_0-1}(r_0 C_{\mu_0-1}\xi_{\nu_0} + aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2})\} \\ = C_{\mu_0-2}(r_0 D_{\mu_0-1}\xi_{\nu_0} + cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) \\ - D_{\mu_0-2}(r_0 C_{\mu_0-1}\xi_{\nu_0} + aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2}), \end{aligned}$$

wofür man unter Benutzung der Abkürzungen (16), (17) schreiben kann:

$$(18)\qquad -(-1)^{\nu_0} s_0 \eta_{\mu_0} = r_0(C_{\mu_0-2}D_{\mu_0-1} - D_{\mu_0-2}C_{\mu_0-1})\xi_{\nu_0} + (-1)^{\nu_0} t_0.$$

Nun sind aber $\frac{C_{\mu_0-2}}{D_{\mu_0-2}}, \frac{C_{\mu_0-1}}{D_{\mu_0-1}}$ aufeinanderfolgende Näherungsbrüche eines regelmäßigen Kettenbruches, und folglich

$$C_{\mu_0-2}D_{\mu_0-1} - C_{\mu_0-1}D_{\mu_0-2} = (-1)^{\mu_0-1} = (-1)^{\nu_0-1},$$

letzteres wegen der Kongruenz (10). Dadurch geht (18) schließlich über in

$$(19)\qquad \eta_{\mu_0} = \frac{r_0\xi_{\nu_0} - t_0}{s_0}.$$

Die ganze Zahl t_0 läßt sich noch etwas anders darstellen. Eliminiert man nämlich die Größe $aA_{\nu_0-2} + bB_{\nu_0-2}$ aus (16) und (17), so erhält man

$$\begin{aligned} (-1)^{\nu_0}(t_0 D_{\mu_0-1} - s_0 D_{\mu_0-2}) \\ = (C_{\mu_0-2}D_{\mu_0-1} - C_{\mu_0-1}D_{\mu_0-2})(cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}) \\ = (-1)^{\nu_0-1}(cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}); \end{aligned}$$

oder durch Auflösung nach t_0:

$$t_0 = s_0 \frac{D_{\mu_0-2}}{D_{\mu_0-1}} - \frac{cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}}{D_{\mu_0-1}}.$$

Ersetzt man hier den Nenner D_{μ_0-1} im zweiten Bruch durch den in (13) stehenden Wert, so kommt die gesuchte Formel:

$$(20)\qquad t_0 = s_0 \frac{D_{\mu_0-2}}{D_{\mu_0-1}} - r_0 \frac{cA_{\nu_0-2} + dB_{\nu_0-2}}{cA_{\nu_0-1} + dB_{\nu_0-1}}.$$

Hier erscheint zwar die Tatsache, daß t_0 eine **ganze** Zahl ist, verdeckt; die Formel wird uns aber doch bald von Nutzen sein.

Wir wenden jetzt die soeben für ξ_0, η_0 durchgeführten und zum Teil in Hilfssatz 1 formulierten Überlegungen auch auf die Zahlen

$$(21)\qquad \xi_{\nu_0} = [b_{\nu_0}, b_{\nu_0+1}, b_{\nu_0+2}, \ldots], \quad \eta_{\mu_0} = [d_{\mu_0}, d_{\mu_0+1}, d_{\mu_0+2}, \ldots]$$

an, deren Näherungsbrüche ν^{ter} Ordnung wir in Übereinstimmung mit dem ersten Kapitel (§ 5, II) durch $\frac{A_{\nu,\nu_0}}{B_{\nu,\nu_0}}$, $\frac{C_{\nu,\mu_0}}{D_{\nu,\mu_0}}$ bezeichnen. Da zwischen ξ_{ν_0} und η_{μ_0} die Gleichung (19) besteht, so müssen wir dabei die Zahlen a, b, c, d ersetzen durch $r_0, -t_0, 0, s_0$, so daß die Zahl $n = ad - bc$ übergeht in $r_0 s_0$, also nach (15) die gleiche bleibt.

Sei $\nu_1 (> \nu_0)$ ein Index, für den $b_{\nu_1} \geqq 2n$ ist.[1] Dann wird entsprechend der Gleichung (11)

$$\frac{r_0[b_{\nu_0}, b_{\nu_0+1}, \ldots, b_{\nu_1-1}] - t_0}{s_0} = [d_{\mu_0}, d_{\mu_0+1}, \ldots, d_{\mu_1-1}]$$

sein, wobei auch wieder analog zu (10) $\mu_1 - \mu_0 \equiv \nu_1 - \nu_0 \pmod 2$, also

$$\mu_1 \equiv \nu_1 \pmod 2.$$

Zwischen den vollständigen Quotienten ξ_{ν_1}, η_{μ_1} ergibt sich analog zu (19) eine Relation:

$$\eta_{\mu_1} = \frac{r_1 \xi_{\nu_1} - t_1}{s_1},$$

wobei r_1, s_1, t_1 ganze Zahlen sind, und zwar ist entsprechend wie bei den Gleichungen (13) r_1 der größte gemeinsame Teiler der zwei Zahlen

$$r_0 A_{\nu_1-\nu_0-1,\nu_0} - t_0 B_{\nu_1-\nu_0-1,\nu_0} \text{ und } s_0 B_{\nu_1-\nu_0-1,\nu_0};$$

ferner in Analogie zu (15) und (20):

$$s_1 = \frac{n}{r_1};\ t_1 = s_1 \frac{D_{\mu_1-\mu_0-2,\mu_0}}{D_{\mu_1-\mu_0-1,\mu_0}} - r_1 \frac{s_0 B_{\nu_1-\nu_0-2,\nu_0}}{s_0 B_{\nu_1-\nu_0-1,\nu_0}}.$$

Wenn nun weiter ein Index $\nu_2 (> \nu_1)$ existiert, für den wiederum $b_{\nu_2} \geqq 2n$ ist, so können wir die gleichen Schlüsse jetzt auf die Zahlen ξ_{ν_1}, η_{μ_1} anwenden, usf. So ergibt sich schließlich:

Hilfssatz 2. *Wenn zwischen den irrationalen Zahlen ξ_0, η_0 die Gleichung*

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d} \quad (ad - bc = n > 0,\ c\xi_0 + d > 0)$$

besteht, wo a, b, c, d ganze rationale Zahlen sind; wenn ξ_0 die regelmäßige Kettenbruchentwicklung

$$\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$$

---

1) Dies ist analog zu der in Hilfssatz 1 gemachten Voraussetzung $b_{\nu_0} \geqq 2n + |c|$. Das Analogon zu der in Hilfssatz 1 außerdem geforderten Ungleichung

$$B_{\nu_0-1}(c\xi_0 + d) \geqq 1$$

reduziert sich jetzt auf $B_{\nu_1-\nu_0-1,\nu_0}\, s_0 \geqq 1$, ist also, da die linke Seite eine positive ganze Zahl ist, von selbst erfüllt.

hat; wenn endlich eine unbegrenzte Serie von wachsenden Indizes $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$ *existiert, derart, daß die Ungleichungen*

$$B_{\nu_0-1}(c\xi_0+d)\geqq 1,\quad b_{\nu_0}\geqq 2n+|c|$$
$$b_{\nu_i}\geqq 2n \qquad (i=1,2,3,\ldots)$$

erfüllt sind: dann lassen sich die regelmäßigen Kettenbrüche für ξ_0 *und* η_0 *in Abschnitte teilen*

$$\xi_0=[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}\,|\,b_{\nu_0}, b_{\nu_0+1}, \ldots, b_{\nu_1-1}\,|\,b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_2-1}\,|\ldots]$$
$$\eta_0=[d_0, d_1, \ldots, d_{\mu_0-1}\,|\,d_{\mu_0}, d_{\mu_0+1}, \ldots, d_{\mu_1-1}\,|\,d_{\mu_1}, \ldots, d_{\mu_2-1}\,|\ldots],$$

die derart einander zugeordnet sind, daß $\mu_i\equiv\nu_i \pmod 2$, *und außerdem*

$$\frac{a[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}]+b}{c[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}]+d}=[d_0, d_1, \ldots, d_{\mu_0-1}]$$

$$\frac{r_i[b_{\nu_i}, b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}]-t_i}{s_i}=[d_{\mu_i}, d_{\mu_i+1}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1}]$$

wird. Dabei sind r_i, s_i, t_i *ganze Zahlen, die sich rekursorisch in nachstehender Weise berechnen:*

r_0 *ist der größte gemeinsame Teiler von*

$$aA_{\nu_0-1}+bB_{\nu_0-1}\ \textit{und}\ cA_{\nu_0-1}+dB_{\nu_0-1};$$

ferner ist

$$s_0=\frac{n}{r_0};\ t_0=s_0\frac{D_{\mu_0-2}}{D_{\mu_0-1}}-r_0\frac{cA_{\nu_0-2}+dB_{\nu_0-2}}{cA_{\nu_0-1}+dB_{\nu_0-1}}.$$

Allgemeiner ist r_{i+1} *der größte gemeinsame Teiler von*

$$r_iA_{\nu_{i+1}-\nu_i-1,\nu_i}-t_iB_{\nu_{i+1}-\nu_i-1,\nu_i}\ \textit{und}\ s_iB_{\nu_{i+1}-\nu_i-1,\nu_i},$$

und endlich

$$s_{i+1}=\frac{n}{r_{i+1}};\ t_{i+1}=s_{i+1}\frac{D_{\mu_{i+1}-\mu_i-2,\mu_i}}{D_{\mu_{i+1}-\mu_i-1,\mu_i}}-r_{i+1}\frac{B_{\nu_{i+1}-\nu_i-2,\nu_i}}{B_{\nu_{i+1}-\nu_i-1,\nu_i}}.$$

III. In Hilfssatz 2 sind alle r_{i+1}, s_{i+1} Teiler von n. Die Formel für die ganze Zahl t_{i+1} zeigt ferner, da die beiden darin auftretenden Brüche nicht größer als 1 sein können, daß t_{i+1} zwischen den Grenzen $-r_{i+1}$ und s_{i+1}, also, weil r_{i+1}, s_{i+1} Teiler von n sind, gewiß zwischen $-n$ und $+n$ liegt. Infolgedessen ist für die Zahlentripel r_i, s_i, t_i bloß eine endliche Anzahl verschiedener Möglichkeiten gegeben; es muß also ein Zahlentripel mehrmals vorkommen. Sei etwa

$$r_i=r_j;\ s_i=s_j;\ t_i=t_j. \tag{22}$$

Außerdem wollen wir jetzt voraussetzen, daß die entsprechenden Abschnitte von ξ_0 übereinstimmen, abgesehen allenfalls von ihren ersten Gliedern, die aber wenigstens nach dem Modul n kongruent sein sollen; also

$$\nu_{i+1} - \nu_i = \nu_{j+1} - \nu_j \tag{23}$$

$$b_{\nu_i} \equiv b_{\nu_j} \pmod n \tag{24}$$

$$b_{\nu_i+1} = b_{\nu_j+1};\; b_{\nu_i+2} = b_{\nu_j+2}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1} = b_{\nu_{j+1}-1}. \tag{25}$$

Dann unterscheiden sich die beiden endlichen Kettenbrüche

$$[b_{\nu_i}, b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}] \text{ und } [b_{\nu_j}, b_{\nu_j+1}, \ldots, b_{\nu_{j+1}-1}]$$

nur um die ganze durch n teilbare Zahl $b_{\nu_i} - b_{\nu_j}$. Ihre Nenner

$$B_{\nu_{i+1}-\nu_i-1, \nu_i},\; B_{\nu_{j+1}-\nu_j-1, \nu_j}$$

sind also einander gleich, während ihre Zähler

$$A_{\nu_{i+1}-\nu_i-1, \nu_i},\; A_{\nu_{j+1}-\nu_j-1, \nu_j}$$

wenigstens nach dem Modul n kongruent sind.

Daher ist der größte gemeinsame Teiler r_{i+1} der beiden Zahlen

$$r_i A_{\nu_{i+1}-\nu_i-1, \nu_i} - t_i B_{\nu_{i+1}-\nu_i-1, \nu_i} \quad \text{und} \quad s_i B_{\nu_{i+1}-\nu_i-1, \nu_i},$$

da er, wie wir wissen, zugleich ein Teiler von n ist, der gleiche wie bei den Zahlen

$$r_j A_{\nu_{j+1}-\nu_j-1, \nu_j} - t_j B_{\nu_{j+1}-\nu_j-1, \nu_j} \quad \text{und} \quad s_j B_{\nu_{j+1}-\nu_j-1, \nu_j},$$

die ja wegen (22) den vorigen nach dem Modul n kongruent sind. Es ist also $r_{i+1} = r_{j+1}$, und folglich auch $s_{i+1} = s_{j+1}$.

Weiter ist nach Hilfssatz 2

$$[d_{\mu_i}, d_{\mu_i+1}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1}] = \frac{r_i[b_{\nu_i}, b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}] - t_i}{s_i}$$

$$[d_{\mu_j}, d_{\mu_j+1}, \ldots, d_{\mu_{j+1}-1}] = \frac{r_j[b_{\nu_j}, b_{\nu_j+1}, \ldots, b_{\nu_{j+1}-1}] - t_j}{s_j}.$$

Also durch Subtraktion unter Berücksichtigung der Voraussetzungen (22) und (25):

$$\begin{cases} [d_{\mu_i}, d_{\mu_i+1}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1}] - [d_{\mu_j}, d_{\mu_j+1}, \ldots, d_{\mu_{j+1}-1}] \\ \qquad = \dfrac{r_i}{s_i}(b_{\nu_i} - b_{\nu_j}) = r_i^2 \dfrac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{n}, \end{cases} \tag{26}$$

was nach Voraussetzung (24) eine ganze Zahl ist. Da ferner

$$\mu_{i+1} - \mu_i \equiv \nu_{i+1} - \nu_i = \nu_{j+1} - \nu_j \equiv \mu_{j+1} - \mu_j \pmod 2,$$

so folgt aus Gleichung (26) wegen der Eindeutigkeit einer endlichen Kettenbruchentwickelung, deren Gliederzahl modulo 2 vorgeschrieben ist[1]):

$$\mu_{i+1} - \mu_i = \mu_{j+1} - \mu_j$$

$$d_{\mu_i} = d_{\mu_j} + r_i^2 \frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{n}$$

$$d_{\mu_i+1} = d_{\mu_j+1},\ d_{\mu_i+2} = d_{\mu_j+2}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1} = d_{\mu_{j+1}-1}.$$

Es sind also die zugeordneten Abschnitte von η_0 ebenfalls identisch, abgesehen von ihrem ersten Glied. Nun wurde bereits bewiesen, daß $r_{i+1} = r_{j+1}$ und $s_{i+1} = s_{j+1}$ ist; in Hilfssatz 2 ist aber weiter

$$t_{i+1} = s_{i+1} \frac{D_{\mu_{i+1}-\mu_i-2,\mu_i}}{D_{\mu_{i+1}-\mu_i-1,\mu_i}} - r_{i+1} \frac{B_{\nu_{i+1}-\nu_i-2,\nu_i}}{B_{\nu_{i+1}-\nu_i-1,\nu_i}},$$

und da die hier auftretenden Näherungsnenner B und D nur von

$$b_{\nu_i+1}, b_{\nu_i+2}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1} \quad \text{bzw.} \quad d_{\mu_i+1}, d_{\mu_i+2}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1}$$

abhängen, also ungeändert bleiben, wenn man i durch j ersetzt, so folgt auch $t_{i+1} = t_{j+1}$. Wir erhalten so den

Hilfssatz 3. *Wenn unter den Voraussetzungen des Hilfssatz 2 die beiden Abschnitte*

$$|b_{\nu_i}, b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}| \quad und \quad |b_{\nu_j}, b_{\nu_j+1}, \ldots, b_{\nu_{j+1}-1}|$$

sich nur in ihren Anfangsgliedern unterscheiden, die aber nach dem Modul n kongruent sein sollen, und wenn zugleich

$$r_i = r_j,\ s_i = s_j,\ t_i = t_j$$

ist, dann unterscheiden sich auch die beiden zugeordneten Abschnitte

$$|d_{\mu_i}, d_{\mu_i+1}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1}| \quad und \quad |d_{\mu_j}, d_{\mu_j+1}, \ldots, d_{\mu_{j+1}-1}|$$

nur in ihren Anfangsgliedern, und zwar ist

$$d_{\mu_i} = d_{\mu_j} + r_i^2 \frac{b_{\nu_i} - b_{\nu_j}}{n}.$$

Außerdem wird auch noch

$$r_{i+1} = r_{j+1},\ s_{i+1} = s_{j+1},\ t_{i+1} = t_{j+1}.$$

---

1) Diese Eindeutigkeit wurde zwar in Satz 3, Kap. II nur für rationale gebrochene Zahlen ausgesprochen, gilt aber, was ganz trivial ist, auch für ganze Zahlen. Das kommt hier in Betracht, falls z. B $\mu_{i+1} = \mu_i + 1$ ist.

§ 29. Definition der Hurwitzschen Kettenbrüche.

Unter einer arithmetischen Reihe m^{ter} Ordnung

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \varphi(2),\ \varphi(3),\ \ldots,$$

versteht man eine solche, deren m^{te} Differenzenreihe

$$\Delta^m\varphi(0),\ \Delta^m\varphi(1),\ \Delta^m\varphi(2),\ \Delta^m\varphi(3),\ \ldots,$$

die erste ist, welche lauter gleiche Glieder hat. Das allgemeine Glied einer derartigen Reihe hat bekanntlich die Form

$$(1)\qquad \varphi(\lambda) = \varphi(0) + \binom{\lambda}{1}\Delta\varphi(0) + \binom{\lambda}{2}\Delta^2\varphi(0) + \cdots + \binom{\lambda}{m}\Delta^m\varphi(0).$$

Eine Reihe mit lauter gleichen Gliedern ist speziell eine arithmetische Reihe nullter Ordnung. Sollen die Glieder einer arithmetischen Reihe lauter ganze Zahlen sein, so sind $\varphi(0)$, $\Delta\varphi(0)$, $\ldots$, $\Delta^m\varphi(0)$ ebenfalls ganze Zahlen, und man bekommt daher aus (1) für $\varphi(\lambda)$ den Ausdruck

$$(2)\qquad \varphi(\lambda) = \frac{1}{m!}f(\lambda),$$

wo $f(\lambda)$ ein Polynom m^{ten} Grades mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet. Sollen die Glieder $\varphi(\lambda)$ außerdem alle positiv sein, so muß der Koeffizient von λ^m in $f(\lambda)$ einen positiven Wert haben. Daraus folgt dann, daß die Glieder von einem gewissen Werte λ an beständig und daher ins Unendliche wachsen (abgesehen von dem Fall $m = 0$, wo sie konstant sind).

Wir beschäftigen uns jetzt mit regelmäßigen Kettenbrüchen, deren Teilnenner wenigstens von einer gewissen Stelle an eine arithmetische Reihe bilden. Ist die Reihe von der nullten Ordnung, so entsteht ein periodischer Kettenbruch, und zwar mit einer Periode von nur e i n e m Glied. Um in ähnlicher Weise auch eine Verallgemeinerung der Kettenbrüche mit beliebiger Periode zu erhalten, brauchen wir uns nur zu denken, daß in den Kettenbruch mehrere arithmetische Reihen ineinander geschachtelt sind.

Es mögen etwa

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi_0(0), & \varphi_0(1), & \varphi_0(2), & \ldots \\ \varphi_1(0), & \varphi_1(1), & \varphi_1(2), & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{k-1}(0), & \varphi_{k-1}(1), & \varphi_{k-1}(2), & \ldots \end{cases}$$

k arithmetische Reihen von irgend welchen Ordnungen sein. Dann ist der Kettenbruch

$$(4)\quad [b_0, \ldots, b_{k-1}, \varphi_0(0), \varphi_1(0), \ldots, \varphi_{k-1}(0), \varphi_0(1), \varphi_1(1), \ldots, \varphi_{k-1}(1), \varphi_0(2), \ldots, \varphi_{k-1}(2), \ldots]$$

der allgemeinste von diesem Typus. Wir wollen derartige Kettenbrüche als Hurwitzsche benennen, weil *Hurwitz* 3 sie genauer untersucht hat. Wir bezeichnen den Kettenbruch (4) der Kürze halber durch das Symbol

$$(5)\qquad [b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \overline{\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{k-1}(\lambda)}]_{\lambda=0}^{\infty}.$$

Sind die arithmetischen Reihen alle von der nullten Ordnung, so ist er periodisch.

Ebenso wie bei den periodischen kann man auch bei den allgemeinen Hurwitzschen Kettenbrüchen den Querstrich in dem Symbol (5) an einer beliebigen späteren Stelle beginnen lassen; denn der Kettenbruch (5) ist offenbar auch gleich

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \varphi_0(0), \overline{\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{k-1}(\lambda), \varphi_0(\lambda+1)}]_{\lambda=0}^{\infty}.$$

Ferner kann man dem Kettenbruch (5) eine Form geben, in der an Stelle von k irgend ein Multiplum von k getreten ist, analog wie man bei einem periodischen Kettenbruch mehrere Perioden zu einer einzigen (imprimitiven) zusammenfassen kann. Zum Beispiel läßt er sich auch so darstellen:

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \overline{\varphi_0(3\lambda), \ldots, \varphi_{k-1}(3\lambda), \varphi_0(3\lambda+1), \ldots, \varphi_{k-1}(3\lambda+1), \varphi_0(3\lambda+2), \ldots, \varphi_{k-1}(3\lambda+2)}]_{\lambda=0}^{\infty},$$

wo sich der Querstrich nun über $3k$ Glieder erstreckt.

§ 30. Der Hurwitzsche Satz.

Man besitzt kein Mittel, den Wert jedes Hurwitzschen Kettenbruches in geschlossener Form anzugeben, wie dies bei den periodischen Kettenbrüchen der Fall war. Das wichtigste Theorem dieser Theorie ist vielmehr der folgende von *Hurwitz* 3 bewiesene

Satz 1. *Wenn zwischen zwei irrationalen Zahlen ξ_0, η_0 die Relation besteht*

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d},$$

wo a, b, c, d ganze rationale Zahlen sind, und wenn der regelmäßige Kettenbruch für die Zahl ξ_0 ein Hurwitzscher ist, so ist der für η_0 ebenfalls ein Hurwitzscher, und zwar sind die Ordnungen der vorkommenden arithmetischen Reihen bei η_0 die gleichen wie bei ξ_0, abgesehen allenfalls von der nullten Ordnung, welche im einen Kettenbruch vorkommen, im andern fehlen kann.

Beim Beweis dieses Satzes können wir von dem Fall absehen, daß die in dem Kettenbruch für ξ_0 auftretenden arithmetischen Reihen alle von der nullten Ordnung sind. Denn in diesem Fall ist der Kettenbruch periodisch, also ξ_0 eine quadratische Irrationalzahl. Folglich ist auch η_0 eine quadratische Irrationalzahl, also der zugehörige Kettenbruch wieder periodisch, womit für diesen Fall der Satz bewiesen ist.

Wir nehmen also jetzt an, daß mindestens eine arithmetische Reihe von höherer als nullter Ordnung vorkommt. Wir dürfen ferner die Zahl

$$ad - bc = n \tag{1}$$

als positiv voraussetzen, indem wir nötigenfalls an Stelle von η_0 den reziproken Wert betrachten. Endlich dürfen wir auch

$$c\xi_0 + d > 0 \tag{2}$$

voraussetzen, indem wir eventuell die Vorzeichen von a, b, c, d alle vier ändern.

Sei also jetzt

$$\xi_0 = \left[b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \overline{\varphi_0(\lambda), \varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{k-1}(\lambda)}\right]_{\lambda=0}^{\infty}. \tag{3}$$

Hier dürfen wir nun weiter annehmen, daß für alle λ die Kongruenzen

$$\varphi_i(\lambda + 1) \equiv \varphi_i(\lambda) \pmod{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{4}$$

bestehen. Sollte das nämlich nicht von vornherein der Fall sein, so kann es dadurch erreicht werden, daß wir dem Kettenbruch (3) eine Form geben, in welcher die Zahl k durch ein geeignetes Multiplum pk ersetzt ist. Um das einzusehen, ist offenbar nur zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von p stets

$$\varphi_i(\lambda + p) \equiv \varphi_i(\lambda) \pmod{n}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

wird. Nun ist aber, wenn m_i die Ordnung der Reihe $\varphi_i(\lambda)$ bedeutet, nach Formel (2) des vorigen Paragraphen:

$$\varphi_0(\lambda) = \frac{1}{m_0!} f_0(\lambda), \quad \varphi_1(\lambda) = \frac{1}{m_1!} f_1(\lambda), \quad \ldots, \quad \varphi_{k-1}(\lambda) = \frac{1}{m_{k-1}!} f_{k-1}(\lambda),$$

oder, indem man mit M den größten der Nenner $m_i!$ bezeichnet:

$$\varphi_i(\lambda) = \frac{1}{M} F_i(\lambda) \qquad (i=0, 1, \ldots, k-1),$$

wo die $F_i(\lambda)$ Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Wählt man daher $p = Mn$, so wird

$$F_i(\lambda + p) = F_i(\lambda + Mn) \equiv F_i(\lambda) \pmod{Mn};$$

also, indem man durch M dividiert,

$$\varphi_i(\lambda + p) \equiv \varphi_i(\lambda) \pmod n.$$

Die Zahl $p = Mn$ leistet somit das Gewünschte.

Wir denken uns daher jetzt den Kettenbruch (3) von vornherein so dargestellt, daß die Kongruenzen (4) erfüllt sind, eine Eigenschaft, die offenbar erhalten bleibt, wenn wir nachträglich eine Darstellung wählen, bei welcher nochmals k durch ein Multiplum von k ersetzt oder der Querstrich weiter nach rechts geschoben ist. Dies behalten wir uns vor.

Bei der weiteren Behandlung unserer Aufgabe wird es nun notwendig, diejenigen arithmetischen Reihen, welche nicht nullter Ordnung sind, von den andern zu unterscheiden. Indem wir dann in dem Kettenbruch (3) den Querstrich bei einem Glied beginnen lassen, welches einer Reihe nicht nullter Ordnung angehört, können wir ihn so darstellen:

$$(5)\quad \xi_0 = [b_0, \ldots, b_{\nu_0-1}, \overline{\psi_0(\lambda), b_{\nu_0+1}, \ldots, b_{\nu_1-1}, \psi_1(\lambda), b_{\nu_1+1}, \ldots, b_{\nu_2-1}, \ldots, \psi_{g-1}(\lambda), b_{\nu_{g-1}+1}, \ldots, b_{\nu_g-1}}]_{\lambda=0}^{\infty}$$

wo wir durch $\psi_0(\lambda), \psi_1(\lambda), \ldots, \psi_{g-1}(\lambda)$ diejenigen arithmetischen Reihen hervorgehoben haben, die nicht nullter Ordnung sind. Dabei ist wegen der Kongruenzen (4)

$$(6)\quad \begin{gathered} \psi_i(\lambda + 1) \equiv \psi_i(\lambda) \pmod n \\ (i = 0, 1, \ldots, g-1). \end{gathered}$$

Natürlich können die arithmetischen Reihen nullter Ordnung auch alle oder zum Teil wegfallen; zum Beispiel kann etwa auf $\psi_0(\lambda)$ direkt $\psi_1(\lambda)$ folgen, in welchem Fall $\nu_1 = \nu_0 + 1$ zu setzen ist.

Die $\psi_i(\lambda)$ werden als arithmetische Reihen nicht nullter Ordnung mit λ ins Unendliche wachsen. Indem wir daher nötigenfalls den Querstrich nochmals bei einer passenden späteren Stelle beginnen lassen, dürfen wir den Index ν_0 so groß voraussetzen, daß

$$(7)\quad B_{\nu_0-1}(c\xi_0 + d) \geqq 1, \quad \psi_0(0) \geqq 2n + |c|$$

$$(8)\quad \psi_i(\lambda) \geqq 2n \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, g-1 \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

ist. Wenn wir dann den Kettenbruch (5) in die Abschnitte teilen:

$$(9)\quad \begin{aligned} \xi_0 = [b_0, \ldots, b_{\nu_0-1} \,|\, \psi_0(0), \ldots, b_{\nu_1-1} \,|\, \psi_1(0), \ldots, b_{\nu_2-1} \,|\, \ldots \\ |\, \psi_{g-1}(0), \ldots, b_{\nu_g-1} \,|\, \psi_0(1), \ldots, b_{\nu_1-1} \,|\, \ldots], \end{aligned}$$

so können wir nach Hilfssatz 2 den regelmäßigen Kettenbruch für die Zahl η_0 in gewisse zugeordnete Abschnitte teilen:

$$(10)\quad \eta_0 = [d_0, \ldots, d_{\mu_0-1} \,|\, d_{\mu_0}, \ldots, d_{\mu_1-1} \,|\, d_{\mu_1}, \ldots, d_{\mu_2-1} \,|\, \ldots];$$

und zwar ist der dem Abschnitt

$$|\psi_i(\lambda),\ b_{\nu_i+1},\ \ldots,\ b_{\nu_{i+1}-1}|$$

von ξ_0 zugeordnete Abschnitt von η_0 der folgende:

$$|d_{\mu_i+\lambda g},\ d_{\mu_i+\lambda g+1},\ \ldots,\ d_{\mu_{i+1}+\lambda g-1}|.$$

Nach Hilfssatz 2 besteht aber die Zuordnung darin, daß

$$\mu_i \equiv \nu_i \pmod 2 \tag{11}$$

ist, und daß die Gleichung statthat:

$$\left\{\begin{aligned} &[d_{\mu_i+\lambda g},\ d_{\mu_i+\lambda g+1},\ \ldots,\ d_{\mu_{i+\lambda g+1}-1}] \\ &= \frac{r_{i+\lambda g}[\psi_i(\lambda),\ b_{\nu_i+1},\ \ldots,\ b_{\nu_{i+1}-1}] - t_{i+\lambda g}}{s_{i+\lambda g}}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Betrachten wir nun die unendlich vielen Zahlentripel

$$r_{\lambda g},\ s_{\lambda g},\ t_{\lambda g} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

so müssen unter diesen wieder gleiche sein (vgl. Seite 123 unten). Indem wir aber den Querstrich bei dem Kettenbruch (5) nötigenfalls an einer späteren Stelle beginnen lassen, können wir voraussetzen, daß schon das Zahlentripel r_0, s_0, t_0 mehrmals vorkommt. Wir dürfen dann weiter annehmen, daß bereits

$$r_0 = r_g,\quad s_0 = s_g,\quad t_0 = t_g \tag{13}$$

ist. Denn wenn etwa erst

$$r_0 = r_{pg},\quad s_0 = s_{pg},\quad t_0 = t_{pg}$$

sein sollte, so haben wir, um die Gleichungen (13) zu erzwingen, nur nötig, den Kettenbruch (5) in einer Form darzustellen, bei der die Anzahl k der überstrichenen Glieder durch das Multiplum pk ersetzt ist.

Wir zeigen jetzt, daß infolge von (13) überhaupt die Gleichungen

$$r_l = r_{l+g},\quad s_l = s_{l+g},\quad t_l = t_{l+g} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

bestehen. In der Tat ist dies nach (13) gewiß für $l = 0$ richtig. Nimmt man aber an, die Gleichungen seien für einen bestimmten Wert von l erfüllt, so setze man l in die Form

$$l = i + \lambda g, \tag{15}$$

wo i der kleinste nicht negative Rest von l modulo g ist. Die den Zahlen (14) entsprechenden Abschnitte des Kettenbruches (9) sind dann

$$|\psi_i(\lambda),\ b_{\nu_i+1},\ \ldots,\ b_{\nu_{i+1}-1}| \text{ und } |\psi_i(\lambda+1),\ b_{\nu_i+1},\ \ldots,\ b_{\nu_{i+1}-1}|;$$

sie unterscheiden sich also bloß im ersten Glied, und zwar wegen (6) um ein Multiplum von n. Nach dem Schlußsatz von Hilfssatz 3 ist daher infolge von (14) auch

$$r_{l+1} = r_{l+g+1}, \quad s_{l+1} = s_{l+g+1}, \quad t_{l+1} = t_{l+g+1}.$$

Die Gleichungen (14) gelten also noch für den nächsthöheren Index l, und sind daher allgemein richtig.

Infolgedessen ist aber auch

$$r_l = r_i, \quad s_l = s_i, \quad t_l = t_i,$$

wenn wieder $l = i + \lambda g$ ist. Die hierzu gehörigen Abschnitte von ξ_0

$$|\psi_i(\lambda), b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}| \text{ und } |\psi_i(0), b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}|$$

unterscheiden sich nur im ersten Glied, und zwar offenbar wieder nur um ein Multiplum von n. Nach Hilfssatz 3 unterscheiden sich also auch die zugeordneten Abschnitte von η_0

$$|d_{\mu_l}, d_{\mu_l+1}, \ldots, d_{\mu_{l+1}-1}| \text{ und } |d_{\mu_i}, d_{\mu_i+1}, \ldots, d_{\mu_{i+1}-1}|$$

ebenfalls nur im ersten Glied, und zwar ist

$$d_{\mu_l} = d_{\mu_i} + r_i^2 \frac{\psi_i(\lambda) - \psi_i(0)}{n}.$$

Setzt man daher

$$(16) \qquad d_{\mu_i} + r_i^2 \frac{\psi_i(\lambda) - \psi_i(0)}{n} = \chi_i(\lambda) \qquad (i=0, 1, \ldots, g-1),$$

so ist

$$\left.\begin{array}{c} d_{\mu_l} = \chi_i(\lambda) \\ d_{\mu_l+1} = d_{\mu_i+1}, \; d_{\mu_l+2} = d_{\mu_i+2}, \; \ldots, \; d_{\mu_{l+1}-1} = d_{\mu_{i+1}-1} \end{array}\right\} \text{für } l = i + \lambda g.$$

Folglich bekommt der Kettenbruch (10) die Gestalt

$$(17) \qquad \eta_0 = [d_0, \ldots, d_{\mu_0-1}, \overline{\chi_0(\lambda), d_{\mu_0+1}, \ldots, d_{\mu_1-1}, \chi_1(\lambda), d_{\mu_1+1}, \ldots, d_{\mu_2-1}, \ldots, \chi_{g-1}(\lambda), d_{\mu_{g-1}+1}, \ldots, d_{\mu_g-1}}]_{\lambda=0}^{\infty}.$$

Da die Zahlen

$$\chi_i(0), \; \chi_i(1), \; \chi_i(2), \; \chi_i(3), \; \ldots$$

offenbar eine arithmetische Reihe bilden von der gleichen Ordnung wie

$$\psi_i(0), \; \psi_i(1), \; \psi_i(2), \; \psi_i(3), \; \ldots,$$

so ist damit der Hurwitzsche Satz vollständig bewiesen.

§ 31. Die regelmäßigen Kettenbrüche für die Zahlen e und $\sqrt[q]{e}$.

Wir behandeln jetzt einige Beispiele. In § 64 werden wir die Formel beweisen:

$$(1) \qquad \frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{e^{\frac{1}{y}}+1} = \frac{1|}{|2y} + \frac{1|}{|6y} + \frac{1|}{|10y} + \frac{1|}{|14y} + \cdots,$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet; wir wollen sie hier einstweilen gelten lassen. Wenn $2y$ eine ganze positive Zahl k, so ist der Kettenbruch regelmäßig und zwar ein Hurwitzscher:

$$(2) \qquad \xi_0 = \frac{e^{\frac{2}{k}}-1}{e^{\frac{2}{k}}+1} = [0, k, 3k, 5k, 7k, \ldots] = \left[0, \overline{(2\lambda+1)k}\right]_{\lambda=0}^{\infty}.$$

Daher muß nach dem Hurwitzschen Satz auch jede irrationale Zahl der Form $\frac{a\xi_0+b}{c\xi_0+d}$ oder, was dasselbe sagt, der Form $\frac{a'e^{\frac{2}{k}}+b'}{c'e^{\frac{2}{k}}+d'}$, wo a', b', c', d' ganze Zahlen sind, einen Hurwitzschen Kettenbruch liefern, dessen Bildungsgesetz sich nach den vorausgegangenen Entwicklungen bestimmen läßt. Wir wollen dies speziell für die Zahl

$$(3) \qquad \eta_0 = e^{\frac{2}{k}} = \frac{\xi_0+1}{-\xi_0+1}$$

durchführen. Hier ist

$$(4) \qquad \begin{cases} a=1,\ b=1,\ c=-1,\ d=1 \\ c\xi_0+d = -\xi_0+1 > 0 \\ n = ad-bc = 2 > 0, \end{cases}$$

so daß wir nicht erst die Vorzeichen von a, b, c, d zu ändern oder den reziproken Wert von η_0 zu nehmen brauchen. Die fernere Rechnung gestaltet sich nun für gerade und ungerade k verschieden. Wir behandeln in diesem Paragraphen den Fall gerader k und setzen demgemäß $k = 2q$.

Die Teilnenner des Kettenbruches (2) sind dann schon von $b_2 = 6q$ an alle größer als $2n + |c| = 5$, und es ist

$$B_1(c\xi_0+d) = 2q(-\xi_0+1) = \frac{4q}{\sqrt[q]{e}+1} > 1.$$

Wir werden daher den Kettenbruch ξ_0 in folgender Weise in Abschnitte teilen:

$$\xi_0 = [0,\ 2q \mid 6q \mid 10q \mid 14q \mid \ldots],$$

wobei auch gleich erreicht ist, daß die Glieder der Abschnitte nach dem Modul $n = 2$ kongruent sind (Formel (4) des vorigen Paragraphen). Da der erste Abschnitt zwei, jeder folgende nur ein Glied enthält, so muß auch bei η_0 der erste Abschnitt eine gerade, jeder folgende eine ungerade Anzahl von Gliedern haben. Nun ist aber

$$\frac{a[0,2q]+b}{c[0,2q]+d} = \frac{a+2qb}{c+2qd} = \frac{1+2q}{-1+2q} = \begin{cases}[2,\ 1] & \text{für } q = 1\\ [1,\ q-1,\ 1,\ 1] & \text{für } q > 1.\end{cases}$$

Der erste Abschnitt von η_0 ist also, weil er eine gerade Gliederzahl haben soll:

$$\begin{array}{ll} 2,\ 1 & \text{für } q = 1 \\ 1,\ q-1,\ 1,\ 1 & \text{für } q > 1. \end{array}$$

Ferner ist r_0 der größte gemeinsame Teiler von $1 + 2q$ und $-1 + 2q$; folglich $r_0 = 1$, und daher, weil $n = 2$ ist, $s_0 = 2$. Für t_0 ergibt sich

$$\text{falls } q = 1: t_0 = s_0 \frac{D_0}{D_1} - r_0 \frac{cA_0 + dB_0}{cA_1 + dB_1} = 2 \cdot \frac{1}{1} - 1 \cdot \frac{0+1}{-1+2} = 1,$$

$$\text{falls } q > 1: t_0 = s_0 \frac{D_2}{D_3} - r_0 \frac{cA_0 + dB_0}{cA_1 + dB_1} = 2 \cdot \frac{q}{2q-1} - 1 \cdot \frac{0+1}{-1+2q} = 1;$$

also beidemal $t_0 = 1$. Indem wir jetzt zum zweiten Abschnitt übergehen, erhalten wir, weil er eine ungerade Gliederzahl haben muß:

$$\frac{r_0[6q] - t_0}{s_0} = \frac{6q-1}{2} = [3q-1,\ 1,\ 1].$$

Der zweite Abschnitt von η_0 ist also $3q - 1,\ 1,\ 1$. Ferner ergibt sich r_1 als größter Teiler von $6q - 1$ und 2; daher wieder $r_1 = 1$, $s_1 = 2$. Endlich

$$t_1 = s_1 \cdot \frac{1}{2} - r_1 \cdot \frac{0}{1} = 1.$$

Es ist also bereits $r_1 = r_0$, $s_1 = s_0$, $t_1 = t_0$. Man braucht daher die Rechnung nicht mehr weiter fortzusetzen und erhält sogleich:

$$\eta_0 = \left[2,\ 1,\ \overline{\chi(\lambda),\ 1,\ 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} \qquad \text{für } q = 1$$

$$\eta_0 = \left[1,\ q-1,\ 1,\ 1,\ \overline{\chi(\lambda),\ 1,\ 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} \qquad \text{für } q > 1,$$

wobei nach Formel (16) des vorigen Paragraphen

$$\chi(\lambda) = 3q - 1 + 1 \cdot \frac{2q(1+2\lambda) - 2q}{2} = (3 + 2\lambda)q - 1.$$

Also schließlich, weil $\eta_0 = \sqrt[q]{e}$ war:

$$e = [2, 1, \overline{2 + 2\lambda, 1, 1}]_{\lambda=0}^{\infty} = [2, \overline{1, 2 + 2\lambda, 1}]_{\lambda=0}^{\infty}, \tag{5}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sqrt[q]{e} &= [1, q - 1, 1, 1, \overline{(3 + 2\lambda)q - 1, 1, 1}]_{\lambda=0}^{\infty} \\ &= [\overline{1, (1 + 2\lambda)q - 1, 1}]_{\lambda=0}^{\infty} \end{aligned}\right. \quad (q > 1). \tag{6}$$

In ausführlicherer Schreibweise lauten diese Formeln:

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots] \tag{5'}$$

$$\sqrt[q]{e} = [1, q-1, 1, 1, 3q-1, 1, 1, 5q-1, 1, 1, 7q-1, 1, \ldots] \quad (q > 1). \tag{6'}$$

Beide Kettenbrüche wurden schon von *Euler* 4 zunächst durch Induktion gefunden und dann auf Grund der Formel (1) auch wirklich bewiesen. Im übrigen ist aber die Eulersche Methode völlig von der Hurwitzschen verschieden, und es ist nicht überflüssig, sie hier noch anzuschließen, da sie zeigt, wie man bisweilen durch Benutzung geeigneter Transformationsformeln unter Umgehung der allgemeinen Methode rasch zum Ziel gelangen kann.

Sind $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$[g_0, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, g_1, b_1, \ldots, b_{k-1}, g_2, b_1, \ldots, b_{k-1}, g_3, b_1, \ldots, b_{k-1}, \ldots],$$

der sich in leicht verständlicher Abkürzung folgendermaßen schreiben läßt

$$[\overline{g_\lambda, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}}]_{\lambda=0}^{\infty},$$

so gilt, wenn $k - 1$ eine gerade Zahl ist, die allgemeine Formel:

$$[\overline{g_\lambda, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}}]_{\lambda=0}^{\infty} + \frac{B_{k-2}}{B_{k-1}} = \frac{1}{B_{k-1}} [\overline{g_\lambda B_{k-1} + B_{k-2} + B_{k-2,1}}]_{\lambda=0}^{\infty}, \tag{7}$$

welche, wenn die Zahlen $g_0, g_1, g_2, \ldots$, eine arithmetische Reihe bilden, eine Beziehung zwischen zwei speziellen Hurwitzschen Kettenbrüchen darstellt. Dies ist also eine fertige Formel, welche den Übergang von einem zum andern Kettenbruch ohne Zwischenrechnung vermittelt. Wir werden die Gleichung (7) in § 43 beweisen; hier sei nur für den Fall $k = 3$, den wir im folgenden allein gebrauchen werden, ein kurzer Beweis mitgeteilt. Für $k = 3$ besagt die Formel (7):

$$\left\{\begin{aligned} &[g_0, b_1, b_2, g_1, b_1, b_2, g_2, b_1, b_2, g_3, b_1, b_2, \ldots] + \frac{b_1}{b_1 b_2 + 1} \\ &= \frac{1}{b_1 b_2 + 1} [g_0(b_1 b_2 + 1) + b_1 + b_2,\ g_1(b_1 b_2 + 1) + b_1 + b_2, \\ &\qquad g_2(b_1 b_2 + 1) + b_1 + b_2, \ldots]. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Zum Beweis dieser Gleichung seien $\frac{C_\nu}{D_\nu}$ die Näherungsbrüche des auf der rechten Seite stehenden Kettenbruchs; dann gelten die Rekursionsformeln

$$C_{-1}=1,\ C_0=g_0(b_1 b_2+1)+b_1+b_2,\ C_\nu=\{g_\nu(b_1 b_2+1)+b_1+b_2\}\, C_{\nu-1}+C_{\nu-2}$$

$$D_{-1}=0,\ D_0=1,\qquad D_\nu=\{g_\nu(b_1 b_2+1)+b_1+b_2\}\, D_{\nu-1}+D_{\nu-2}.$$

Für die Näherungsbrüche des links stehenden Kettenbruches ist dagegen

$$\begin{array}{ll|l}
A_{3\nu-2} &= b_1 A_{3\nu-3} + A_{3\nu-4} & 1 \\
A_{3\nu-1} &= b_2 A_{3\nu-2} + A_{3\nu-3} & -b_1 \\
A_{3\nu} &= g_\nu A_{3\nu-1} + A_{3\nu-2} & b_1 b_2 + 1 \\
A_{3\nu+1} &= b_1 A_{3\nu} + A_{3\nu-1} & b_2 \\
A_{3\nu+2} &= b_2 A_{3\nu+1} + A_{3\nu} & 1
\end{array}$$

Addiert man diese Gleichungen, nachdem man sie der Reihe nach mit den beigeschriebenen Faktoren multipliziert hat, so kommt

$$A_{3\nu+2} = \{g_\nu(b_1 b_2 + 1) + b_1 + b_2\} A_{3\nu-1} + A_{3\nu-4},$$

und ebenso erhält man auch für die Näherungsnenner

$$B_{3\nu+2} = \{g_\nu(b_1 b_2 + 1) + b_1 + b_2\} B_{3\nu-1} + B_{3\nu-4}.$$

Daher genügen die $A_{3\nu+2}, B_{3\nu+2}$ genau der gleichen Rekursionsformel wie die C_ν und D_ν. Es ist außerdem

$$A_{-1} = 1,\ A_2 = g_0(b_1 b_2 + 1) + b_2$$
$$B_{-1} = 0,\ B_2 = b_1 b_2 + 1,$$

so daß gewiß für $\nu = -1$ und $\nu = 0$ die Gleichungen bestehen:

$$A_{3\nu+2} = C_\nu - b_1 D_\nu$$
$$B_{3\nu+2} = (b_1 b_2 + 1) D_\nu.$$

Wegen der Rekursionsformeln gelten diese dann allgemein (Beweis sofort durch Schluß von ν auf $\nu + 1$). Durch Division ergibt sich aber

$$\frac{A_{3\nu+2}}{B_{3\nu+2}} = \frac{1}{b_1 b_2 + 1}\frac{C_\nu}{D_\nu} - \frac{b_1}{b_1 b_2 + 1},$$

woraus für $\lim \nu = \infty$ die zu beweisende Gleichung (8) hervorgeht.

Wir wählen jetzt speziell

$$g_\lambda = q(1 + 2\lambda) - 1,\ b_1 = 1,\ b_2 = 1.$$

Alsdann geht die Formel (8) über in

$$[q-1, 1, 1, 3q-1, 1, 1, 5q-1, 1, 1, 7q-1, 1, 1, \ldots] + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}[2q, 6q, 10q, 14q, \ldots] = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[q]{e}+1}{\sqrt[q]{e}-1} \text{ (nach (2) für } k = 2q).$$

Daher

$$(9)\quad [q-1, 1, 1, 3q-1, 1, 1, 5q-1, 1, 1, \ldots] = \frac{1}{2}\frac{\sqrt[q]{e}+1}{\sqrt[q]{e}-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt[q]{e}-1}.$$

Für $q = 1$ ergibt sich hieraus, indem man den reziproken Wert nimmt:

$$[1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, \ldots] = e - 1,$$

also, wenn man beiderseits noch 1 addiert, in der Tat die zu beweisende Formel (5′).

Für $q > 1$ folgt aus (9), wenn man wieder zum reziproken Wert übergeht:

$$[0, q-1, 1, 1, 3q-1, 1, 1, 5q-1, 1, 1, \ldots] = \sqrt[q]{e} - 1,$$

also, wenn man wieder 1 auf beiden Seiten addiert, gerade die Formel (6′), die damit auch zum zweitenmal bewiesen ist.

§ 32. Die regelmäßigen Kettenbrüche für e^2 und $e^{\frac{2}{2q+1}}$.

Wir knüpfen jetzt wieder an die Formeln (2), (3), (4) des vorigen Paragraphen an und behandeln den Fall, daß k ungerade ist. Die Ungleichung $b_\nu \geqq 2n + |c| = 5$ ist dann von $b_3 = 5k$ an erfüllt. Da aber $B_2(c\xi_0 + d) = (3k^2 + 1)(1 - \xi_0)$ wenigstens für $k = 1$ noch kleiner als 1, während $B_3(c\xi_0 + d)$ stets größer als 1 wird, so werden wir zur Vorsicht den ersten Abschnitt des Kettenbruches ξ_0 bis zu $b_3 = 5k$ laufen lassen, also folgende Einteilung vornehmen:

$$\xi_0 = [0, k, 3k, 5k \mid 7k \mid 9k \mid 11k \mid \ldots],$$

wobei die Forderungen (4) des § 30 wieder bereits erfüllt sind. Dann muß auch bei η_0 der erste Abschnitt eine gerade, jeder folgende eine ungerade Gliederzahl haben. Da nun k ungerade, so bestätigt man leicht:

$$\frac{[0,k,3k,5k]+1}{-[0,k,3k,5k]+1} = \frac{15k^3+15k^2+6k+1}{15k^3-15k^2+6k-1} = \begin{cases} [7, 2, 1, 1] & \text{für } k=1 \\ \left[1, \frac{k-1}{2}, 6k, \frac{5k-1}{2}, 1, 1\right] & \text{für } k>1. \end{cases}$$

Der erste Abschnitt von η_0 ist also

falls $k = 1$: $\quad 7, 2, 1, 1$

falls $k > 1$: $\quad 1, \frac{k-1}{2}, 6k, \frac{5k-1}{2}, 1, 1.$

Ferner ist r_0 der größte gemeinsame Teiler von $\alpha = 15k^3 + 15k^2 + 6k + 1$ und $\beta = 15k^3 - 15k^2 + 6k - 1$; aber α, β sind offenbar ungerade, und, da ihr größter Teiler, wie wir wissen, auch ein Teiler von n, also hier von 2 sein muß, so ist $r_0 = 1$; wegen $n = 2$ ist dann $s_0 = 2$. Für t_0 ergibt sich,

falls $k = 1$: $\quad t_0 = s_0 \frac{D_2}{D_3} - r_0 \frac{-A_2 + B_2}{-A_3 + B_3} = 2 \cdot \frac{8}{5} - 1 \cdot \frac{-3+4}{-16+21} = 1,$

falls $k > 1$: $\quad t_0 = s_0 \frac{D_4}{D_5} - r_0 \frac{-A_2 + B_2}{-A_3 + B_3}$

$$= 2 \cdot \frac{3k(k-1)\frac{5k+1}{2} + 3k}{15k^2(k-1) + 6k - 1} - 1 \cdot \frac{-3k + 3k^2 + 1}{-(15k^2+1) + 15k^3 + 6k} = 1,$$

also beidemal $t_0 = 1$.

Indem wir jetzt zum zweiten Abschnitt übergehen, erhalten wir, weil er eine ungerade Gliederzahl haben muß, und weil k ungerade ist:

$$\frac{r_0[7k] - t_0}{s_0} = \frac{7k-1}{2} = \left[\frac{1}{2}(7k-1)\right].$$

Der zweite Abschnitt von η_0 ist also $\frac{1}{2}(7k-1)$. Ferner ergibt sich r_1 als größter Teiler von $7k - 1$ und 2, also $r_1 = 2$; daher $s_1 = 1$; außerdem

$$t_1 = s_1 \cdot \frac{0}{1} - r_1 \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

Für den dritten Abschnitt kommt alsdann:

$$\frac{r_1[9k] - t_1}{s_1} = \frac{18k}{1} = [18k],$$

$$r_2 = 1,\ s_2 = 2,\ t_2 = s_2 \cdot \frac{0}{1} - r_2 \cdot \frac{0}{1} = 0.$$

Für den vierten Abschnitt:

$$\frac{r_2[11k] - t_2}{s_2} = \frac{11k}{2} = \left[\frac{1}{2}(11k-1), 1, 1\right],$$

$$r_3 = 1,\ s_3 = 2,\ t_3 = s_3 \cdot \frac{1}{2} - r_3 \cdot \frac{0}{1} = 1.$$

Es ist somit

$$r_3 = r_0,\ s_3 = s_0,\ t_3 = t_0,$$

so daß wir die Rechnung nicht weiter fortzusetzen brauchen. Schreibt man der Deutlichkeit halber den Kettenbruch für ξ_0 in der Form

$$\xi_0 = \left[0, k, 3k, 5k, \overline{(7+6\lambda)k, (9+6\lambda)k, (11+6\lambda)k}\right]_{\lambda=0}^{\infty},$$

so ergibt sich

$$e^{\frac{2}{k}} = \eta_0 = \begin{cases} \left[7, 2, 1, 1, \overline{\chi_0(\lambda), \chi_1(\lambda), \chi_2(\lambda), 1, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} & \text{für } k=1, \\ \left[1, \frac{k-1}{2}, 6k, \frac{5k-1}{2}, 1, 1, \overline{\chi_0(\lambda), \chi_1(\lambda), \chi_2(\lambda), 1, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} & \text{für } k>1, \end{cases}$$

wobei nach § 30, Formel (16)

$$\chi_0(\lambda) = \frac{1}{2}(7k-1) + r_0^2 \frac{(7+6\lambda)k - 7k}{2} = \frac{1}{2}(7k-1) + 3\lambda k$$

$$\chi_1(\lambda) = 18k + r_1^2 \frac{(9+6\lambda)k - 9k}{2} = 18k + 12\lambda k$$

$$\chi_2(\lambda) = \frac{1}{2}(11k-1) + r_2^2 \frac{(11+6\lambda)k - 11k}{2} = \frac{1}{2}(11k-1) + 3\lambda k$$

ist. Also zunächst für $k = 1$:

$$(1) \quad \begin{cases} e^2 = \left[7, 2, 1, 1, \overline{3+3\lambda, 18+12\lambda, 5+3\lambda, 1, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} \\ \quad = \left[7, \overline{2+3\lambda, 1, 1, 3+3\lambda, 18+12\lambda}\right]_{\lambda=0}^{\infty}, \end{cases}$$

oder in extenso geschrieben:

$$(1') \quad \begin{aligned} e^2 = [&7, 2, 1, 1, 3, 18, 5, 1, 1, 6, 30, 8, 1, 1, 9, 42, 11, 1, 1, 12, 54, 14, \\ &1, 1, 15, 66, 17, 1, 1, 18, 78, \ldots]. \end{aligned}$$

Ebenso für (ungerade) $k > 1$:

$$(2) \quad \begin{cases} e^{\frac{2}{k}} = \left[1, \frac{k-1}{2}, 6k, \frac{5k-1}{2}, 1, 1, \right. \\ \qquad \left. \overline{\frac{7k-1}{2} + 3\lambda k, 18k + 12\lambda k, \frac{11k-1}{2} + 3\lambda k, 1, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty} \\ \quad = \left[1, \overline{\frac{k-1}{2} + 3\lambda k, 6k + 12\lambda k, \frac{5k-1}{2} + 3\lambda k, 1}\right]_{\lambda=0}^{\infty}. \end{cases}$$

Der Kettenbruch (1) ist schon vor Hurwitz durch *Sundman* **1** gefunden worden. Schon früher aber kannte Stieltjes bereits die Kettenbrüche (1) und (2), doch hat er sie nicht publiziert. (*Stieltjes* **5**.) Sundman und Stieltjes bedienten sich einer ähnlichen Transformationsmethode, wie sie Euler für die einfacheren Kettenbrüche des vorigen Paragraphen benutzte. Bemerkt sei noch, daß Stieltjes den Kettenbruch (1) trotz seines gewiß verwickelten Bildungsgesetzes durch Induktion fand und erst nachträglich bewies.

§ 33. Liouvillesche Zahlen.

I. Die für e und e^2 gefundenen Kettenbrüche zeigen, daß diese Zahlen irrational und nicht Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind. Denn sonst müßten die Kettenbrüche endlich, bzw. periodisch sein, was nicht der Fall ist. Nun hat bekanntlich Hermite bewiesen, daß die Zahl e transzendent ist, das heißt, daß sie überhaupt gar keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügt. Es liegt die Frage nahe, ob man diesen Charakter der Zahl e auch aus ihrer Kettenbruchentwicklung erkennen kann. Leider ist dies bis heute nicht möglich. Zwar hat *Hurwitz* 3 auf diesem Wege noch bewiesen, daß e auch nicht Wurzel einer kubischen Gleichung ist, worauf wir indes nicht näher eingehen; doch ist dies das äußerste, was heute erreicht ist.

Trotz dieses negativen Ergebnisses gibt es aber doch umfangreiche Klassen von regelmäßigen Kettenbrüchen, welche ohne weiteres erkennen lassen, daß die durch sie dargestellten Zahlen keiner algebraischen Gleichung von gegebenem Grad, oder auch überhaupt keiner algebraischen Gleichung genügen. Die wichtigsten in dieser Richtung vorliegenden Resultate stellen wir in diesem und dem folgenden Paragraphen zusammen.

Wir stützen uns dabei auf den folgenden Satz:

Hilfssatz 4. *Ist ξ_0 Wurzel einer im Bereich der rationalen Zahlen irreduziblen algebraischen Gleichung n^{ten} Grades $(n > 1)$, so gibt es eine positive Zahl $c < 1$ derart, daß für alle ganzen Zahlen $p, q > 0$, die Ungleichung besteht:*

$$\left|\frac{p}{q} - \xi_0\right| > \frac{c}{q^n}. \qquad (\textit{Liouville } 1.)$$

Beweis: Wenn $\left|\frac{p}{q} - \xi_0\right| > 1$, so ist die behauptete Ungleichung wegen $c < 1$ sicher erfüllt. Folglich haben wir bloß nötig, den Satz für solche p, q zu beweisen, bei welchen

$$\left|\frac{p}{q} - \xi_0\right| \leqq 1 \tag{1}$$

ist. Sei dann

$$f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n = 0 \qquad (c_i = \text{ganz}) \tag{2}$$

die Gleichung, welcher ξ_0 genügt. Da sie irreduzibel sein soll, so hat sie auch keine rationale Wurzel $\frac{p}{q}$; also ist $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, und folglich

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|c_0 p^n + c_1 p^{n-1} q + \cdots + c_{n-1} p q^{n-1} + c_n q^n|}{q^n} \geqq \frac{1}{q^n}, \tag{3}$$

weil ja der Zähler als positive ganze Zahl mindestens gleich 1 ist. Anderseits ist $f(\xi_0) = 0$, und daher nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi_0) = \left(\frac{p}{q} - \xi_0\right) f'(\gamma),$$

wo γ eine passende Zahl zwischen $\frac{p}{q}$ und ξ_0 bedeutet.

Setzt man dies in (3) ein, so kommt

$$\left|\left(\frac{p}{q} - \xi_0\right) f'(\gamma)\right| \geqq \frac{1}{q^n}. \tag{4}$$

Nun folgt durch Differentiation von (2)

$$f'(x) = n c_0 x^{n-1} + (n-1) c_1 x^{n-2} + \cdots + c_{n-1},$$

also

$$|f'(\gamma)| \leqq n\,|c_0 \gamma^{n-1}| + (n-1)\,|c_1 \gamma^{n-2}| + \cdots + |c_{n-1}|. \tag{5}$$

Da aber γ zwischen ξ_0 und $\frac{p}{q}$ liegt, so ist nach (1) gewiß $|\gamma| < |\xi_0| + 1$, so daß nach (5) gewiß $|f'(\gamma)|$ unter einer von p, q ganz unabhängigen Schranke bleibt; etwa $|f'(\gamma)| < \frac{1}{c}$, wo man natürlich auch $c < 1$ annehmen kann. Mit Rücksicht auf (4) folgt dann aber

$$\left|\frac{p}{q} - \xi_0\right| > \frac{c}{q^n}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Aus Hilfssatz 4 folgt nun leicht

Satz 2. *Der regelmäßige Kettenbruch* $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$ *mit dem Näherungsnenner* ν^{ter} *Ordnung* B_ν *kann nur dann eine Wurzel einer irreduzibeln algebraischen Gleichung* n^{ten} *Grades mit rationalen Koeffizienten darstellen, wenn die Zahlen* $\frac{b_{\nu+1}}{B_\nu^{n-2}}$ *unter einer von* ν *unabhängigen Schranke bleiben.* (*Liouville* 1.)

In der Tat ist nach dem Näherungsgesetz

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \xi_0\right| < \frac{1}{B_\nu B_{\nu+1}} < \frac{1}{b_{\nu+1} B_\nu^2}.$$

Wenn sich nun zu jedem beliebig großen C ein Index ν finden ließe, für den $\frac{b_{\nu+1}}{B_\nu^{n-2}} > C$ wäre, so würde daraus folgen:

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \xi_0\right| < \frac{1}{C B_\nu^n},$$

und dies widerspricht dem Hilfssatz 4, sobald $C > \frac{1}{c}$ gewählt wird.

Die Bedingung des Satz 2 ist weit davon entfernt, hinreichend zu sein. Sie liefert z. B. für die quadratischen Irrationalzahlen nur den Satz, daß die Teilnenner unter einer endlichen Schranke bleiben; aber aus dem dritten Kapitel wissen wir, daß dies nicht genügt, daß vielmehr noch die Periodizität erforderlich ist. Für $n > 2$ läßt sich übrigens der Satz (ebenso wie Hilfssatz 4) nach neueren Untersuchungen von *Thue* **1** noch wesentlich verschärfen. Doch würde uns ein näheres Eingehen darauf zu weit von unserem Hauptgegenstand entfernen, so daß wir uns mit diesem Hinweis begnügen.

II. Wir definieren jetzt nach Maillet:

Definition. *Eine Zahl* $\xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ *mit den Näherungsbrüchen* $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *heißt eine Liouvillesche Zahl, wenn zu jedem noch so großen* n *ein Index* ν *gefunden werden kann, für welchen* $b_{\nu+1} > B_\nu^n$ *ist.*

Es gibt dann, da n beliebig groß sein darf, zu jedem n sogar unendlich viele solcher Indizes ν, also insbesondere auch ganz beliebig große.

Aus Satz 2 folgt nun sogleich

Satz 3. *Eine Liouvillesche Zahl ist transzendent.*

Würde sie nämlich einer Gleichnng n^{ten} Grades genügen, so würde für alle ν die Ungleichung gelten: $b_{\nu+1} < CB_\nu^{n-2}$, was aber mit $b_{\nu+1} > B_\nu^n$ für große ν nicht verträglich ist.

Der Satz 3 stammt ebenfalls von *Liouville* **1**, der dadurch zum ersten Mal die Existenz transzendenter Zahlen nachgewiesen hat. Denn die wirkliche Herstellung von Kettenbrüchen, welche nach obiger Definition Liouvillesche Zahlen sind, unterliegt ja nicht der geringsten Schwierigkeit. Man braucht nur etwa $b_{\nu+1} > B_\nu^\nu$ zu wählen.

Das wichtigste Theorem über Liouvillesche Zahlen ist nächst Satz 3 folgender

Satz 4. *Wenn zwischen zwei irrationalen Zahlen* ξ_0, η_0 *die Relation*

$$\eta_0 = \frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d}$$

besteht, wo a, b, c, d *ganze Zahlen sind, und wenn* ξ_0 *eine Liouvillesche Zahl ist, so ist* η_0 *ebenfalls eine Liouvillesche Zahl.* (*Maillet* **1**.)

Beim Beweis können wir wie in § 30 wieder $c\xi_0 + d$ als positiv voraussetzen, indem wir andernfalls die Vorzeichen von a, b, c, d ändern würden. Dann ist für genügend große ν auch $c\frac{A_\nu}{B_\nu} + d$, also $cA_\nu + dB_\nu$ positiv, und zwar wird $cA_\nu + dB_\nu$ mit ν ganz beliebig groß.

Nun sei n eine beliebig große, aber festgewählte ganze Zahl. Dann gilt, da ξ_0 eine Liouvillesche Zahl ist, für gewisse beliebig groß

wählbare ν die Ungleichung $b_{\nu+1} > B_\nu^n$; also nach dem Näherungsgesetz

$$|\xi_0 B_\nu - A_\nu| < \frac{1}{B_{\nu+1}} < \frac{1}{b_{\nu+1} B_\nu} < \frac{1}{B_\nu^{n+1}}.$$

Daher auch

$$\left|\eta_0 - \frac{aA_\nu + bB_\nu}{cA_\nu + dB_\nu}\right| = \left|\frac{a\xi_0 + b}{c\xi_0 + d} - \frac{aA_\nu + bB_\nu}{cA_\nu + dB_\nu}\right|$$

$$= \frac{|ad - bc| \cdot |\xi_0 B_\nu - A_\nu|}{(c\xi_0 + d)(cA_\nu + dB_\nu)} < \frac{|ad - bc|}{c\xi_0 + d} \cdot \frac{1}{B_\nu^{n+1}(cA_\nu + dB_\nu)}$$

$$= \frac{|ad - bc|}{c\xi_0 + d}\left(c\frac{A_\nu}{B_\nu} + d\right)^{n+1} \frac{1}{(cA_\nu + dB_\nu)^{n+2}}.$$

Nun bleibt aber der Ausdruck

$$\frac{|ad - bc|}{c\xi_0 + d}\left(c\frac{A_\nu}{B_\nu} + d\right)^{n+1}$$

offenbar unter einer von ν unabhängigen Sckranke G. Daher geht die vorige Ungleichung über in

$$\left|\eta_0 - \frac{aA_\nu + bB_\nu}{cA_\nu + dB_\nu}\right| < \frac{G}{(cA_\nu + dB_\nu)^{n+2}} < \frac{1}{2(cA_\nu + dB_\nu)^2}, \tag{6}$$

da ja n positiv, und $cA_\nu + dB_\nu$ beliebig groß, also größer als 2 angenommen werden kann.

Nach Satz 11, Kap. II ist daher $\frac{aA_\nu + bB_\nu}{cA_\nu + dB_\nu}$ einem Näherungsbruch von η_0 gleich, etwa dem Näherungsbruch μ^{ter} Ordnung

$$\frac{aA_\nu + bB_\nu}{cA_\nu + dB_\nu} = \frac{C_\mu}{D_\mu}. \tag{7}$$

Es ist dann D_μ ein Teiler von $cA_\nu + dB_\nu$, und daher nach (6) gewiß

$$\left|\eta_0 - \frac{C_\mu}{D_\mu}\right| < \frac{G}{D_\mu^{n+2}}. \tag{8}$$

Dabei darf auch D_μ ganz beliebig groß angenommen werden. Denn erstens ist $cA_\nu + dB_\nu$ beliebig groß; zweitens ist nach (7)

$$D_\mu = \frac{1}{r}(cA_\nu + dB_\nu),$$

wo r den größten gemeinsamen Teiler von $aA_\nu + bB_\nu$ und $cA_\nu + dB_\nu$ bedeutet. Dieser muß aber wie in § 28, II ein Teiler von $ad - bc$ sein, wie man auch aus der Identität

$$(aA_\nu + bB_\nu)(cA_{\nu-1} + dB_{\nu-1}) - (cA_\nu + dB_\nu)(aA_{\nu-1} + bB_{\nu-1})$$
$$= (ad - bc)(A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1}B_\nu) = (-1)^{\nu-1}(ad - bc)$$

sofort erkennt. Infolgedessen kann D_μ in der Tat beliebig groß gedacht werden.

Nun haben wir in der Formel (12) des § 13 eine allgemeingültige untere Grenze für den Fehler $\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right|$ hergeleitet. Wendet man diese Formel auf η_0 an, so kommt

$$\left|\eta_0 - \frac{C_\mu}{D_\mu}\right| > \frac{1}{D_\mu(D_{\mu+1} + D_\mu)},$$

so daß in Verbinduug mit (8) folgt:

$$D_\mu^{n+2} < GD_\mu(D_{\mu+1} + D_\mu) < 2GD_\mu D_{\mu+1};$$

daher

$$D_{\mu+1} > \frac{1}{2G} D_\mu^{n+1}. \tag{9}$$

Wenn aber $d_{\mu+1}$ der $(\mu + 1)^{\text{te}}$ Teilnenner von η_0 ist, so wird

$$D_{\mu+1} = d_{\mu+1}D_\mu + D_{\mu-1} < (d_{\mu+1} + 1)D_\mu,$$

so daß aus (9) folgt:

$$d_{\mu+1} + 1 > \frac{1}{2G} D_\mu^n.$$

Also gewiß, da D_μ beliebig groß vorausgesetzt werden darf:

$$d_{\mu+1} > D_\mu^{n-1}. \tag{10}$$

In dieser ganzen Untersuchung durfte die Zahl n von vorn herein beliebig groß angenommen werden; dann besagt aber die Ungleichung (10), daß η_0 eine Liouvillesche Zahl ist. W. z. b. w. Zahlreiche weitere Theoreme über Liouvillesche Zahlen, die wir hier beiseite lassen müssen, findet man bei *Maillet* **1**.

§ 34. Quasiperiodische Kettenbrüche.

I. Die Liouvilleschen Zahlen sind dadurch ausgezeichnet, daß unter den unvollständigen Quotienten b_ν sich eine unbegrenzte Serie b_{ν_0}, $b_{\nu_1}, b_{\nu_2}, \ldots$ befindet, für welche $b_{\nu_i} > B_{\nu_i - 1}^{n_i}$ ist, wobei $\lim n_i = \infty$. Daher wachsen die b_{ν_i} außerordentlich stark ins Unendliche. *Maillet* **1** hat aber eine zweite Klasse von Kettenbrüchen angegeben, bei denen die vollständigen Quotienten sogar unter einer endlichen Schranke bleiben dürfen, und die doch stets transzendente Zahlen darstellen.

Wir denken uns einen regelmäßigen Kettenbruch wieder in Abschnitte geteilt:

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1} \mid b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_1-1} \mid b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_2-1} \mid b_{\nu_2}, \ldots, b_{\nu_3-1} \mid \ldots].$$

Dabei soll der Abschnitt $b_{\nu_i} \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}$ bestehen aus der λ_i-maligen Wiederholung eines k_i-gliedrigen Zahlenkomplexes; es ist also

$$\nu_{i+1} - \nu_i = k_i \lambda_i,$$

und

$$|b_{\nu_i}, \ldots, b_{\nu_{i+1}-1}| = |\underbrace{b_{\nu_i}, \ldots, b_{\nu_i+k_i-1}}_{1}, \underbrace{b_{\nu_i}, \ldots, b_{\nu_i+k_i-1}}_{2}, \ldots, \underbrace{b_{\nu_i}, \ldots, b_{\nu_i+k_i-1}}_{\lambda_i}|.$$

Wir nennen einen solchen Kettenbruch, wenn er nicht periodisch ist, und wenn unter den λ_i beliebig große vorkommen, mit Maillet „quasiperiodisch", und bezeichnen ihn durch

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}, \overline{b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_0+k_0-1}}^{\lambda_0}\, \overline{b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_1+k_1-1}}^{\lambda_1}\, \overline{b_{\nu_2}, \ldots, b_{\nu_2+k_2-1}}^{\lambda_2} \ldots].$$

Es wird sich zeigen, daß, wenn die Exponenten λ_i, wenigstens zum Teil, genügend rasch wachsen, der Kettenbruch sicher eine transzendente Zahl darstellt (*Maillet* **1**). Dazu benötigen wir zunächst den

Hilfssatz 5. *Genügt ξ_0 einer im Bereich der rationalen Zahlen irreduzibeln algebraischen Gleichung n^{ten} Grades, wo $n > 2$, so gibt es eine positive Zahl $c < 1$ derart, daß für alle quadratischen Irrationalzahlen $\frac{p+\sqrt{d}}{q}$ (wo p, q, d ganze Zahlen), die Ungleichung besteht:*

$$\left|\frac{p+\sqrt{d}}{q} - \xi_0\right| > \frac{c}{(|p| + |q| + \sqrt{d})^{2n}}.$$

Beweis. Wie bei Hilfssatz 4 ist es wieder nur nötig, die Ungleichung für solche p, q, d zu beweisen, bei denen

$$(1) \qquad \left|\frac{p+\sqrt{d}}{q} - \xi_0\right| \leq 1$$

ist. Sei dann

$$(2) \qquad f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (c_i = \text{ganz})$$

die Gleichung, welcher ξ_0 genügt. Da sie irreduzibel und von höherem als dem zweiten Grad sein soll, so ist $f\left(\frac{p \pm \sqrt{d}}{q}\right) \neq 0$; daher

$$f\left(\frac{p+\sqrt{d}}{q}\right) \cdot f\left(\frac{p-\sqrt{d}}{q}\right)$$

$$= \frac{c_0(p+\sqrt{d})^n + c_1(p+\sqrt{d})^{n-1} q + \cdots + c_n q^n}{q^n}$$

$$\times \frac{c_0(p-\sqrt{d})^n + c_1(p-\sqrt{d})^{n-1} q + \cdots + c_n q^n}{q^n} \neq 0.$$

Das Produkt der beiden Zähler ist aber offenbar eine ganze rationale Zahl, so daß sich ergibt

$$(3)\qquad \left| f\left(\frac{p+\sqrt{d}}{q}\right)\cdot f\left(\frac{p-\sqrt{d}}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{q^{2n}}.$$

Nun ist $f(\xi_0)=0$, also nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$f\left(\frac{p+\sqrt{d}}{q}\right) = f\left(\frac{p+\sqrt{d}}{q}\right) - f(\xi_0) = \left(\frac{p+\sqrt{d}}{q} - \xi_0\right) f'(\gamma),$$

wo γ zwischen ξ_0 und $\frac{p+\sqrt{d}}{q}$ liegt. Setzt man dies in (3) ein, so kommt

$$(4)\qquad \left|\left(\frac{p+\sqrt{d}}{q} - \xi_0\right) f'(\gamma) f\left(\frac{p-\sqrt{d}}{q}\right)\right| \geqq \frac{1}{q^{2n}}.$$

Da γ zwischen ξ_0 und $\frac{p+\sqrt{d}}{q}$ liegt, so folgt aus (1): $|\gamma|<|\xi_0|+1$, woraus wieder wie beim Beweis des Hilfssatz 4 zu schließen ist, daß $f'(\gamma)$ unter einer von $p,\ q,\ d$ unabhängigen Schranke $\frac{1}{c'}$ bleibt. Aus (4) folgt also weiter

$$(5)\qquad \left|\left(\frac{p+\sqrt{d}}{q} - \xi_0\right)\cdot f\left(\frac{p-\sqrt{d}}{q}\right)\right| \geqq \frac{c'}{q^{2n}}.$$

Nun ist aber

$$\left| f\left(\frac{p-\sqrt{d}}{q}\right)\right| = \left|\frac{c_0(p-\sqrt{d})^n + c_1(p-\sqrt{d})^{n-1}q + \cdots + c_n q^n}{q^n}\right|$$

$$< C\,\frac{(|p|+|q|+\sqrt{d})^n}{|q|^n},$$

wo $C = |c_0|+|c_1|+\cdots+|c_n|$ von $p,\ q,\ d$ nicht abhängt. Daher wegen (5)

$$\left|\frac{p+\sqrt{d}}{q} - \xi_0\right| > \frac{c'}{C}\,\frac{1}{|q|^n(|p|+|q|+\sqrt{d})^n} > \frac{c'}{C}\,\frac{1}{(|p|+|q|+\sqrt{d})^{2n}},$$

womit der Hilfssatz 5 bewiesen ist, indem für c jede Zahl stehen darf, die kleiner als 1 und kleiner als $\frac{c'}{C}$ ist.

II. Wir betrachten jetzt einen positiven quasiperiodischen Kettenbruch, kleiner als 1:

$$(6)\qquad \xi_0 = [0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}, \overline{b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_0+k_0-1}}^{\,\lambda_0}\ \overline{b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_1+k_1-1}}^{\,\lambda_1}\ \overline{b_{\nu_2}, \ldots, b_{\nu_2+k_2-1}}^{\,\lambda_2} \ldots].$$

Dabei ist $\nu_{i+1} - \nu_i = k_i\lambda_i$, also

$$(7)\qquad \nu_i = \nu_0 + k_0\lambda_0 + k_1\lambda_1 + \cdots + k_{i-1}\lambda_{i-1}.$$

Daneben betrachten wir den periodischen Kettenbruch

(8) $\eta_0 = [0, b_1, \ldots, b_{\nu_0-1}, b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_1-1}, b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_i-1}, \overline{b_{\nu_i}, b_{\nu_i+1}, \ldots, b_{\nu_i+k_i-1}}]$,

der mit (6) in den ν_{i+1} ersten Gliedern übereinstimmt. Die beiden Zahlen

$$\xi_0 - \frac{A_{\nu_{i+1}-1}}{B_{\nu_{i+1}-1}}, \quad \eta_0 - \frac{A_{\nu_{i+1}-1}}{B_{\nu_{i+1}-1}}\,[1])$$

haben gleiches Vorzeichen $(-1)^{\nu_{i+1}-1}$ und sind nach dem Näherungsgesetz absolut kleiner als $\frac{1}{B^2_{\nu_{i+1}-1}}$. Daher wird auch

(9) $$|\xi_0 - \eta_0| < \frac{1}{B^2_{\nu_{i+1}-1}}.$$

Nun ist aber der Kettenbruch η_0 leicht zu berechnen. Nach § 19, II ist er nämlich eine quadratische Irrationalzahl, und zwar ist nach den dortigen Formeln (5) und (6) die quadratische Gleichung, welcher er genügt, die folgende:

$$P\eta_0^2 + Q\eta_0 + R = 0,$$

wobei

$$P = B_{\nu_i-2}B_{\nu_i+k_i-1} - B_{\nu_i-1}B_{\nu_i+k_i-2}$$
$$Q = B_{\nu_i-1}A_{\nu_i+k_i-2} + A_{\nu_i-1}B_{\nu_i+k_i-2} - A_{\nu_i-2}B_{\nu_i+k_i-1} - B_{\nu_i-2}A_{\nu_i+k_i-1}$$
$$R = A_{\nu_i-2}A_{\nu_i+k_i-1} - A_{\nu_i-1}A_{\nu_i+k_i-2}.$$

Durch ganz rohe Abschätzung folgt hieraus, weil wegen der Voraussetzung $0 < \xi_0 < 1$ auch $0 < A_\nu < B_\nu$ ist:

$$|P| \leqq B^2_{\nu_i+k_i-1}$$
$$|Q| \leqq 2B_{\nu_i+k_i-1}A_{\nu_i+k_i-1} < 2B^2_{\nu_i+k_i-1}$$
$$|R| \leqq A^2_{\nu_i+k_i-1} < B^2_{\nu_i+k_i-1}.$$

Daher ist

$$\eta_0 = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} = \frac{p + \sqrt{d}}{q},$$

wobei

$$|p| < 2B^2_{\nu_i+k_i-1}, \quad |q| \leqq 2B^2_{\nu_i+k_i-1},$$

$$\sqrt{d} < \sqrt{4B^4_{\nu_i+k_i-1} + 4B^4_{\nu_i+k_i-1}} < 3B^2_{\nu_i+k_i-1};$$

---

1) Ob mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ die Näherungsbrüche von (6) oder (8) gemeint sind, ist hier gleichgültig, weil nur solche vorkommen, die bei beiden Kettenbrüchen übereinstimmen.

also

$$|p| + |q| + \sqrt{d} < 7 B^2_{\nu_i + k_i - 1}.$$

Aus Hilfssatz 5 folgt daher, falls ξ_0 einer Gleichung n^{ten} Grades ($n > 2$) genügt:

$$|\xi_0 - \eta_0| = \left|\xi_0 - \frac{p + \sqrt{d}}{q}\right| > \frac{c}{(|p| + |q| + \sqrt{d})^{2n}} > \frac{c}{7^{2n} B^{4n}_{\nu_i + k_i - 1}}.$$

Hieraus ergibt sich aber durch Vergleichung mit (9):

$$7^{2n} B^{4n}_{\nu_i + k_i - 1} > c\, B^2_{\nu_{i+1} - 1},$$

oder, wenn die positive Konstante c mit $\frac{1}{\gamma^2}$ bezeichnet wird:

$$B_{\nu_{i+1} - 1} < 7^n \gamma B^{2n}_{\nu_i + k_i - 1}. \tag{10}$$

Nun lehren aber die Fundamentalformeln:

$$\begin{aligned} B_{\nu_{i+1} - 1} &= B_{\nu_i - 1} A_{\nu_{i+1} - \nu_i - 1, \nu_i} + B_{\nu_i - 2} B_{\nu_{i+1} - \nu_i - 1, \nu_i} \\ &\geqq A_{\nu_{i+1} - \nu_i - 1, \nu_i} = A_{k_i \lambda_i - 1, \nu_i}. \end{aligned}$$

Infolge von (10) ist daher erst recht

$$A_{k_i \lambda_i - 1, \nu_i} < 7^n \gamma B^{2n}_{\nu_i + k_i - 1}. \tag{11}$$

Hier hängt aber die rechte Seite gar nicht von λ_i ab, während die linke bei genügend großem λ_i ganz beliebig groß sein wird. Man kann sich daher augenscheinlich die λ_i mit i so stark wachsend denken, daß die Ungleichung (11), wie groß auch die Zahlen n und γ gewählt werden, für gewisse Werte von i nicht erfüllt ist. Alsdann ist aber ξ_0 nicht Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades, also, da n beliebig groß sein kann, gewiß transzendent. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir nachträglich die Annahme $b_0 = 0$ wieder fallen lassen, weil eine transzendente Zahl bei Vermehrung um eine ganze Zahl doch transzendent bleibt. Wir erhalten so den

Satz 5. *Wenn in dem quasiperiodischen Kettenbruch*

$$\xi_0 = [b_0, \ldots, b_{\nu_0 - 1}, \overline{b_{\nu_0}, \ldots, b_{\nu_0 + k_0 - 1}}^{\lambda_0}\, \overline{b_{\nu_1}, \ldots, b_{\nu_1 + k_1 - 1}}^{\lambda_1}\, \overline{b_{\nu_2}, \ldots, b_{\nu_2 + k_2 - 1}}^{\lambda_2} \ldots],$$

wo $\nu_0 \geqq 1$, die Exponenten λ_i so beschaffen sind, daß für jedes noch so große n und γ ein Index i gefunden werden kann, für welchen die Ungleichung

$$A_{k_i \lambda_i - 1, \nu_i} > 7^n \gamma B^{2n}_{\nu_i + k_i - 1} \quad \textit{(Bezeichnung von § 5, II)}$$

besteht, so stellt der Kettenbruch eine transzendente Zahl dar.

Die Voraussetzung dieses Satzes ist sicher erfüllt, wenn für unendlich viele i die Ungleichung statthat:

$$A_{k_i \lambda_i - 1, \nu_i} > B^i_{\nu_i + k_i - 1}. \tag{12}$$

Als Beispiel wählen wir den einfachen quasiperiodischen Kettenbruch

(13) $$[0, \overline{2}^{\lambda_0}\, \overline{3}^{\lambda_1}\, \overline{2}^{\lambda_2}\, \overline{3}^{\lambda_3}\, \overline{2}^{\lambda_4} \ldots]$$

und wollen untersuchen, wann er sicher eine transzendente Zahl darstellt. Dabei mag eine ganz rohe Abschätzung genügen. Bei dem Kettenbruch (13) ist $\nu_0 = 1$; ferner sind alle $k_i = 1$, so daß aus (7) folgt

(14) $$\nu_i = 1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{i-1}.$$

Die Näherungsnenner von (13) genügen für $\nu \geqq 1$ der Rekursionsformel

$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} < (b_\nu + 1) B_{\nu-1},$$

wo $b_\nu = 2$ oder 3; also ist jedenfalls $B_\nu < 4 B_{\nu-1}$, und folglich

$$B_\nu < 4^\nu B_0 = 4^\nu \qquad (\text{für } \nu \geqq 1).$$

Ferner ist auch für $\nu \geqq 1$, $\mu \geqq 1$

$$A_{\nu,\mu} = b_{\nu+\mu} A_{\nu-1,\mu} + A_{\nu-2,\mu} > b_{\nu+\mu} A_{\nu-1,\mu};$$

also sicher $A_{\nu,\mu} > 2 A_{\nu-1,\mu}$; folglich

$$A_{\nu,\mu} > 2^{\nu-1} A_{1,\mu} \geqq 5 \cdot 2^{\nu-1} > 2^{\nu+1}.$$

Daher ist insbesondere

$$B_{\nu_i + k_i - 1} < 4^{\nu_i + k_i - 1} = 4^{\nu_i}; \quad A_{k_i \lambda_i - 1, \nu_i} > 2^{k_i \lambda_i} = 2^{\lambda_i},$$

so daß die Ungleichung (12) gewiß erfüllt ist, wenn

$$2^{\lambda_i} \geqq 4^{i \nu_i} = 4^{i(1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1})} \qquad (\text{nach (14)});$$

also wenn

(15) $$\lambda_i \geqq 2i(1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_{i-1}).$$

Für die Transzendenz des Kettenbruches (13) genügt es daher, wenn für unendliche viele i die Ungleichung (15) statthat. Das ist beispielsweise der Fall für $\lambda_i = (2i)!$ und erst recht für $\lambda_i \geqq (2i)!$.

Fünftes Kapitel.

Halbregelmäßige Kettenbrüche.

§ 35. Der Konvergenzsatz von Tietze.

Den Untersuchungen dieses Kapitels schicken wir das folgende Theorem voraus:

Satz 1. *Wenn die Elemente des unendlichen Kettenbruches*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

irgend welche reelle Zahlen sind, die den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} |a_\lambda| &= 1 \\ b_\lambda \geqq 1, \quad b_\lambda + a_{\lambda+1} &\geqq 1 \end{aligned}\right\} \qquad \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

genügen, so bestehen für die Näherungsnenner B_λ die Beziehungen

$$B_\lambda \geqq 1 \qquad (\lambda = 0, 1, 2 \ldots)$$

$$\lim_{\lambda=\infty} B_\lambda = \infty,$$

und der Kettenbruch ist konvergent. Sein Wert liegt zwischen den Grenzen b_0 (ausgeschlossen) und $b_0 + a_1$ (eingeschlossen). (*Tietze* 2.)

Zum Beweis knüpfen wir an Formel (28), Kap. I an, die sich so schreiben läßt:

$$(1) \qquad B_{\nu+1,\lambda-1} - B_{\nu,\lambda} = (b_\lambda - 1) B_{\nu,\lambda} + a_{\lambda+1} B_{\nu-1,\lambda+1};$$

oder, indem $\lambda - \nu$ an Stelle von λ tritt:

$$(2) \quad B_{\nu+1,\lambda-\nu-1} - B_{\nu,\lambda-\nu} = (b_{\lambda-\nu} - 1) B_{\nu,\lambda-\nu} + a_{\lambda-\nu+1} B_{\nu-1,\lambda-\nu+1}.$$

Wir zeigen nun zunächst, daß, unter λ eine Zahl der Reihe $1, 2, 3, \ldots$ verstanden, die Ungleichungen

$$(3) \qquad B_{\mu,\lambda-\mu} \geqq B_{\mu-1,\lambda-\mu+1} \qquad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots, \lambda$$

bestehen. In der Tat ist $B_{1,\lambda-1} = b_\lambda$, $B_{0,\lambda} = 1$, so daß für $\mu = 1$ die

Behauptung zutrifft. Nimmt man aber an, sie sei für $\mu = 1, 2, \ldots, \nu\,(<\lambda)$ richtig, so ist

$$B_{\nu,\lambda-\nu} \geqq B_{\nu-1,\lambda-\nu+1} \geqq B_{\nu-2,\lambda-\nu+2} \geqq \cdots \geqq B_{0,\lambda} = 1,$$

und aus (2) ergibt sich dann mit Rücksicht auf unsere Voraussetzungen:

$$B_{\nu+1,\lambda-\nu-1} - B_{\nu,\lambda-\nu} \geqq (b_{\lambda-\nu} - 1 + a_{\lambda-\nu+1}) B_{\nu-1,\lambda-\nu+1} \geqq 0,$$

so daß die Ungleichung (3) auch für $\mu = \nu + 1$ besteht, woraus ihre Allgemeingültigkeit folgt.

Man hat daher die Kette von Ungleichungen

$$(4) \qquad B_\lambda \geqq B_{\lambda-1,1} \geqq B_{\lambda-2,2} \geqq \cdots \geqq B_{0,\lambda} = 1,$$

aus der sich auch speziell ergibt (nach einfacher Änderung der Indexbezeichnung):

$$(5) \qquad B_{\lambda+\nu-1} \geqq B_{\nu-1,\lambda},$$

$$(6) \qquad B_{\nu,\lambda} \geqq B_{\nu-1,\lambda+1} \geqq 1 \qquad (\nu \geqq 1).$$

Nun folgt aus (1) mit Rücksicht auf (6)

$$(7) \qquad \text{für } a_{\lambda+1} = +1:\; B_{\nu+1,\lambda-1} - B_{\nu,\lambda} \geqq B_{\nu-1,\lambda+1} \geqq 1 \quad (\nu \geqq 1);$$

dagegen, weil nach den Voraussetzungen des zu beweisenden Satzes für $a_{\lambda+1} = -1$ stets $b_\lambda \geqq 2$ sein muß,

$$(8) \qquad \text{für } a_{\lambda+1} = -1: \begin{cases} B_{\nu+1,\lambda-1} - B_{\nu,\lambda} \geqq B_{\nu,\lambda} - B_{\nu-1,\lambda+1} & \text{für } \nu \geqq 1, \\ B_{1,\lambda-1} - B_{0,\lambda} = b_\lambda - 1 \geqq 1, \end{cases}$$

so daß in jedem Fall für $\nu \geqq 1$

$$B_{\nu+1,\lambda-1} - B_{\nu,\lambda} \geqq \operatorname{Min}(1, B_{\nu,\lambda} - B_{\nu-1,\lambda+1})\,^{1)}$$

ist, oder, wenn $\nu + \varkappa$, $\lambda - \varkappa$ an Stelle von ν, λ gesetzt wird, für $\nu + \varkappa \geqq 1$:

$$B_{\nu+\varkappa+1,\lambda-\varkappa-1} - B_{\nu+\varkappa,\lambda-\varkappa} \geqq \operatorname{Min}(1, B_{\nu+\varkappa,\lambda-\varkappa} - B_{\nu+\varkappa-1,\lambda-\varkappa+1}).$$

Wenn daher für einen bestimmten Index $\varkappa\,(<\lambda)$ der Ausdruck

$$B_{\nu+\varkappa,\lambda-\varkappa} - B_{\nu+\varkappa-1,\lambda-\varkappa+1} \qquad (\nu + \varkappa \geqq 1)$$

mindestens gleich 1 ist, so muß er für den nächstgrößeren Wert von $\varkappa$ ebenfalls mindestens gleich 1 sein (bei festgehaltenem ν, λ).

Nun folgt aber aus (7) und (8), daß die Ausdrücke

$$B_{\nu+\varkappa,\lambda-\varkappa} - B_{\nu+\varkappa-1,\lambda-\varkappa+1}, \quad \text{wobei } \begin{cases} \nu \geqq 1 \text{ für } a_{\lambda+1} = +1 \\ \nu = 0 \text{ für } a_{\lambda+1} = -1 \end{cases}$$

ist, für $\varkappa = 1$ mindestens gleich 1 sind. Nach obigem erweisen sie sich

1) Mit $\operatorname{Min}(a, b)$ wird die kleinste der Zahlen a, b bezeichnet; z. B. $\operatorname{Min}(1, -2) = -2$; $\operatorname{Min}(1, 1) = 1$.

also sukzessive auch für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, \lambda$ mindestens gleich 1. Man hat somit

$$\left.\begin{array}{l} B_{\nu+1,\lambda-1} - B_{\nu,\lambda} \geqq 1 \\ B_{\nu+2,\lambda-2} - B_{\nu+1,\lambda-1} \geqq 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{\nu+\lambda} - B_{\nu+\lambda-1,1} \geqq 1 \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} \nu \geqq 1 \text{ für } a_{\lambda+1} = +1 \\ \nu = 0 \text{ für } a_{\lambda+1} = -1 \end{pmatrix},$$

und daher durch Addition, weil nach (6) auch $B_{\nu,\lambda} \geqq 1$ ist:

$$\text{(9)} \qquad \text{für } a_{\lambda+1} = +1: \quad B_{\nu+\lambda} \geqq \lambda + 1 \qquad (\nu \geqq 1),$$

$$\text{(10)} \qquad \text{für } a_{\lambda+1} = -1: \quad B_{\lambda} \geqq \lambda + 1.$$

Gibt es nun unendlich viele Indizes λ, für die $a_{\lambda+1} = +1$, so sind darunter auch beliebig große, so daß aus (9) folgt:

$$\text{(11)} \qquad \lim_{\lambda=\infty} B_{\lambda} = \infty.$$

Wenn dagegen für hinreichend große λ stets $a_{\lambda+1} = -1$, so schließt man das gleiche Resultat aus (10).

Nunmehr kann auch leicht die Konvergenz gefolgert werden. Es ist dazu nur nötig zu beweisen, daß der Ausdruck

$$\left| \frac{A_{\lambda+\nu-1}}{B_{\lambda+\nu-1}} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} \right|$$

unter einer von ν unabhängigen Schranke bleibt, die mit wachsendem λ beliebig klein wird. Dieser Ausdruck ist aber nach Formel (33), Kap. I, weil die a_{ν} alle gleich ± 1 sind, gleich $\frac{B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\lambda+\nu-1}B_{\lambda-1}}$, also nach (5) höchstens gleich $\frac{1}{B_{\lambda-1}}$, was in der Tat wegen (11) beliebig klein wird.

Nachdem hiermit die Konvergenz bewiesen, setzen wir

$$\text{(12)} \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = \xi_0$$

und analog

$$\text{(13)} \qquad b_{\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots = \xi_{\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

da ja auch diese Kettenbrüche alle aus dem gleichen Grunde konvergieren müssen. Nach Satz 1, Kap. I ist dann

$$\text{(14)} \qquad \xi_{\lambda} = b_{\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}}{\xi_{\lambda+1}} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ferner ist wegen $A_{\nu-1,\lambda+1} = B_{\nu,\lambda}$ (Formel (25), Kap. I):

$$\xi_{\lambda+1} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1,\lambda+1}}{B_{\nu-1,\lambda+1}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda+1}}, \quad (\lambda=0,1,2,\ldots);$$

also mit Rücksicht auf (6):

$$(15) \qquad \xi_{\lambda+1} \geqq 1 \qquad (\lambda = 0,1,2,\ldots).$$

Nach (14) liegt daher ξ_λ zwischen den Grenzen b_λ (ausgeschlossen) und $b_\lambda + a_{\lambda+1}$ (eingeschlossen). Da dies speziell auch für $\lambda = 0$ gilt, so ist damit Satz 1 vollständig bewiesen.

§ 36. Definition der halbregelmäßigen Kettenbrüche.

I. Wir denken uns jetzt eine unbegrenzte Serie von reellen Einheiten

$$(1) \qquad a_1 = \pm 1, \quad a_2 = \pm 1, \quad a_3 = \pm 1, \cdots$$

mit beliebigen Vorzeichen gegeben. Ist dann ξ_0 irgendeine reelle Zahl und ist sie nicht ganz, so sei b_0 diejenige eindeutig bestimmte ganze Zahl, welche zwischen ξ_0 und $\xi_0 - a_1$ liegt. Setzt man dann

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1}{\xi_1},$$

so ist dadurch eine Zahl $\xi_1 > 1$ definiert. Ist ξ_1 wieder nicht ganzzahlig, so sei b_1 die zwischen ξ_1 und $\xi_1 - a_2$ gelegene ganze Zahl, so daß durch die Gleichung

$$\xi_1 = b_1 + \frac{a_2}{\xi_2},$$

eine Zahl $\xi_2 > 1$ definiert ist. Wenn ξ_2 abermals keine ganze Zahl, so läßt sich das Verfahren in gleicher Weise fortsetzen. Es ergibt sich auf diese Weise das allgemeine Schema:

$$(2) \qquad \xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} \qquad \nu = 0,1,2,\ldots,$$

$$(3) \qquad \xi_\nu > 1 \qquad \nu = 1,2,3,\ldots,$$

wobei b_ν stets die zwischen ξ_ν und $\xi_\nu - a_{\nu+1}$ gelegene ganze Zahl ist. Die b_ν genügen gewissen Bedingungen; da nämlich für $\nu \geqq 1$ stets $\xi_\nu > 1$, so müssen auch die ganzen Zahlen b_ν und $b_\nu + a_{\nu+1}$, zwischen denen ξ_ν nach (2) und (3) eingeschlossen ist, positiv sein, also

$$(4) \qquad b_\nu \geqq 1, \quad b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 1 \qquad (\text{für } \nu \geqq 1).$$

Sind alle $a_\nu = +1$, so deckt sich das Verfahren mit demjenigen, welches die regelmäßige Kettenbruchentwicklung der Zahl ξ_0 liefert (§ 12, I). Andernfalls besteht aber immer noch eine große Analogie.

Man erkennt zunächst:

(5) $$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu}.$$

Ferner findet man, daß bei rationalem ξ_0 das Verfahren ein Ende erreicht, indem einmal ξ_ν eine ganze Zahl wird, die dann, falls $\nu > 0$, wegen $\xi_\nu > 1$ mindestens gleich 2 ist. In der Tat erweisen sich jetzt nach (2) für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ sukzessive auch die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ als rational; wenn man daher $\xi_\nu = \frac{x_\nu}{y_\nu}$ setzt, wo x_ν, y_ν teilerfremde ganze positive (für $\nu > 0$) Zahlen sind, so lehrt Gleichung (2), daß $y_\nu = x_{\nu+1}$ ist. Man hat also $\xi_\nu = \frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}$, und daher $x_{\nu+1} < x_\nu$; die x_ν sind folglich mit wachsendem ν abnehmende positive ganze Zahlen. Wäre nun ξ_ν nie ganzzahlig, also das Verfahren unbegrenzt fortsetzbar, so müßte auch die Reihe der x_ν unbegrenzt sein, was nicht möglich ist. Gleichzeitig folgt aus (5), wenn etwa ξ_n eine ganze Zahl ist und als solche mit b_n bezeichnet wird,

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}, \quad b_n \geqq 2, \text{ wenn } n > 0.$$

Ist ξ_0 irrational, so lehrt die Gleichung (2) für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ sukzessive, daß auch $\xi_1, \xi_2, \ldots$ irrational sind. Daher wird niemals ξ_ν ganzzahlig, und das Verfahren ist unbegrenzt. Wir wollen jetzt zeigen, daß in diesem Fall die Gleichung

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \text{ in infin.}$$

gilt. In der Tat sind wegen (4) die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt, also $\lim\limits_{\nu=\infty} B_\nu = \infty$. Ferner ist

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu} = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}a_\nu}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu},$$

woraus folgt:

$$\xi_\nu(B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}) = -a_\nu(B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}).$$

Wegen $\xi_\nu > 1$, $|a_\nu| = 1$ ist daher

$$|B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| < |B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}|.$$

Die Größen $|B_\nu\xi_0 - A_\nu|$ nehmen daher mit wachsendem ν monoton ab so daß wegen $\lim B_\nu = \infty$ notwendig

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \xi_0$$

sein muß. W. z. b. w.

Im Fall eines irrationalen ξ_0 kommt zu den Einschränkungen (4), denen die b_ν genügen, noch die weitere hinzu, daß nicht für alle ν von einer gewissen Stelle an $b_\nu + a_{\nu+1} = 1$, d. h. $b_\nu = 2$, $a_{\nu+1} = -1$ sein kann. Wäre dies nämlich der Fall, so würde aus (2) für hinreichend große ν folgen:

$$\xi_\nu = 2 - \frac{1}{\xi_{\nu+1}} = 1 + \frac{\xi_{\nu+1} - 1}{\xi_{\nu+1}} < 1 + (\xi_{\nu+1} - 1) = \xi_{\nu+1}.$$

Daher würden die ξ_ν von einer gewissen Stelle an beständig zwischen 1 und 2 bleiben, aber mit ν wachsen; sie müßten also einen endlichen Grenzwert ξ haben, der größer als 1 ist. Aus der letzten Formel würde dann aber für $\lim \nu = \infty$ folgen:

$$\xi = 2 - \frac{1}{\xi}, \quad \text{also } \xi = 1,$$

was mit $\xi > 1$ im Widerspruch steht.

II. Nunmehr definieren wir:

Definition. *Ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

mit ganzzahligen Elementen heißt halbregelmäßig, wenn er folgenden Bedingungen genügt:

a) $|a_\nu| = 1$ für $\nu \geqq 1$,

b) $b_\nu \geqq 1$, $b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 1$ für $\nu \geqq 1$,

c) *falls er endlich ist und außer dem Anfangsglied noch mindestens ein Glied hat, ist der letzte Teilnenner größer als* 1; *falls er unendlich ist, ist unendlich oft* $b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 2$.

Die regelmäßigen Kettenbrüche sind hiernach unter den halbregelmäßigen mit inbegriffen (im Fall der Endlichkeit mit einem letzten Teilnenner größer als 1). Ferner ist zu beachten, daß die Bedingungen a), b) gerade die in Satz 1 verlangten sind.

Nach dem Bewiesenen ist jede rationale Zahl einem endlichen, jede irrationale einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch mit willkürlich vorgegebenen[1]) Teilzählern a_ν $(= \pm 1)$ gleich, der durch das zu Beginn dieses Paragraphen beschriebene Verfahren gefunden werden kann. Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, daß jeder endliche halbregelmäßige Kettenbruch eine rationale, jeder unendliche eine irrationale Zahl vorstellt.

---

1) Vorgegeben ist stets die unendliche Folge von Teilzählern, von denen freilich, wenn der Kettenbruch endlich wird, nur eine endliche Anzahl wirklich vorkommt.

Im Fall eines endlichen Kettenbruches ist gewiß

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} = \frac{A_n}{B_n}$$

eine rationale Zahl, sobald $B_n \neq 0$ ist; dies wird aber durch Satz 1 garantiert.

Von einem unendlichen halbregelmäßigen Kettenbruch sagt Satz 1 aus, daß er konvergiert, also jedenfalls einen bestimmten Zahlwert hat, und es bleibt noch zu zeigen, daß dieser irrational ist. Setzen wir zu dem Zweck

$$(6) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = \xi_0$$

und analog

$$(7) \qquad b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots = \xi_\nu,$$

so ist

$$(8) \qquad \xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}}.$$

Nach Satz 1 liegt ξ_ν zwischen b_ν (ausgeschlossen) und $b_\nu + a_{\nu+1}$ (eingeschlossen), also ist $\xi_\nu \geqq 1$ für $\nu > 0$. Wäre nun für hinreichend große ν dauernd $\xi_\nu = 1$, so würde aus (8) folgen $1 = b_\nu + a_{\nu+1}$ für alle hinreichend großen ν, was aber der Definition der halbregelmäßigen Kettenbrüche widerspricht. Also muß unendlich oft $\xi_\nu > 1$ sein. Ferner folgt aus (6) und (7) nach Satz 1, Kap. I

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu} = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}a_\nu}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu},$$

woraus man erhält:

$$(9) \qquad \xi_\nu(B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}) = -a_\nu(B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}).$$

Wäre eine der beiden Klammergrößen gleich Null, so müßten sie daher beide verschwinden, was aber wegen der Relation

$$A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1} = (-1)^\nu a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} \neq 0$$

nicht möglich ist. Wegen $|a_\nu| = 1$, $\xi_\nu \geqq 1$ folgt dann aus (9):

$$|B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| \leqq |B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}|,$$

und zwar findet für unendlich viele ν-Werte wirklich Ungleichheit statt, weil ja unendlich oft $\xi_\nu > 1$ ist. Es gibt also unendlich viele voneinander verschiedene Zahlen der Form $|B_\nu\xi_0 - A_\nu|$, die alle unter einer endlichen Schranke bleiben; dies wäre aber unmöglich, wenn ξ_0 rational wäre.[1])

---

1) Ist nämlich ξ_0 rational $= \frac{p}{q}$, so ist $|B_\nu\xi_0 - A_\nu|$ notwendig eine der Zahlen $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots$ Unter einer Schranke wäre also nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte möglich.

Als bemerkenswertes Nebenresultat ergibt sich hieraus, daß die Ungleichung $\xi_\nu > 1$ nicht nur für unendlich viele, sondern für alle $\nu > 0$ besteht. In der Tat ist ja $\xi_\nu = 1$ ausgeschlossen, weil ξ_ν als unendlicher halbregelmäßiger Kettenbruch irrational sein muß.

Endlich beweisen wir, daß eine reelle Zahl nur einem halbregelmäßigen Kettenbruch mit vorgegebenen Teilzählern gleich ist. In der Tat, wenn

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ein halbregelmäßiger Kettenbruch ist, so wollen wir zeigen, daß er mit demjenigen identisch sein muß, zu welchem man durch das zu Beginn dieses Paragraphen beschriebene Verfahren gelangt. Ist nämlich erstens ξ_0 irrational, und setzen wir wieder

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots, \tag{10}$$

so wissen wir, daß für $\nu > 0$ stets $\xi_\nu > 1$ ist. Aus (10) folgt aber

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}}; \tag{11}$$

wegen $\xi_{\nu+1} > 1$ liegt daher b_ν zwischen ξ_ν und $\xi_\nu - a_{\nu+1}$. Da dies für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, so sieht man in der Tat, daß sich die b_ν gerade durch das beschriebene Verfahren ergeben.

Wenn aber zweitens ξ_0 rational ist, so muß der Kettenbruch endlich sein, weil ja ein unendlicher einen irrationalen Wert hat. Ist also

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \tag{12}$$

und setzen wir noch

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\xi_n = b_n,$$

so gelten wieder die Gleichungen (11) für $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$. Es ist aber nach der Definition der halbregelmäßigen Kettenbrüche: $\xi_n = b_n > 1$. Also ist $\xi_{n-1} = b_{n-1} + \frac{a_n}{\xi_n}$ zwischen b_{n-1} und $b_{n-1} + a_n$ gelegen, die Grenzen ausgeschlossen; daher gewiß $\xi_{n-1} > 1$. Weiter ist dann $\xi_{n-2} = b_{n-2} + \frac{a_{n-1}}{\xi_{n-1}}$ zwischen b_{n-2} und $b_{n-2} + a_{n-1}$ gelegen, und zwar wieder mit Ausschluß der Grenzen; also $\xi_{n-2} > 1$. So fortschließend findet man überhaupt $\xi_\nu > 1$ für $\nu > 0$. Aus (11) folgt dann wieder, daß b_ν zwischen ξ_ν und $\xi_\nu - a_{\nu+1}$ liegt, so daß sich auch diesmal die b_ν durch das beschriebene Verfahren ergeben. Zusammenfassend erhalten wir

Satz 2. *Jede reelle Zahl ξ_0 ist einem und nur einem halbregelmäßigen Kettenbruch mit vorgegebenen Teilzählern ($= \pm 1$) gleich. Dieser ist endlich oder unendlich, je nachdem ξ_0 rational oder irrational ist. Umgekehrt stellt auch jeder halbregelmäßige Kettenbruch eine reelle Zahl dar.* (*Tietze* **2.**)

III. Eine irrationale Zahl läßt unendlich viele halbregelmäßige Kettenbruchentwicklungen zu, da ja für jeden der unendlich vielen Teilzähler das Vorzeichen beliebig gegeben sein darf. Für eine rationale Zahl dagegen ist die Anzahl der halbregelmäßigen Kettenbrüche endlich und läßt sich leicht bestimmen. Sei $\frac{m}{n}$ die rationale Zahl in irreduzibler Form und mit positivem Nenner; die Anzahl der halbregelmäßigen Kettenbrüche sei $f\left(\frac{m}{n}\right)\cdot$ Offenbar ist $f\left(\frac{m}{1}\right) = 1$. Ferner ist für ungerade m $(m = 2k + 1)$:

$$\frac{m}{2} = k + \frac{1|}{|2} = k + 1 - \frac{1|}{|2},$$

und andere halbregelmäßige Kettenbrüche für die Zahl $\frac{m}{2}$ gibt es nicht; also ist $f\left(\frac{m}{2}\right) = 2$. Wir behaupten nun, daß allgemein $f\left(\frac{m}{n}\right) = n$ ist, und führen den Beweis durch vollständige Induktion, indem wir annehmen, für irreduzible Brüche, deren Nenner kleiner als n, sei das bereits erkannt. Ist dann b_0 die größte in $\frac{m}{n}$ enthaltene ganze Zahl und $\frac{r}{n}$ der Rest, so kann die Entwicklung in einen halbregelmäßigen Kettenbruch auf zwei Arten beginnen:

$$\text{erstens für } a_1 = +1\colon \quad \frac{m}{n} = b_0 + \frac{r}{n}, \quad \frac{n}{r} = \cdots,$$

$$\text{zweitens für } a_1 = -1\colon \quad \frac{m}{n} = b_0 + 1 - \frac{n-r}{n}, \quad \frac{n}{n-r} = \cdots,$$

wobei die Brüche $\frac{n}{r}$ und $\frac{n}{n-r}$ offenbar wieder irreduzibel sind. Daraus ersieht man, daß $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{n}{r}\right) + f\left(\frac{n}{n-r}\right)$ ist, also nach unserer Annahme: $f\left(\frac{m}{n}\right) = r + (n - r) = n$. Damit ist bewiesen

Satz 3. *Der irreduzible Bruch $\frac{m}{n}$ $(n > 0)$ läßt genau n halbregelmäßige Kettenbruchentwicklungen zu.* (*Vahlen* **1**, *Netto* **1**.)

IV. Wie bei den regelmäßigen Kettenbrüchen sind auch bei den halbregelmäßigen die Näherungsbrüche irreduzibel. Denn wegen der Gleichung

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots a_\nu = \pm 1$$

können A_ν und B_ν keinen gemeinsamen Teiler haben.

Im Gegensatz zu den regelmäßigen braucht aber bei den halbregelmäßigen die Konvergenz nicht derart zu sein, daß stets $\left|\xi_0 - \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}\right| < \left|\xi_0 - \frac{A_k}{B_k}\right|$ ist; auch nicht $\left|\xi_0 - \frac{A_{k+2}}{B_{k+2}}\right| < \left|\xi_0 - \frac{A_k}{B_k}\right|$ (*Netto* **1**). Wir wollen vielmehr jetzt zeigen, daß sogar, wenn λ irgendeine (beliebig große) positive ganze Zahl ist, man eine Zahl k und einen halbregelmäßigen Kettenbruch angeben kann, derart, daß

$$\left|\xi_0 - \frac{A_{k+\lambda}}{B_{k+\lambda}}\right| > \left|\xi_0 - \frac{A_k}{B_k}\right| \tag{13}$$

wird. Der halbregelmäßige Kettenbruch

$$2 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|b_{k+\lambda+1}} + \cdots,$$

bei dem die Anzahl der Teilbrüche $\frac{-1|}{|2}$ gleich $k + \lambda - 1$, hat nämlich für $k > \lambda$ und $b_{k+\lambda+1} < k - \lambda + 1$ die verlangte Eigenschaft. In der Tat liefert hier die Rekursionsformel für die Näherungszähler und -Nenner sukzessive:

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{2}{1}, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{2}, \ldots, \frac{A_k}{B_k} = \frac{k+2}{k+1}, \ldots$$

$$\frac{A_{k+\lambda-1}}{B_{k+\lambda-1}} = \frac{k+\lambda+1}{k+\lambda}, \quad \frac{A_{k+\lambda}}{B_{k+\lambda}} = \frac{1}{1}.$$

Also

$$\xi_0 = \frac{A_{k+\lambda}\xi_{k+\lambda+1} + A_{k+\lambda-1}}{B_{k+\lambda}\xi_{k+\lambda+1} + B_{k+\lambda-1}} = \frac{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda + 1}{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda}.$$

Daher weiter

$$\left|\xi_0 - \frac{A_k}{B_k}\right| = \left|\frac{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda + 1}{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda} - \frac{k+2}{k+1}\right| = \frac{\xi_{k+\lambda+1} + \lambda - 1}{(k+1)(\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda)}, \tag{14}$$

$$\left|\xi_0 - \frac{A_{k+\lambda}}{B_{k+\lambda}}\right| = \left|\frac{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda + 1}{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda} - 1\right| = \frac{1}{\xi_{k+\lambda+1} + k + \lambda}. \tag{15}$$

Nach Voraussetzung ist aber $b_{k+\lambda+1} < k - \lambda + 1$, also auch $\xi_{k+\lambda+1} < k - \lambda + 2$, oder also

$$\xi_{k+\lambda+1} + \lambda - 1 < k + 1,$$

so daß aus (14) und (15) in der Tat die Ungleichung (13) hervorgeht. W. z. b. w.

§ 37. Verwandlung halbregelmäßiger Kettenbrüche in regelmäßige.

I. Jeder halbregelmäßige Kettenbruch stellt eine reelle Zahl dar, die dann nach dem gewöhnlichen Verfahren auch in einen regelmäßigen Kettenbruch entwickelt werden kann. Dieser läßt sich aber, wie wir jetzt zeigen wollen, auch aus dem halbregelmäßigen nach einfachen Regeln, die im wesentlichen *Lagrange* 7 angegeben hat, ganz mechanisch herstellen.

Wir denken uns zu dem Zweck irgendeinen (nicht notwendig halbregelmäßigen, sondern ganz beliebigen endlichen oder unendlichen) Kettenbruch der Form

$$(1) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\lambda|}{|b_\lambda} - \frac{1|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

und betrachten daneben den folgenden:

$$(2) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{a_\lambda|}{|b_\lambda - 1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|b_{\lambda+1} - 1} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

Den Übergang von (1) zu (2) nennen wir die Transformation t_1; ihren Einfluß werden wir alsbald untersuchen. Ist nun irgendein halbregelmäßiger Kettenbruch gegeben, so leiten wir aus ihm einen neuen her, indem wir den ersten negativen Teilzähler durch die Transformation t_1 beseitigen. In diesem neuen Kettenbruch (der nicht mehr halbregelmäßig zu sein braucht), beginnen dann die negativen Teilzähler erst an einer späteren Stelle, und wir beseitigen jetzt wieder einen durch die Transformation t_1. So fahren wir fort und nennen die Gesamttransformation, die alle negativen Teilzähler (es dürfen deren auch unendlich viele sein) beseitigt, $\mathfrak{T}_1$. Die Transformation $\mathfrak{T}_1$ ist augenscheinlich gleichbedeutend mit folgendem Prozeß:

Man schalte vor jeden negativen Teilzähler das Glied $\frac{1|}{|1}$ *ein; sodann verwandle man alle Minuszeichen in Plus; endlich ersetze man jedes* b_ν *durch*

$$\begin{aligned}
&b_\nu, && \textit{falls } a_\nu = +1,\ a_{\nu+1} = +1,\\
&b_\nu - 1, && \textit{falls } a_\nu = +1,\ a_{\nu+1} = -1, \textit{ oder } a_\nu = -1,\ a_{\nu+1} = +1,\\
&b_\nu - 2, && \textit{falls } a_\nu = -1,\ a_{\nu+1} = -1.
\end{aligned}$$

Dabei ist $a_0 = +1$, *und, falls bei einem endlichen Kettenbruch* b_n *der letzte Teilnenner ist, auch* $a_{n+1} = +1$ *zu denken.*[1])

---

1) Man kann die drei Fälle dahin zusammenfassen, daß jedes b_ν ersetzt wird durch

$$b_\nu - \frac{1 - a_\nu}{2} - \frac{1 - a_{\nu+1}}{2}.$$

Davon werden wir häufig Gebrauch machen.

Die Teilzähler des transformierten Kettenbruches sind hiernach alle gleich 1; die Teilnenner sind positiv oder Null. Kommen Nullen nicht vor, so ist er regelmäßig, und wir werden zeigen, daß sein Wert gleich dem des ursprünglichen Kettenbruches ist.

Andernfalls sieht man, daß eine Null nur auftreten kann, wenn das betreffende Glied ursprünglich einen negativen Teilzähler hatte; infolgedessen geht jeder Null ein eingeschaltetes Glied $\frac{1|}{|1}$, also ein Teilnenner 1 voraus, so daß insbesondere der Nenner des ersten Teilbruches nie Null sein kann. Es ist aber unmöglich, daß von einem gewissen Glied an nur die Teilnenner 1, 0 in infinitum miteinander abwechseln; denn alsdann müßte, wie man leicht einsieht, ursprünglich dauernd $a_{\nu+1} = -1$, $b_\nu = 2$ gewesen sein, was der Definition der halbregelmäßigen Kettenbrüche widerspricht. Folglich treten die Nullen immer nur in Gliederserien der Form

$$\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|c} \qquad (c \neq 0), \tag{3}$$

auf, wo der nächstvorausgehende und der nächstfolgende Teilnenner von Null verschieden sind.

Wir denken jetzt weiter einen Kettenbruch der Form

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \cdots + \frac{1|}{|b_\lambda} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots \qquad (\lambda \geqq 1) \tag{4}$$

und betrachten daneben den folgenden:

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \cdots + \frac{1|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{1|}{|b_\lambda + b_{\lambda+2}} + \frac{1|}{|b_{\lambda+3}} + \cdots \tag{5}$$

Den Übergang von (4) zu (5) nennen wir die Transformation $\mathfrak{t}_2$. Bei dem durch $\mathfrak{T}_1$ transformierten Kettenbruch wollen wir dann jeden einzelnen Teilnenner 0 durch die Transformation $\mathfrak{t}_2$ beseitigen und nennen die Gesamttransformation, welche alle Nullen beseitigt, $\mathfrak{T}_2$. Augenscheinlich besteht $\mathfrak{T}_2$ darin, daß jede Gliederserie der Gestalt (3) ersetzt wird durch $\frac{1|}{|l+c}$, wo l die Anzahl der in (3) auftretenden Nullen ist.

Der durch $\mathfrak{T}_2$ entstehende Kettenbruch ist nun sicher regelmäßig (eventuell mit dem letzten Teilnenner 1), und wir werden sehen, daß sein Wert gleich dem des ursprünglichen halbregelmäßigen Kettenbruches ist, so daß in jedem Fall der regelmäßige ganz mechanisch aus dem halbregelmäßigen hergeleitet werden kann. Als Beispiel nehmen wir:

$$2 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2};$$

durch $\mathfrak{T}_1$ entsteht zunächst

$$1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1},$$

und hieraus durch $\mathfrak{T}_2$:

$$1 + \frac{1|}{|4} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1}.$$

Alle drei Kettenbrüche sind gleich $\frac{16}{13}$, also in der Tat einander gleich.

II. Um nun unsere Behauptungen zu beweisen, prüfen wir zuerst die Wirkung einer einzelnen Transformation t_1, die den Kettenbruch (1) überführt in (2). Bezeichnen wir die Näherungsbrüche von (1) mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, die von (2) mit $\frac{C_\nu}{D_\nu}$, so lehren die Rekursionsformeln für die Näherungszähler augenblicklich:

$$(6)\quad \begin{cases} C_{-1} = A_{-1},\ C_0 = A_0,\ C_1 = A_1, \ldots, C_{\lambda-1} = A_{\lambda-1}, \\ C_\lambda \ \ = (b_\lambda - 1)C_{\lambda-1} + a_\lambda C_{\lambda-2} = (b_\lambda - 1)A_{\lambda-1} + a_\lambda A_{\lambda-2} = A_\lambda - A_{\lambda-1}, \\ C_{\lambda+1} = C_\lambda + C_{\lambda-1} = A_\lambda, \\ C_{\lambda+2} = (b_{\lambda+1} - 1)C_{\lambda+1} + C_\lambda = b_{\lambda+1}A_\lambda - A_{\lambda-1} = A_{\lambda+1}, \\ C_{\lambda+3} = A_{\lambda+2},\ C_{\lambda+4} = A_{\lambda+3},\ C_{\lambda+5} = A_{\lambda+4}, \ldots, \end{cases}$$

und entsprechende Formeln bestehen auch für die Näherungsnenner, woraus folgt, daß unter den Näherungsbrüchen von (2) alle die von (1) enthalten sind; nur ist von dem Bruch $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ an die Ordnung um eine Einheit erhöht. Daraus folgt nun, daß auch der durch die Transformation $\mathfrak{T}_1$ entstehende Kettenbruch unter seinen Näherungsbrüchen alle die des ursprünglichen enthält. Denn fassen wir etwa den Näherungsbruch $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ des ursprünglichen Kettenbruches ins Auge und sind unter den $\lambda + 1$ ersten Teilzählern μ negative, so wird durch die μ Transformationen t_1, welche zu deren Beseitigung notwendig sind, die Ordnung jedesmal um 1 erhöht, also im ganzen auf $\lambda + \mu$ gebracht. Durch die folgenden Transformationen t_1 aber, welche die späteren negativen Teilzähler beseitigen, wird die Ordnung nicht mehr verändert, bleibt also beständig $\lambda + \mu$. Daher ist $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ auch ein Näherungsbruch des durch die Gesamttransformation $\mathfrak{T}_1$ entstehenden Kettenbruches, und zwar der von $(\lambda + \mu)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Aber noch mehr. Bezeichnet man nämlich in Verallgemeinerung einer in § 16, I gegebenen Definition als „N e b e n n ä h e r u n g s b r ü c h e“ eines Kettenbruches der Form

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \quad (b_\nu = \text{ganze Zahl} \geqq 0 \text{ für } \nu > 0)$$

allemal, wenn $b_\nu > 1$ ist $(\nu > 0)$, die Brüche

$$\frac{cA_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}}{cB_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}}, \qquad c = 1, 2, \ldots, b_\nu - 1,$$

so sind auch die Nebennäherungsbrüche von (1) unter den Haupt- und Nebennäherungsbrüchen von (2) enthalten. Dies ist nach (6) ganz selbstverständlich außer für die Brüche

$$\frac{cA_{\lambda-1} + a_\lambda A_{\lambda-2}}{cB_{\lambda-1} + a_\lambda B_{\lambda-2}} \qquad c = 1, 2, \ldots, b_\lambda - 1$$

und

$$\frac{c'A_\lambda - A_{\lambda-1}}{c'B_\lambda - B_{\lambda-1}} \qquad c' = 1, 2, \ldots, b_{\lambda+1} - 1,$$

für welche der Beweis aber auch nicht schwer ist. Denn nach (6) ist

$$\frac{cA_{\lambda-1} + a_\lambda A_{\lambda-2}}{cB_{\lambda-1} + a_\lambda B_{\lambda-2}} = \frac{cC_{\lambda-1} + a_\lambda C_{\lambda-2}}{cD_{\lambda-1} + a_\lambda D_{\lambda-2}},$$

also für $c = 1, 2, \ldots, b_\lambda - 2$ ein Neben-, für $c = b_\lambda - 1$ der Hauptnäherungsbruch $\frac{C_\lambda}{D_\lambda}$ von (2). Ferner ist nach (6)

$$\frac{c'A_\lambda - A_{\lambda-1}}{c'B_\lambda - B_{\lambda-1}} = \frac{(c'-1)A_\lambda + (A_\lambda - A_{\lambda-1})}{(c'-1)B_\lambda + (B_\lambda - B_{\lambda-1})} = \frac{(c'-1)C_{\lambda+1} + C_\lambda}{(c'-1)D_{\lambda+1} + D_\lambda},$$

also für $c' = 2, 3, \ldots, b_{\lambda+1} - 1$ ein Neben-, für $c' = 1$ der Hauptnäherungsbruch $\frac{C_\lambda}{D_\lambda}$ von (2).

Durch wiederholte Anwendung ergibt sich so, daß die Haupt- und Nebennäherungsbrüche von (1) sämtlich auch unter den Haupt- und Nebennäherungsbrüchen desjenigen Kettenbruches enthalten sind, der aus (1) durch die Gesamttransformation $\mathfrak{T}_1$ hervorgeht.

Untersuchen wir nun ebenso die Wirkung einer Transformation t_2, welche den Kettenbruch (4) überführt in (5). Bezeichnen wir mit $\frac{A'_\nu}{B'_\nu}$ die Näherungsbrüche von (4), mit $\frac{C'_\nu}{D'_\nu}$ die von (5), so ist diesmal

$$(7) \qquad \begin{cases} A'_0 = C'_0,\ A'_1 = C'_1, \cdots, A'_{\lambda-1} = C'_{\lambda-1} \\ A'_\lambda = b_\lambda A'_{\lambda-1} + A'_{\lambda-2} = b_\lambda C'_{\lambda-1} + C'_{\lambda-2} \\ A'_{\lambda+1} = 0 \cdot A'_\lambda + A'_{\lambda-1} = A'_{\lambda-1} = C'_{\lambda-1} \\ A'_{\lambda+2} = b_{\lambda+2} A'_{\lambda+1} + A'_\lambda = (b_{\lambda+2} + b_\lambda) C'_{\lambda-1} + C'_{\lambda-2} = C'_\lambda \\ A'_{\lambda+3} = C'_{\lambda+1},\ A'_{\lambda+4} = C'_{\lambda+2},\ A'_{\lambda+5} = C'_{\lambda+3}, \cdots, \end{cases}$$

und da die gleichen Beziehungen auch für die Näherungsnenner bestehen, so sieht man, daß die Näherungsbrüche von (4) unter denen von (5) alle vorkommen bis auf einen, nämlich $\frac{A'_\lambda}{B'_\lambda}$, welcher aber ein Nebennäherungsbruch von (5) ist. Bei allen folgenden wird die Ordnung um zwei Einheiten verringert. Ebenso ersieht man, daß auch jeder Nebennäherungsbruch von (4) unter den Nebennäherungsbrüchen von (5) vorkommt.

Daraus ergibt sich wieder leicht, daß die Haupt- und Nebennäherungsbrüche eines Kettenbruches stets auch unter den Haupt- und Nebennäherungsbrüchen des durch die Gesamttransformation $\mathfrak{T}_2$ hervorgehenden enthalten sind. Und durch Zusammenfassung mit dem früheren erkennt man, daß der durch die Transformation $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2$ aus einem halbregelmäßigen Kettenbruch hervorgehende regelmäßige unter seinen Haupt- und Nebennäherungsbrüchen alle Haupt- und Nebennäherungsbrüche des ursprünglichen enthält.

Bei endlichen Kettenbrüchen sieht man aus (6) und (7) ohne weiteres, daß eine Transformation t_1 oder t_2 den letzten Näherungsbruch stets in den letzten Näherungsbruch überführt, den Wert des Kettenbruchs also ungeändert läßt. Dasselbe gilt dann auch von der Gesamttransformation $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2$. Der ursprüngliche und der transformierte Kettenbruch haben also in diesem Fall den gleichen Wert. Dasselbe trifft aber auch bei unendlichen Kettenbrüchen zu. Da nämlich der ursprüngliche in diesem Fall einen irrationalen Wert ξ_0 hat, aber die Näherungsbrüche rational sind, so hat er unendlich viele voneinander verschiedene Näherungsbrüche mit dem einzigen Häufungswert ξ_0. Diese müssen aber unter den Haupt- und Nebennäherungsbrüchen des Transformierten enthalten sein, der also, da er als regelmäßiger gewiß konvergiert, auch nur den Wert ξ_0 haben kann.

Damit ist bewiesen, daß die regelmäßige Kettenbruchentwicklung einer durch einen halbregelmäßigen Kettenbruch dargestellten Zahl gerade durch die Transformation $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2$ gewonnen wird. W. z. b. w. Zugleich ergibt sich

Satz 4. *Jeder Haupt- und Nebennäherungsbruch eines halbregelmäßigen Kettenbruches ist gleich einem Haupt- oder Nebennäherungsbruch des die gleiche Zahl darstellenden regelmäßigen Kettenbruchs.* (*Tietze* 2.)

Es kann jedoch sein, wie man sich an dem Zahlenbeispiel auf Seite 160f. überzeugt, daß ein Hauptnäherungsbruch des halbregelmäßigen ein Nebennäherungsbruch des regelmäßigen ist, und ebenso, daß ein Nebennäherungsbruch des ersteren ein Hauptnäherungsbruch des letzteren ist. Dagegen haben wir gesehen, daß die Transformation $\mathfrak{T}_1$ allein die Hauptnäherungsbrüche stets in ebensolche überführt. Wenn also der durch $\mathfrak{T}_1$ entstehende Kettenbruch bereits regelmäßig ist, so wird jeder

Hauptnäherungsbruch wieder ein solcher des regelmäßigen Kettenbruches sein. Nach der auf Seite 159 gegebenen Beschreibung der Transformation $\mathfrak{T}_1$ und unter Berücksichtigung der dortigen Fußnote tritt dies aber dann und nur dann ein, wenn die b_ν für $\nu > 0$ den Ungleichungen genügen:

$$b_\nu - \frac{1 - a_\nu}{2} - \frac{1 - a_{\nu+1}}{2} > 0.$$

Diese Bedingung ist nach der erwähnten Beschreibung für den letzten Teilnenner b_n zu ersetzen durch

$$b_n - \frac{1 - a_n}{2} > 0,$$

ist also, weil definitionsgemäß $b_n \geqq 2$ sein muß, von selbst erfüllt. Man erhält somit

Satz 5. *Wenn die Teilnenner des halbregelmäßigen Kettenbruches*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

— vom eventuell vorhandenen letzten abgesehen — den Ungleichungen

$$b_\nu - \frac{1 - a_\nu}{2} - \frac{1 - a_{\nu+1}}{2} > 0 \qquad \text{für } \nu > 0$$

genügen, so sind alle Näherungsbrüche zugleich Näherungsbrüche des die gleiche Zahl darstellenden regelmäßigen Kettenbruches (eventuell mit dem letzten Teilnenner 1), und zwar sind sie nach wachsenden Nennern geordnet.

In der Tat wird ja die Reihenfolge der Näherungsbrüche durch $\mathfrak{T}_1$ nicht geändert.

III. Endlich beweisen wir noch

Satz 6. *Es sei*

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ein halbregelmäßiger Kettenbruch, und es werde

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu}$$

gesetzt. Ferner sei für einen gewissen Index n:

$$b_n - \frac{1 - a_n}{2} - \frac{1 - a_{n+1}}{2} > 0.$$

Wenn dann $a_n = -1$, so ist $\xi_n - 1$ ein vollständiger Quotient des regelmäßigen Kettenbruches für ξ_0. Ist aber $a_n = +1$, und bedeutet l die kleinste positive Zahl, für welche

$$b_{n-l} - \frac{1 - a_{n-l}}{2} - \frac{1 - a_{n-l+1}}{2} > 0,$$

so ist $\xi_n + l - 1$ ein solcher vollständiger Quotient.

Beweis. Für $a_n = -1$ ist

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} - \frac{1|}{|\xi_n}.$$

Wendet man auf diesen endlichen Kettenbruch die Transformation $\mathfrak{T}_1$ an, wodurch ja sein Wert nicht geändert wird, so kommt

$$\xi_0 = d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \cdots + \frac{1|}{|d_m} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|\xi_n - 1}, \text{ wobei } d_\nu \geqq 0 \text{ für } \nu > 0.$$

Sind einige $d_\nu = 0$, so wendet man noch $\mathfrak{T}_2$ an, und findet

$$\xi_0 = g_0 + \frac{1|}{|g_1} + \cdots + \frac{1|}{|g_k} + \frac{1|}{|\xi_n - 1}, \text{ wobei } g_\nu > 0 \text{ für } \nu > 0,$$

so daß für $a_n = -1$ unsere Behauptung bewiesen ist, sobald wir zeigen können, daß $\xi_n - 1 > 1$. Nach Voraussetzung ist aber für $a_n = -1$

$$b_n - 1 - \frac{1 - a_{n+1}}{2} \geqq 1;$$

also auch

$$b_n \geqq 2 + \frac{1 - a_{n+1}}{2} \geqq 2,$$

$$b_n + a_{n+1} \geqq 2 + \frac{1 + a_{n+1}}{2} \geqq 2,$$

und da ξ_n zwischen b_n und $b_n + a_{n+1}$ liegt mit Ausschluß der Grenzen, so ist $\xi_n > 2$, also in der Tat $\xi_n - 1 > 1$.

Im Fall $a_n = +1$ ist dagegen

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-l}|}{|b_{n-l}} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{1|}{|\xi_n},$$

also, wenn man $\mathfrak{T}_1$ anwendet und dabei die Voraussetzungen des Satz 6 sowie die Fußnote Seite 159 beachtet:

$$\xi_0 = d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \cdots + \frac{1|}{|d_m} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \cdots + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0} + \frac{1|}{|\xi_n},$$

wobei

$$d_m = b_{n-l} - \frac{1 - a_{n-l}}{2} - \frac{1 - a_{n-l+1}}{2} > 0,$$

und wo die Anzahl der Gliederpaare $\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0}$ gleich $l - 1$ ist. Daher folgt durch Anwendung von $\mathfrak{T}_2$:

$$\xi_0 = g_0 + \frac{1|}{|g_1} + \cdots + \frac{1|}{|g_k} + \frac{1|}{|\xi_n + l - 1}, \text{ wobei } g_\nu > 0 \text{ für } \nu > 0.$$

Da aber $\xi_n + l - 1 \geqq \xi_n > 1$, so folgt hieraus die Richtigkeit unseres Satzes auch für $a_n = +1$.

§ 38. Periodizität.

Definition. *Wenn der unendliche halbregelmäßige Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

die Eigenschaft hat, daß von einem gewissen ν an stets

$$b_{\nu+k} = b_\nu, \; a_{\nu+k+1} = a_{\nu+1}$$

ist, so heißt er periodisch, und zwar speziell reinperiodisch, wenn diese Bedingungen schon von $\nu = 0$ an erfüllt sind, andernfalls gemischtperiodisch.

Diese Definition enthält die in § 19, I und II für regelmäßige Kettenbrüche gegebene als Spezialfall. Wir beweisen nun

Satz 7. *Ein periodischer halbregelmäßiger Kettenbruch stellt eine quadratische Irrationalzahl dar.*

In der Tat ist ein periodischer halbregelmäßiger Kettenbruch, weil unendlich, eine irrationale Zahl. Ferner ist zunächst bei reiner Periodizität $\xi_0 = \xi_k$; also

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|\xi_0} = \frac{A_{k-1}\xi_0 + A_{k-2}a_k}{B_{k-1}\xi_0 + B_{k-2}a_k}.$$

Daher ist ξ_0 eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$B_{k-1}\xi_0^2 + (B_{k-2}a_k - A_{k-1})\xi_0 - A_{k-2}a_k = 0,$$

die wegen $B_{k-1} \geqq 1$ (Satz 1) gewiß keine identische ist. Bei gemischter Periodizität dagegen ist ξ_ν für genügend große ν ein reinperiodischer Kettenbruch, also nach dem Bewiesenen eine quadratische Irrationalzahl. Die Gleichung

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu} = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}a_\nu}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu}$$

lehrt dann, daß auch ξ_0 eine solche ist.

Satz 7 läßt sich in folgender Weise umkehren.

Satz 8. *Wenn bei der Entwicklung einer quadratischen Irrationalzahl in einen halbregelmäßigen Kettenbruch die Folge der Teilzähler periodisch vorgeschrieben ist, dann wird der Kettenbruch selbst periodisch.*

Dieses Theorem läßt sich auf ganz ähnliche Art beweisen, wie in § 20 der Lagrangesche Satz, der ja ein spezieller Fall davon ist. Indes kommen wir rascher zum Ziel, wenn wir uns auf den Lagrangeschen Satz bereits stützen Wir unterscheiden dabei die zwei Fälle:

A. Von einem gewissen ν-Wert an ist durchweg $a_\nu = -1$.

B. Es ist unendlich oft $a_\nu = +1$.

Im Fall A muß nach der Definition der halbregelmäßigen Kettenbrüche unendlich oft $b_\nu \geqq 3$ sein; dann ist aber auch unendlich oft

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} = b_\nu - 2 \geqq 1.$$

Nach Satz 6 ist also für alle diese ν-Werte $\xi_\nu - 1$ ein vollständiger Quotient des regelmäßigen Kettenbruches. Weil dieser aber nach dem Lagrangeschen Satz periodisch ist, so ist unter seinen vollständigen Quotienten nur eine endliche Anzahl verschiedener. Also ist für die gedachten unendlich vielen ν-Werte $\xi_\nu - 1$ und folglich auch ξ_ν selbst auf eine endliche Anzahl verschiedener Werte beschränkt. Ist daher etwa $\xi_n = \xi_{n+k}$, so hat man

$$\xi_n = b_n - \frac{1\,|}{|\,b_{n+1}} - \frac{1\,|}{|\,b_{n+2}} - \cdots$$

$$= \xi_{n+k} = b_{n+k} - \frac{1\,|}{|\,b_{n+k+1}} - \frac{1\,|}{|\,b_{n+k+2}} - \cdots.$$

Da aber bei vorgegebenen Teilzählern der halbregelmäßige Kettenbruch eindeutig bestimmt ist, so folgt:

$$b_{n+k} = b_n,\; b_{n+k+1} = b_{n+1},\; b_{n+k+2} = b_{n+2},\; \ldots,$$

also in der Tat Periodizität.

Im Fall B ist wegen der vorausgesetzten Periodizität der a_ν etwa:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n+k} = a_{n+2k} = \cdots = +1 \\ a_{n+1} &= a_{n+k+1} = a_{n+2k+1} = \cdots \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n+k-1} &= a_{n+2k-1} = a_{n+3k-1} = \cdots \end{aligned}$$

Dann ergibt sich aber für $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$

$$b_{n+\lambda k} - \frac{1-a_{n+\lambda k}}{2} - \frac{1-a_{n+\lambda k+1}}{2}$$

$$= b_{n+\lambda k} - \frac{1-a_{n+\lambda k+1}}{2}$$

$$= \frac{b_{n+\lambda k}}{2} + \frac{b_{n+\lambda k} + a_{n+\lambda k+1} - 1}{2} \geqq \frac{b_{n+\lambda k}}{2} > 0.$$

Denken wir uns also einen bestimmten Index $\lambda (> 0)$, so ist

$$b_{n+\lambda k} - \frac{1-a_{n+\lambda k}}{2} - \frac{1-a_{n+\lambda k+1}}{2} > 0,$$

und wenn l_λ die kleinste positive Zahl bedeutet, für welche auch

$$b_{n+\lambda k - l_\lambda} - \frac{1-a_{n+\lambda k - l_\lambda}}{2} - \frac{1-a_{n+\lambda k - l_\lambda + 1}}{2} > 0,$$

so muß $l_\lambda \leqq k$ sein, so daß für l_λ bloß k verschiedene Möglichkeiten vorliegen. Nach Satz 6 ist aber jetzt

$$\xi_{n+\lambda k} + l_\lambda - 1$$

ein vollständiger Quotient des regelmäßigen Kettenbruches. Also findet sich unter den unendlich vielen Zahlen

$$\xi_{n+\lambda k} + l_\lambda - 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

nur eine endliche Anzahl verschiedener. Da aber für l_λ bloß k verschiedene Werte möglich sind, so sind auch die $\xi_{n+\lambda k}$ auf eine endliche Anzahl verschiedener Möglichkeiten beschränkt. Ist daher etwa $\xi_{n+rk} = \xi_{n+sk}$, so folgt

$$\xi_{n+rk} = b_{n+rk} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+rk+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+rk+2}} + \cdots$$

$$= \xi_{n+sk} = b_{n+sk} + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+sk+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+sk+2}} + \cdots$$

Also wegen der Eindeutigkeit eines halbregelmäßigen Kettenbruches bei vorgegebenen Teilzählern:

$$b_{n+rk} = b_{n+sk},\ b_{n+rk+1} = b_{n+sk+1},\ b_{n+rk+2} = b_{n+sk+2},\ \ldots,$$

womit auch für diesen Fall die Periodizität bewiesen ist.

Halbregelmäßige Kettenbrüche, bei denen alle Teilzähler gleich -1 sind, nennt man reduziert-regelmäßig. Mit dieser Terminologie ergibt sich speziell

Satz 9. *Jeder periodische reduziert-regelmäßige Kettenbruch ist eine quadratische Irrationalzahl, und umgekehrt ist die reduziert-regelmäßige Kettenbruchentwicklung einer quadratischen Irrationalzahl stets periodisch.*

Weitere spezielle Arten von periodischen halbregelmäßigen Kettenbrüchen werden in den nächsten Paragraphen zu betrachten sein.

§ 39. Kettenbrüche nach nächsten Ganzen.

I. Unter den halbregelmäßigen sind die „Kettenbrüche nach nächsten Ganzen" bemerkenswert, die zuerst von *Minnigerode* 1, ausführlicher von *Hurwitz* 1 studiert wurden. Sie sind dadurch charakterisiert, daß bei ihrer Herstellung nach dem Verfahren von § 36, I für b_ν jedesmal die am nächsten bei ξ_ν gelegene ganze Zahl gewählt wird, wodurch dann das Vorzeichen von $a_{\nu+1}$ und also $a_{\nu+1}$ selbst mitbestimmt ist. Die b_ν sind somit eindeutig festgelegt durch die Ungleichungen

$$(1) \qquad -\frac{1}{2} < \xi_\nu - b_\nu < +\frac{1}{2},$$

außer wenn ξ_ν zufällig die Form $g + \frac{1}{2}$ haben sollte, wo g eine ganze Zahl. In diesem Fall kann man nach Belieben $b_\nu = g$ oder $b_\nu = g + 1$ wählen, und der Kettenbruch endigt dann mit dem nächsten Glied in folgender Weise:

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|g} + \frac{1|}{|2}$$

oder

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu \;|}{|g+1} - \frac{1|}{|2}.$$

Bei der Ungleichung (1) ist daher zu beachten, daß in dem angegebenen Ausnahmsfall, aber auch nur in diesem, auf einer Seite Gleichheit eintritt. Sieht man davon ab, so ist der Kettenbruch nach nächsten Ganzen für jede Zahl ξ_0 völlig eindeutig bestimmt. Er ist ausnahmslos eindeutig, wenn man noch verlangt, daß er nicht mit dem Glied $\frac{-1|}{|2}$ schließen darf; indes wollen wir auf diese Forderung verzichten.

Da $\xi_\nu - b_\nu = \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}}$, so folgt aus (1)

$$\frac{1}{\xi_{\nu+1}} < \frac{1}{2}, \text{ also } \xi_{\nu+1} > 2,$$

wobei jedoch in dem bezeichneten Ausnahmsfall Gleichheit eintritt. Da aber $\xi_{\nu+1}$ stets zwischen $b_{\nu+1}$ und $b_{\nu+1} + a_{\nu+2}$ liegt, so muß auch

$$(2) \qquad b_{\nu+1} \geqq 2, \; b_{\nu+1} + a_{\nu+2} \geqq 2 \qquad (\nu \geqq 0)$$

sein. Umgekehrt, wenn die Ungleichungen (2) erfüllt sind, so ist $\xi_{\nu+1} \geqq 2$, also $\frac{1}{\xi_{\nu+1}} \leqq \frac{1}{2}$, oder $|\xi_\nu - b_\nu| < \frac{1}{2}$. Daher liegt eine Kettenbruchentwicklung nach nächsten Ganzen vor, da Gleichheit offenbar nur in dem Ausnahmsfall eintreten kann. Es ergibt sich also

Satz 10. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß der halbregelmäßige Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

einer „nach nächsten Ganzen" ist, besteht in dem Erfülltsein der Ungleichungen

$$b_\nu \geqq 2, \quad b_\nu + a_{\nu+1} \geqq 2 \quad (\textit{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

der eventuell vorhandene letzte Teilnenner b_n unterliegt nur der Bedingung $b_n \geqq 2$.

II. Von Wichtigkeit ist nun

Satz 11. *Unter allen halbregelmäßigen Kettenbrüchen, in die sich eine rationale Zahl entwickeln läßt, findet sich keiner, der weniger Glieder hätte als der nach nächsten Ganzen.*[1] (*Vahlen* **1.**)

Den Beweis stützen wir auf folgenden

Hilfssatz. *Sind a, b positive ganze Zahlen, und zwar $a < b$, so hat der Kettenbruch nach nächsten Ganzen für die Zahl $\frac{a+b}{a}$ höchstens soviel Glieder wie der für die Zahl $\frac{a+b}{b}$.*

Zum Beweis des Hilfssatzes nehmen wir an, er sei für kleinere Werte von $a + b$ bereits bewiesen, da er ja für $a + b = 3$ offenbar richtig ist. Dann sind drei Fälle zu unterscheiden.

Erstens: $b \geqq 2a$. In diesem Fall ist 1 die nächste bei $\frac{a+b}{b}$ gelegene ganze Zahl; die Identitäten

$$\frac{a+b}{b} = 1 + \frac{1|}{|\frac{b}{a}}, \quad \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

zeigen dann, daß der K. n. n. G.[2]) für $\frac{a+b}{b}$ ein Glied mehr hat als der für $\frac{a+b}{a}$.

Zweitens: $b < \frac{3}{2} a$. In diesem Fall ist 2 die nächste bei $\frac{a+b}{b}$ und bei $\frac{a+b}{a}$ gelegene ganze Zahl. Die Identitäten

$$\frac{a+b}{b} = 2 - \frac{1|}{|3 + \frac{3a-2b}{b-a}}, \quad \frac{a+b}{a} = 2 + \frac{1|}{|2 + \frac{3a-2b}{b-a}}$$

lehren dann, daß die K. n. n. G. für $\frac{a+b}{b}$ und für $\frac{a+b}{a}$ gleich viel Glieder haben.

Drittens: $2a > b > \frac{3}{2} a$. In diesem Fall ist 2 die nächste bei $\frac{a+b}{b}$, und 3 die nächste bei $\frac{a+b}{a}$ gelegene ganze Zahl. Ferner ist

$$0 < 2a - b < b - a, \quad (2a - b) + (b - a) = a;$$

also hat nach unserer Annahme der K. n. n. G. für $\frac{a}{2a-b}$ nicht mehr Glieder wie der für $\frac{a}{b-a}$. Die Identitäten

1) In dem bemerkten Fall, wo es zwei verschiedene Kettenbrüche nach nächsten Ganzen gibt, haben beide offenbar gleich viel Glieder.

2) K. n. n. G. = Kettenbruch nach nächsten Ganzen.

$$\frac{a+b}{b} = 2 - \frac{1|}{\left|1 + \frac{a}{b-a}\right.}, \quad \frac{a+b}{a} = 3 - \frac{1|}{\left|\frac{a}{2a-b}\right.}$$

lehren dann, daß auch der K. n. n. G. für $\frac{a+b}{a}$ nicht mehr Glieder hat wie der für $\frac{a+b}{b}$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. Um nun daraus den Satz 11 zu folgern, bemerken wir, daß er für irreduzible Brüche mit dem Nenner 1 oder 2 evident ist. Ist dann $\frac{m}{n}$ irgend ein irreduzibler Bruch, dessen Nenner größer als 2, so nehmen wir an, für Brüche, deren Nenner kleiner als n, sei der Satz bereits bewiesen. Ist b_0 die nächste bei $\frac{m}{n}$ gelegene ganze Zahl, und setzen wir

$$\frac{m}{n} = b_0 \pm \frac{r}{n} = b_0 \pm \frac{1|}{\left|\frac{n}{r}\right.},$$

so enthält der K. n. n. G. für $\frac{m}{n}$ offenbar ein Glied mehr als der für $\frac{n}{r}$. Das Rechenschema für jede andere halbregelmäßige Kettenbruchentwicklung der Zahl $\frac{m}{n}$ beginnt nun entweder mit:

(a) $$\frac{m}{n} = b_0 \pm \frac{r}{n}, \qquad \frac{n}{r} = \cdots$$

oder mit:

(b) $$\frac{m}{n} = b_0 \pm 1 \mp \frac{s}{n}, \quad \frac{n}{s} = \cdots,$$

wobei $r < s$ und $r + s = n$ ist. Für die Brüche $\frac{n}{r}$ und $\frac{n}{s}$ ist nach Annahme der Satz 11 bereits bewiesen; im Fall (a) bekommt also der betreffende halbregelmäßige Kettenbruch für $\frac{m}{n}$ mindestens ein Glied mehr wie der K. n. n. G. für $\frac{n}{r}$; im Fall (b) mindestens ein Glied mehr wie der K. n. n. G. für $\frac{n}{s}$. Anderseits hat nach dem Hilfssatz der K. n. n. G. für $\frac{n}{s}$ mindestens so viele Glieder wie der für $\frac{n}{r}$. Daher hat jeder halbregelmäßige Kettenbruch, in den sich die Zahl $\frac{m}{n}$ entwickeln läßt, mindestens ein Glied mehr wie der K. n. n. G. für $\frac{n}{r}$. Da aber bereits gezeigt ist, daß der K. n. n. G. für $\frac{m}{n}$ auch nur ein Glied mehr enthält wie der für $\frac{n}{r}$, so ist damit Satz 11 bewiesen.

Man beachte übrigens, daß der K. n. n. G. nicht der kürzeste zu sein braucht in dem Sinn, daß jeder andere mehr Glieder enthält. Für die Zahl $\frac{25}{18}$ z. B. lautet der K. n n. G:

$$\frac{25}{18} = 1 + \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|3};$$

er hat also vier Glieder. Aber es ist auch

$$\frac{25}{18} = 1 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|4},$$

und dieser halbregelmäßige Kettenbruch hat ebenfalls nur vier Glieder.

III. Endlich beweisen wir

Satz 12. *Der Kettenbruch nach nächsten Ganzen für eine quadratische Irrationalzahl ist stets periodisch.* (*Minnigerode* **1**, *Hurwitz* **1**.)

Beweis. Wegen der Irrationalität ist der Kettenbruch gewiß unendlich. Außerdem ist nach Satz 10 für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} = \frac{b_\nu - 1 + a_\nu}{2} + \frac{b_\nu + a_{\nu+1} - 1}{2} \geqq \frac{1+a_\nu}{2} + \frac{1}{2} > 0.$$

Nach Satz 6 wird daher, je nachdem $a_\nu = +1$ oder $a_\nu = -1$ ist, ξ_ν oder $\xi_\nu - 1$ ein vollständiger Quotient des regelmäßigen Kettenbruches sein. Da aber unter diesen nur eine endliche Anzahl verschiedener ist, so kann auch für die ξ_ν nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte in Betracht kommen. Ist also etwa $\xi_{n+k} = \xi_n$, so hat man

$$\begin{aligned} \xi_n &= b_n + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \cdots \\ = \xi_{n+k} &= b_{n+k} + \frac{a_{n+k+1}|}{|b_{n+k+1}} + \frac{a_{n+k+2}|}{|b_{n+k+2}} + \cdots, \end{aligned}$$

und da dies unendliche Kettenbrüche nach nächsten Ganzen sind, so ist wegen deren Eindeutigkeit

$$b_{n+k} = b_n,\ b_{n+k+1} = b_{n+1},\ b_{n+k+2} = b_{n+2}, \ldots$$

$$a_{n+k+1} = a_{n+1},\ a_{n+k+2} = a_{n+2}, \ldots,$$

also in der Tat Periodizität.

§ 40. Singuläre Kettenbrüche.[1])

I. Mit den Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen ist eine andere Art von halbregelmäßigen Kettenbrüchen eng verwandt. Wenn nämlich

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ein halbregelmäßiger Kettenbruch ist, so brauchen die durch „Inversion" entstehenden Kettenbrüche der Form

$$b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \cdots + \frac{a_2|}{|b_1} = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} \qquad \text{(Kap. I, Formel (20))}$$

nicht auch halbregelmäßig zu sein; vielmehr sind sie es definitionsgemäß dann und nur dann, wenn $b_1 \geqq 2$, und $b_\nu + a_\nu \geqq 1$ für $\nu > 1$ ist. Von besonderem Interesse sind nun diejenigen halbregelmäßigen Kettenbrüche, bei denen durch Inversion stets solche nach nächsten Ganzen entstehen. Wir definieren sie in folgender Weise:

Definition. *Ein endlicher oder unendlicher halbregelmäßiger Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

heißt singulär, wenn für $\nu \geqq 1$ die Ungleichungen bestehen:

$$b_\nu \geqq 2, \; b_\nu + a_\nu \geqq 2.$$

Hieraus folgt ohne weiteres die Reziprozität, die zwischen den singulären Kettenbrüchen und denen nach nächsten Ganzen besteht und die sich ausspricht in

Satz 13. *Wenn von den zwei endlichen halbregelmäßigen Kettenbrüchen*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu},$$

$$b_\nu + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-2}} + \cdots + \frac{a_2|}{|b_1}$$

der erste nach nächsten Ganzen ist, so ist der zweite singulär, und umgekehrt, wenn der erste singulär, so ist der zweite nach nächsten Ganzen.

II. Unser Hauptziel ist nun nachzuweisen, daß jede reelle Zahl sich in einen singulären Kettenbruch entwickeln läßt, und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise. Dazu benötigen wir zunächst

1) Hurwitz, der diese Art von Kettenbrüchen näher studiert hat, bezeichnet sie als solche „zweiter Art". (*Hurwitz* 1.)

Satz 14. *Unter den singulären Kettenbrüchen mit dem Anfangsglied* 0 *gibt es einen, der kleiner ist als jeder andere, nämlich den periodischen:*

$$\frac{-1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots = -\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

und ebenso einen, der größer ist, als jeder andere, nämlich den periodischen:

$$\frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Beweis. Daß der Kettenbruch

$$\frac{-1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots$$

singulär ist, folgt aus der Definition, und wegen der Periodizität muß er eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x = \frac{-1}{3+x}$ sein, also gleich $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ oder $-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Da er aber zwischen $b_0 = 0$ und $b_0 + a_1 = -1$ liegt, so kann er nur den Wert $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ haben. Also ist

$$\frac{-1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}. \tag{1}$$

Nehmen wir nun an, es gäbe einen hiervon verschiedenen singulären Kettenbruch mit dem Anfangsglied 0, für welchen

$$\xi_0 = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \leq -\frac{3-\sqrt{5}}{2} \tag{2}$$

ausfällt, so muß gewiß ξ_0 negativ, also $a_1 = -1$ sein. Wegen der Singularität ist dann $b_1 \geq 3$. Wäre nun $b_1 \geq 4$, so hätte man

$$\xi_1 = b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots > 3,$$

also auch

$$\xi_0 = \frac{a_1}{\xi_1} = -\frac{1}{\xi_1} > -\frac{1}{3} > -\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

im Widerspruch mit (2). Es ist daher $b_1 = 3$, so daß der Kettenbruch (2) mit dem Teilbruch $\frac{-1|}{|3}$ beginnt. Da er aber von (1) verschieden sein soll, so ist die Anzahl der zu Beginn stehenden Teilbrüche $\frac{-1|}{|3}$ endlich. Nennen wir sie λ, wo also $\lambda \geq 1$, so ist einerseits nach (2):

$$-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \geq \xi_0 = \frac{-1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots - \frac{1|}{|3} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|\xi_{\lambda+1}} = \frac{A_\lambda \xi_{\lambda+1} + A_{\lambda-1} a_{\lambda+1}}{B_\lambda \xi_{\lambda+1} + B_{\lambda-1} a_{\lambda+1}},$$

anderseits nach (1):

$$-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{-1|}{|3}-\frac{1|}{|3}-\cdots-\frac{1|}{|3}-\frac{1|}{|\xi'}=\frac{A_\lambda\xi'-A_{\lambda-1}}{B_\lambda\xi'-B_{\lambda-1}},$$

wobei

$$\xi'=3-\frac{1|}{|3}-\frac{1|}{|3}-\frac{1|}{|3}-\cdots=3-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Man hat daher durch Vergleich dieser Formeln:

$$(3)\qquad \frac{A_\lambda\frac{3+\sqrt{5}}{2}-A_{\lambda-1}}{B_\lambda\frac{3+\sqrt{5}}{2}-B_{\lambda-1}}\geqq\frac{A_\lambda\xi_{\lambda+1}+A_{\lambda-1}a_{\lambda+1}}{B_\lambda\xi_{\lambda+1}+B_{\lambda-1}a_{\lambda+1}}.$$

Die B_λ berechnen sich hier durch die Rekursionsformel

$$B_\nu=3B_{\nu-1}-B_{\nu-2};\ B_0=1,\ B_1=3,$$

woraus sogleich $B_\lambda>B_{\lambda-1}$ folgt (durch Schluß von λ auf $\lambda+1$). Daher sind die Nenner in (3) sicher positiv, so daß man mit ihnen die Ungleichung multiplizieren darf. Dadurch erhält man

$$(A_\lambda B_{\lambda-1}-A_{\lambda-1}B_\lambda)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_{\lambda+1}+\xi_{\lambda+1}\right)\geqq 0,$$

oder weil

$$A_\lambda B_{\lambda-1}-A_{\lambda-1}B_\lambda=(-1)^{\lambda-1}a_1a_2\ldots a_\lambda=(-1)^{\lambda-1}(-1)^\lambda=-1$$

ist, sogleich

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}a_{\lambda+1}+\xi_{\lambda+1}\leqq 0.$$

Daher muß $a_{\lambda+1}=-1$ sein, so daß weiter

$$\xi_{\lambda+1}\leqq\frac{3+\sqrt{5}}{2},\text{ also } b_{\lambda+1}\leqq 3$$

folgt. Wegen der Singularität ist aber $b_{\lambda+1}+a_{\lambda+1}\geqq 2$, also notwendig $b_{\lambda+1}=3$. Dies besagt aber, daß der Kettenbruch (2) mit mehr als λ Teilbrüchen $\frac{-1|}{|3}$ beginnt, gegen unsere Annahme. Wegen dieses Widerspruches ist die Ungleichung (2) nicht möglich, und somit der erste Teil von Satz 14 bewiesen.

Was den zweiten Teil anbelangt, so ist nach (1)

$$(4)\qquad \frac{1|}{|2}-\frac{1|}{|3}-\frac{1|}{|3}-\cdots=\frac{1}{2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Haben wir nun irgend einen singulären Kettenbruch mit dem Anfangsglied 0, für welchen

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \geqq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \tag{5}$$

ist, so muß zunächst $a_1 = +1$ sein. Anderseits folgt dann aus (5) (nach Satz 2, Kap. I):

$$b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \leqq \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

also $b_1 \leqq 2$; wegen der Singularität daher $b_1 = 2$. Dann kommt aber

$$\frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \leqq \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 2 = -\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

und da links ein singulärer Kettenbruch mit dem Anfangsglied 0 steht, so kann dies nach dem Bewiesenen nur der Kettenbruch (1) sein, so daß der Kettenbruch in (5) mit dem in (4) identisch sein muß. Damit ist Satz 14 vollständig bewiesen.

III. Liegt nun irgend ein singulärer Kettenbruch vor:

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots,$$

so sind auch

$$\xi_\nu - b_\nu = \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

solche, und zwar mit dem Anfangsglied 0. Also ist nach Satz 14

$$-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqq \xi_\nu - b_\nu < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{6}$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2} < b_\nu \leqq \xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Bei gegebenem ξ_ν ist durch diese Ungleichungen b_ν als ganze Zahl eindeutig festgelegt, außer wenn zufällig $\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gleich einer ganzen Zahl g sein sollte, in welchem Fall $b_\nu = g$ oder $b_\nu = g + 1$ sein könnte. Aus diesen Untersuchungen geht nun hervor, daß das in § 36 beschriebene Verfahren zur Herstellung halbregelmäßiger Kettenbrüche jedenfalls nur dann einen singulären Kettenbruch liefern kann, wenn für b_ν jedesmal diejenige (im allgemeinen eindeutig bestimmte) ganze Zahl gewählt wird, die den Ungleichungen (7) genügt, wodurch dann $a_{\nu+1}$ mitbestimmt ist. (*Hurwitz* 1.) Weil wegen (7) a fortiori $|\xi_\nu - b_\nu| < 1$ wird, so entsteht hierbei in der Tat ein halbregelmäßiger Kettenbruch für die Zahl ξ_0. Ob dieser aber auch wirklich singulär ist, wissen

wir bis jetzt noch nicht; um dies zu prüfen, nehmen wir zuerst an, daß niemals $\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ einer ganzen Zahl gleich wird. Dann ist also in (6) Gleichheit ausgeschlossen, und es folgt

$$\frac{\sqrt{5}-3}{2} < \xi_\nu - b_\nu < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Daher ist für $a_\nu = +1$:

$$\frac{1}{\xi_\nu} = \frac{a_\nu}{\xi_\nu} = \xi_{\nu-1} - b_{\nu-1} < \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

also auch

$$\xi_\nu > \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \text{für } a_\nu = +1; \tag{8}$$

dagegen für $a_\nu = -1$:

$$\frac{1}{\xi_\nu} = -\frac{a_\nu}{\xi_\nu} = b_{\nu-1} - \xi_{\nu-1} < \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

und also

$$\xi_\nu > \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} \qquad \text{für } a_\nu = -1. \tag{9}$$

Nun unterscheiden wir vier Fälle, je nach den Vorzeichen von a_ν und $a_{\nu+1}$.

Erster Fall: $a_\nu = +1$, $a_{\nu+1} = +1$.

Nach (8) ist in diesem Fall

$$\xi_\nu > \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \xi_{\nu+1} > \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

also

$$b_\nu = \xi_\nu - \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} = \xi_\nu - \frac{1}{\xi_{\nu+1}} > \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 1;$$

daher gewiß $b_\nu \geqq 2$, $b_\nu + a_\nu \geqq 3$.

Zweiter Fall: $a_\nu = +1$, $a_{\nu+1} = -1$.

Nach (8) ist wieder $\xi_\nu > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

also

$$b_\nu = \xi_\nu - \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} = \xi_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}} > \xi_\nu > \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 1;$$

daher ebenfalls $b_\nu \geqq 2$, $b_\nu + a_\nu \geqq 3$.

Dritter Fall: $a_\nu = -1$, $a_{\nu+1} = +1$.

Diesmal folgt aus (9) und (8):

$$\xi_\nu > \frac{\sqrt{5}+3}{2}, \quad \xi_{\nu+1} > \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

also

$$b_\nu = \xi_\nu - \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} = \xi_\nu - \frac{1}{\xi_{\nu+1}} > \frac{\sqrt{5}+3}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}+1} = 2;$$

daher diesmal $b_\nu \geqq 3$, $b_\nu + a_\nu \geqq 2$.

Vierter Fall: $a_\nu = -1$, $a_{\nu+1} = -1$.

Nach (9) ist wieder $\xi_\nu > \frac{\sqrt{5}+3}{2}$,

also

$$b_\nu = \xi_\nu - \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} = \xi_\nu + \frac{1}{\xi_{\nu+1}} > \xi_\nu > \frac{\sqrt{5}+3}{2} > 2;$$

daher wiederum $b_\nu \geqq 3$, $b_\nu + a_\nu \geqq 2$.

In allen vier Fällen ist sonach sicher $b_\nu \geqq 2$, $b_\nu + a_\nu \geqq 2$; daher der Kettenbruch in der Tat singulär.

Wir wenden uns jetzt zu dem oben ausgeschlossenen Fall, daß es einen Index $\nu = n$ gibt, für den $\xi_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ganzzahlig wird. Es ist dann $\xi_n = g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, wo g eine ganze Zahl; folglich

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n \quad |}{|\, g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{A_{n-1}\left(g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + A_{n-2}\,a_n}{B_{n-1}\left(g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + B_{n-2}\,a_n}.$$

Da aber

$$A_{n-1} \cdot B_{n-2} a_n - B_{n-1} \cdot A_{n-2} a_n = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n = \pm 1$$

ist, so besagt diese Gleichung, daß ξ_0 zu $g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, also auch zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ selbst **äquivalent** ist (§ 17). Wir sehen also, daß der ausgeschlossene Fall überhaupt nur bei den Zahlen eintreten kann, die zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalent sind; weiterhin wird sich ergeben, daß er bei diesen auch stets eintritt. Zuvor aber formulieren wir das bisherige Ergebnis in

Satz 15. *Jede reelle Zahl, die nicht zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalent ist, ist einem, aber auch nur einem singulären Kettenbruch gleich.* (*Hurwitz* 1.)

Um jetzt nachzuweisen, daß bei den zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalenten Zahlen ξ_0 notwendig einmal $\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ einer ganzen Zahl gleich werden muß, nehmen wir an, das sei nicht der Fall. Nach dem Bewiesenen wäre dann ξ_0 einem singulären Kettenbruch gleich, der wegen der Irrationalität natürlich unendlich ist; dieser sei

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots.$$

Wenden wir hierauf die Transformation $\mathfrak{T}_1$ an, so geht ein Kettenbruch

$$\xi_0 = d_0 + \frac{1|}{|d_1} + \frac{1|}{|d_2} + \cdots \tag{10}$$

hervor, der als Teilnenner außer Einsen die Zahlen

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

hat. Nun ist aber nach den Bedingungen der Singularität für $\nu \geqq 1$

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} = \frac{b_\nu + a_\nu - 1}{2} + \frac{b_\nu - 1 + a_{\nu+1}}{2}$$

$$\geqq \frac{1}{2} + \frac{1+a_{\nu+1}}{2} > 0$$

so daß der Kettenbruch (10) bereits regelmäßig ist. Anderseits ist

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots = [0, \bar{1}],$$

so daß nach Satz 23, Kap. II in dem regelmäßigen Kettenbruch für die äquivalente Zahl ξ_0 von einer bestimmten Stelle an auch nur Einsen als Teilnenner vorkommen dürfen. Folglich wird für alle hinreichend großen ν:

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} = 1,$$

und das erfordert, wie man leicht einsieht, im Verein mit den Bedingungen der Singularität, daß für große ν-Werte stets $b_\nu = 3$, $a_\nu = -1$ ist. Daher wird für große ν:

$$\xi_\nu = 3 - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

so daß $\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ doch eine ganze Zahl ist, entgegen unserer Annahme.

Damit ist also gezeigt, daß bei den zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalenten Zahlen, wenn man b_ν stets den Ungleichungen (7) gemäß wählt, notwendig $\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ einmal gleich einer ganzen Zahl g werden muß. Ist das schon für $\nu = 0$ der Fall, so folgt

$$\xi_0 = g + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = g + 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Nach Satz 14 gibt es aber für die Zahlen $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ gerade

je einen singulären Kettenbruch mit dem Anfangsglied 0, so daß man für ξ_0 genau zwei singuläre Kettenbrüche erhält, nämlich

$$g + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = g + \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots$$
$$= g + 1 - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots.$$

Allgemeiner sei $\nu = n$ der kleinste Index, für welchen $\xi_n - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gleich einer ganzen Zahl g wird. Dann ist

$$\xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{\left|g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right.},$$

wo die b_ν wieder den Forderungen (7) gemäß zu wählen sind; also nach dem soeben Bewiesenen:

$$(11)\begin{cases} \xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|g} + \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots \\ \quad = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{|g+1} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots; \end{cases}$$

und, wenn die Zahl ξ_0 überhaupt einem singulären Kettenbruch gleich ist, so kann es offenbar nur einer von diesen beiden sein. Diese sind aber tatsächlich alle zwei singulär. Denn da für $\nu < n$ der Ausdruck $\xi_\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ keine ganze Zahl sein soll, so ergibt sich genau wie oben (Seite 177f.):

$$b_\nu \geqq 2, \; b_\nu + a_\nu \geqq 2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

und außerdem (vgl. (8) und (9)):

$$\xi_n > \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{für } a_n = +1$$
$$\xi_n > \frac{\sqrt{5}+3}{2} \quad \text{für } a_n = -1.$$

Da aber $\xi_n = g + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist, so folgt aus diesen beiden Ungleichungen

$$\text{für } a_n = +1: \quad g > 1, \text{ also } g \geqq 2, \; g + a_n \geqq 3,$$
$$\text{für } a_n = -1: \quad g > 2, \text{ also } g \geqq 3, \; g + a_n \geqq 2.$$

Daher sind die beiden Kettenbrüche (11) in der Tat singulär, und es ergibt sich somit

Satz 16. *Jede zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalente Zahl läßt sich auf zwei, aber auch nur zwei nicht identische Arten als singulärer Kettenbruch darstellen. Beide Darstellungen sind periodisch mit der eingliedrigen Periode $\frac{-1|}{|3}$.*

IV. Für die singulären Kettenbrüche und die nach nächsten Ganzen gilt ein gemeinsames Näherungsgesetz; nämlich

Satz 17. *Entwickelt man eine Zahl ξ_0 in einen Kettenbruch nach nächsten Ganzen oder in einen singulären Kettenbruch, so ist jeder Näherungsbruch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ zugleich ein Näherungsbruch des regelmäßigen Kettenbruches (eventuell mit dem letzten Teilnenner 1). Außerdem gilt das Näherungsgesetz*

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| \leqq \frac{\sqrt{5}-1}{2B_\nu^2},$$

und zwar Gleichheit nur dann, wenn $\xi_0 = b_0 + \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots$, und wenn es sich dabei um den Näherungsbruch nullter Ordnung $\frac{b_0}{1}$ handelt. (*Hurwitz* **1.**)

Beweis. Bei beiden Kettenbrucharten sahen wir bereits (Seite 172 und 179), daß für $\nu \geqq 1$ die Ungleichung

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} > 0$$

gilt. Daraus folgt nach Satz 5 schon der erste Teil unserer Behauptung. Zum Beweis des Näherungsgesetzes gehen wir aus von der schon oft benutzten Formel

$$\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + a_\nu A_{\nu-2}}{B_{\nu-1}\xi_\nu + a_\nu B_{\nu-2}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{\pm 1}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + a_\nu B_{\nu-2})}.$$

Tritt hier $\nu + 1$ an Stelle von ν, so kommt:

$$\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| = \frac{1}{B_\nu^2\left(\xi_{\nu+1} + a_{\nu+1}\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu}\right)}.$$

Wir brauchen also nur zu beweisen, daß

$$\xi_{\nu+1} + a_{\nu+1}\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \geqq \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. Nun ist aber, wenn es sich um den Kettenbruch nach nächsten Ganzen handelt,

$$\xi_{\nu+1} \geqq 2, \quad a_{\nu+1}\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} = \frac{a_{\nu+1}|}{|b_\nu} + \frac{a_\nu|}{|b_{\nu-1}} + \cdots + \frac{a_2|}{|b_1} > -\frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

weil dieser letzte Kettenbruch dann singulär ist. Handelt es sich aber um den singulären Kettenbruch, so ist

$$\xi_{\nu+1} - b_{\nu+1} = \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \frac{a_{\nu+3}|}{|b_{\nu+3}} + \cdots \geqq -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$b_{\nu+1} + a_{\nu+1}\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} = b_{\nu+1} + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_\nu} + \cdots + \frac{a_2|}{|b_1} \geqq 2,$$

weil dieser letzte Kettenbruch jetzt einer nach nächsten Ganzen ist. Dabei findet nur dann in beiden Formeln Gleichheit statt, wenn

$$\nu = 0, \quad b_1 = 2,$$

$$a_\nu = -1,\ b_\nu = 3 \quad \text{für } \nu \geqq 2,$$

also $\xi_0 = b_0 + \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|3} - \frac{1|}{|3} - \cdots$ ist. In jedem Fall kommt also

$$\xi_{\nu+1} + a_{\nu+1}\frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \geqq 2 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

und zwar Gleichheit nur in dem angegebenen Ausnahmefall. W. z. b. w.

V. Endlich beweisen wir noch

Satz 18. *Die singuläre Kettenbruchentwicklung für eine quadratische Irrationalzahl ist stets periodisch.*

In der Tat sahen wir bereits, daß aus den Bedingungen der Singularität sogleich

$$b_\nu - \frac{1-a_\nu}{2} - \frac{1-a_{\nu+1}}{2} > 0$$

folgt. Daraus ergibt sich aber die Periodizität genau wie bei Satz 12, sofern nur die Kettenbruchentwicklung eindeutig ist, also wenn ξ_0 nicht zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalent ist. Für die zu $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ äquivalenten Zahlen aber wurde die Periodizität schon in Satz 16 festgestellt.

Die singulären und die Kettenbrüche nach nächsten Ganzen lassen sich als die einfachsten und weitaus wichtigsten Spezialfälle einer allgemeineren Klasse von Kettenbrüchen ansehen, die *Mc Kinney* **1** studiert hat. Wir müssen uns aber mit diesem Hinweis begnügen.

§ 41. Diagonalkettenbrüche.

I. Sei ξ_0 wieder eine reelle Zahl, aber weder eine ganze noch die Hälfte einer ganzen Zahl. Wir entwickeln sie in einen **regelmäßigen** Kettenbruch

$$(1) \qquad \xi_0 = [b_0, b_1, b_2, \ldots] = b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots,$$

der, wenn er endlich ist, einen letzten Teilnenner größer als 1 haben soll, und bezeichnen, wie gewöhnlich, die Näherungsbrüche mit

$$\text{(2)} \qquad \frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \frac{A_2}{B_2}, \ldots,$$

die vollständigen Quotienten mit $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ Ist dann $\frac{C}{D}$ ein irreduzibler Bruch mit positivem Nenner und so beschaffen, daß

$$\text{(3)} \qquad \left| \xi_0 - \frac{C}{D} \right| < \frac{1}{2D^2},$$

so ist nach Satz 11, Kap. II der Bruch $\frac{C}{D}$ in der Reihe (2) enthalten, und zwar hat nach Satz 14, Kap. II von je zwei aufeinanderfolgenden Brüchen der Reihe (2) mindestens einer diese Eigenschaft. Vielfach haben sogar alle Brüche (2) diese Eigenschaft. Ist das aber nicht der Fall, so sei $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ einer, der sie nicht hat; dann ist

$$\left| \xi_0 - \frac{A_\lambda}{B_\lambda} \right| \geqq \frac{1}{2B_\lambda^2}.$$

Wegen $\xi_0 = \frac{A_\lambda \xi_{\lambda+1} + A_{\lambda-1}}{B_\lambda \xi_{\lambda+1} + B_{\lambda-1}}$ ist das aber gleichbedeutend mit:

$$\frac{1}{B_\lambda (B_\lambda \xi_{\lambda+1} + B_{\lambda-1})} \geqq \frac{1}{2B_\lambda^2},$$

oder also mit:

$$B_\lambda \xi_{\lambda+1} + B_{\lambda-1} \leqq 2B_\lambda.$$

Infolgedessen ist $\xi_{\lambda+1} \leqq 2$, und zwar ist Gleichheit nur denkbar für $\lambda = 0$; aber dann wäre $\xi_1 = 2$, also $\xi_0 = b_0 + \frac{1}{2}$ die Hälfte einer ganzen Zahl, entgegen unserer Voraussetzung. Also muß $\xi_{\lambda+1} < 2$, folglich $b_{\lambda+1} = 1$ sein. Sind daher

$$\text{(4)} \qquad \frac{A_p}{B_p}, \frac{A_q}{B_q}, \frac{A_r}{B_r}, \ldots$$

die sämtlichen Brüche der Reihe (2), welche nicht die in (3) ausgedrückte Eigenschaft haben, so ist

$$b_{p+1} = 1, \; b_{q+1} = 1, \; b_{r+1} = 1, \; \ldots$$

Wir wollen diese Teilnenner als „ausgezeichnete" bezeichnen und ebenso die Glieder $\frac{1 |}{| b_{p+1}}, \ldots$ als „ausgezeichnete Glieder".[1])

1) Um Irrtümern vorzubeugen, sei bemerkt, daß ein Teilnenner 1 durchaus nicht immer ausgezeichnet sein muß. Eine Entscheidung darüber gewinnt man auf folgende Weise: Wie wir sahen, wird $b_{\lambda+1} = 1$ dann und nur dann ein ausgezeichneter Teilnenner sein, wenn

$$B_\lambda \xi_{\lambda+1} + B_{\lambda-1} < 2B_\lambda$$

Von den Brüchen (2) können keine zwei aufeinanderfolgende der Reihe (4) angehören, weil, wie schon erwähnt, mindestens einer von zwei aufeinanderfolgenden die durch (3) bezeichnete Eigenschaft haben muß. Folglich ist in der Reihe der Zahlen $p, q, r, \ldots$ jede folgende mindestens um 2 größer als die vorausgehende, so daß in dem Kettenbruch (1) keine zwei ausgezeichneten Glieder aufeinanderfolgen. Auch sieht man sofort, daß bei endlichen Kettenbrüchen der letzte Teilnenner sicher kein ausgezeichneter sein kann, weil er ja größer als 1 sein sollte. Wir schreiben nun Formel (1), indem wir die ausgezeichneten Glieder besonders hervorheben, folgendermaßen:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\xi_0 = b_0 + \cdots + \frac{1|}{|b_p} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|b_{p+2}} + \cdots + \frac{1|}{|b_q} + \frac{1|}{|1}\\ + \frac{1|}{|b_{q+2}} + \cdots + \frac{1|}{|b_r} + \frac{1|}{|1} + \cdots\end{aligned}$$

Bildet man nun den neuen Kettenbruch

$$(6)\quad b_0 + \cdots + \frac{1|}{|b_{p-1}} + \frac{1|}{|b_p+1} - \frac{1|}{|b_{p+2}+1} + \cdots + \frac{1|}{|b_q} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|b_{q+2}} + \cdots,$$

---

ist. Diese Ungleichung wird sicher erfüllt, wenn $\lambda = 0$ ist; der Teilnenner b_1 ist also, wenn er den Wert 1 hat, stets ausgezeichnet. Für $\lambda > 0$ aber läßt sich unsere Ungleichung folgendermaßen schreiben:

$$2 - \xi_{\lambda+1} \geqq \frac{B_{\lambda-1}}{B_\lambda} = [0, b_\lambda, b_{\lambda-1}, \ldots, b_1].$$

Nun ist $b_{\lambda+1} = 1$, also $\xi_{\lambda+1} = 1 + \frac{1|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$, oder

$$\begin{aligned}2 - \xi_{\lambda+1} &= 1 - \frac{1|}{|b_{\lambda+2}} + \frac{1|}{|b_{\lambda+3}} + \frac{1|}{|b_{\lambda+4}} + \cdots\\ &= \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|b_{\lambda+2}-1} + \frac{1|}{|b_{\lambda+3}} + \frac{1|}{|b_{\lambda+4}} + \cdots \qquad \text{(Transformation } t_1)\\ &= [0, 1, b_{\lambda+2}-1, b_{\lambda+3}, b_{\lambda+4}, \ldots].\end{aligned}$$

Falls $b_{\lambda+2} = 1$ ist, wendet man noch eine Transformation t_2 an und erhält:

$$2 - \xi_{\lambda+1} = \frac{1|}{|1+b_{\lambda+3}} + \frac{1|}{|b_{\lambda+4}} + \cdots = [0, 1+b_{\lambda+3}, b_{\lambda+4}, b_{\lambda+5}, \cdots].$$

Die Bedingung dafür, daß $b_{\lambda+1} = 1$ $(\lambda > 0)$ ein ausgezeichneter Teilnenner ist, lautet also

$$\text{für } b_{\lambda+2} > 1:\quad [0, 1, b_{\lambda+2}-1, b_{\lambda+3}, b_{\lambda+4}, \cdots] > [0, b_\lambda, b_{\lambda-1}, \cdots, b_1],$$

$$\text{für } b_{\lambda+2} = 1:\quad [0, 1+b_{\lambda+3}, b_{\lambda+4}, b_{\lambda+5}, \cdots] \geqq [0, b_\lambda, b_{\lambda-1}, \cdots, b_1].$$

Ob sie erfüllt ist oder nicht, kann nach den Sätzen 7 und 8, Kap. II in jedem gegebenen Fall sofort entschieden werden.

so sieht man, daß (5) aus (6) hervorgeht durch eine Transformation t_1. Die Wirkung einer solchen wurde aber in § 37, II untersucht; sie besteht darin, daß der Kettenbruch (6) genau die gleichen Näherungsbrüche hat wie (5), in der gleichen Reihenfolge; nur fehlt der Näherungsbruch $\frac{A_p}{B_p}$.

Von den ausgezeichneten Gliedern des Kettenbruches (5) ist bei dem Übergang zu (6) eines weggefallen, nämlich $\frac{1}{b_{p+1}}$. Alle andern sind aber unverändert geblieben, weil ja die einzigen veränderten Glieder $\frac{1}{b_p}$ und $\frac{1}{b_{p+2}}$ nicht ausgezeichnet sind (sonst hätte man zwei aufeinanderfolgende ausgezeichnete). Man kann daher jetzt auf (6) den gleichen Prozeß anwenden, um auch den Näherungsbruch $\frac{A_q}{B_q}$ wegzuschaffen, sodann $\frac{A_r}{B_r}$, usw. Die Gesamttransformation, durch welche die sämtlichen Näherungsbrüche (4) beseitigt werden, während alle andern erhalten bleiben, und zwar in ihrer natürlichen Reihenfolge, läßt sich dann folgendermaßen beschreiben:

„Jeder Teilnenner, der einem ausgezeichneten Glied unmittelbar nachfolgt oder vorangeht, wird um 1 erhöht; nur wenn er zugleich einem ausgezeichneten nachfolgt und dem nächsten vorangeht, wird er um 2 erhöht. Sodann wird jeder auf ein ausgezeichnetes Glied folgende Teilzähler mit dem Minuszeichen versehen, und endlich werden alle ausgezeichneten Glieder weggestrichen."

Der so entstehende Kettenbruch

$$d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \cdots \tag{7}$$

ist offenbar halbregelmäßig, und wenn man auf ihn die Transformation $\mathfrak{T}_1$ anwendet, so geht gerade wieder (5) hervor. Daher hat der Kettenbruch (7) sicher auch den Wert ξ_0; seine Näherungsbrüche sind nach seiner Entstehungsweise alle und nur die irreduziblen Brüche mit positivem Nenner, für welche die Näherungsformel (3) gilt. Wir nennen (7) mit *Minkowski* 1 den Diagonalkettenbruch[1]) der Zahl ξ_0. Man sieht leicht, daß es keinen andern halbregelmäßigen Kettenbruch mit den gleichen Näherungsbrüchen in der gleichen Reihenfolge geben kann. Denn dieser müßte auch die gleichen Näherungszähler und -Nenner haben, weil ein halbregelmäßiger Kettenbruch nur irreduzible Nähe-

1) Die Bezeichnung rührt von einer eigentümlichen geometrischen Erzeugungsweise dieses Kettenbruches her, auf die wir nicht eingehen können. (*Minkowski* 1.)

rungsbrüche mit positiven Nennern hat. Sind dann $\frac{C_{\nu-2}}{D_{\nu-2}}, \frac{C_{\nu-1}}{D_{\nu-1}}, \frac{C_\nu}{D_\nu}$ drei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche, so ist

$$C_\nu = d_\nu C_{\nu-1} + c_\nu C_{\nu-2}$$
$$D_\nu = d_\nu D_{\nu-1} + c_\nu D_{\nu-2},$$

wodurch wegen $C_{\nu-1}D_{\nu-2} - C_{\nu-2}D_{\nu-1} = \pm 1 \neq 0$ die c_ν, d_ν eindeutig bestimmt sind. Daraus folgt

Satz 19. *Ist die reelle Zahl ξ_0 weder ganz noch die Hälfte einer ganzen Zahl, so gibt es unter ihren halbregelmäßigen Kettenbrüchen einen und nur einen — den Diagonalkettenbruch —, bei dem die Näherungsbrüche nach wachsenden Nennern geordnet sind und in ihrer Gesamtheit sich decken mit der Gesamtheit aller derjenigen irreduzibeln Brüche $\frac{C}{D}$ $(D > 0)$, für welche die Näherungsformel gilt:*

$$\left| \xi_0 - \frac{C}{D} \right| < \frac{1}{2D^2}. \quad (\textit{Minkowski } 1.)$$

II. Kennt man den regelmäßigen Kettenbruch für eine Zahl ξ_0, so kann man durch die oben beschriebene Transformation sogleich den Diagonalkettenbruch herstellen, da ja die Fußnote auf Seite 183 die ausgezeichneten Glieder sofort zu erkennen gestattet. Man kann aber den Diagonalkettenbruch, nachdem seine Existenz ja nachgewiesen ist, auch direkt herstellen, ohne von dem regelmäßigen auszugehen. Ist nämlich

$$\xi_0 = d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \cdots \tag{8}$$

der Diagonalkettenbruch für die Zahl ξ_0, so bezeichnen wir seine Näherungsbrüche mit $\frac{C_\nu}{D_\nu}$ und setzen

$$\xi_0 = d_0 + \frac{c_1}{\xi_1'}; \quad \xi_\nu' = d_\nu + \frac{c_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}'} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Augenscheinlich muß d_0 die nächste bei ξ_0 gelegene ganze Zahl sein, wodurch dann auch c_1 $(= \pm 1)$ und ξ_1' bekannt sind. Nimmt man allgemein an, der Diagonalkettenbruch sei bereits bis zum Teilnenner d_{n-1} gefunden, wodurch auch c_n $(= \pm 1)$ und ξ_n' bekannt sind, so handelt es sich darum, d_n zu finden. Ist aber g_n die größte in ξ_n' enthaltene ganze Zahl, so kann, da der Diagonalkettenbruch halbregelmäßig ist, nur $d_n = g_n$ oder $d_n = g_n + 1$ sein, so daß entweder

$$\frac{C_n}{D_n} = \frac{g_n C_{n-1} + c_n C_{n-2}}{g_n D_{n-1} + c_n D_{n-2}} \text{ oder aber } \frac{C_n}{D_n} = \frac{(g_n+1) C_{n-1} + c_n C_{n-2}}{(g_n+1) D_{n-1} + c_n D_{n-2}}$$

sein muß. Um hierüber zu entscheiden, braucht man nur zu prüfen, ob dem ersten dieser beiden Brüche, der ja den kleineren Nenner hat, die

für die Näherungsbrüche des Diagonalkettenbruches geforderte Eigenschaft

$$(10)\qquad \left|\xi_0 - \frac{g_n C_{n-1} + c_n C_{n-2}}{g_n D_{n-1} + c_n D_{n-2}}\right| < \frac{1}{2(g_n D_{n-1} + c_n D_{n-2})^2}$$

zukommt. Ist das der Fall, so ist $d_n = g_n$ zu setzen; andernfalls kann nicht $d_n = g_n$ sein, also ist dann $d_n = g_n + 1$. Somit ergibt sich

Satz 20. *Um für eine Zahl* ξ_0 *den Diagonalkettenbruch*

$$\xi_0 = d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \cdots$$

zu finden, seien $\frac{C_\nu}{D_\nu}$ *seine (noch unbekannten) Näherungsbrüche, und sei weiter*

$$\xi_0 = d_0 + \frac{c_1}{\xi_1'};\quad \xi_\nu' = d_\nu + \frac{c_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}'}\qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Das Anfangsglied d_0 *ist dann die nächste bei* ξ_0 *gelegene ganze Zahl, wodurch* c_1 $(= \pm 1)$ *und* ξ_1' *mit bestimmt sind. Wenn allgemein der Kettenbruch bereits bis zum Teilnenner* d_{n-1} *gefunden ist, wodurch eo ipso auch die Zahlen*

$$c_n\ (= \pm 1),\ \xi_n',\ C_{n-1},\ D_{n-1},\ C_{n-2},\ D_{n-2}$$

bekannt sind, so sei g_n *die größte in* ξ_n' *enthaltene ganze Zahl. Man hat dann* $d_n = g_n$ *oder* $d_n = g_n + 1$ *zu wählen, je nachdem die Ungleichung*

$$|g_n(\xi_0 D_{n-1} - C_{n-1}) + c_n(\xi_0 D_{n-2} - C_{n-2})| \cdot (g_n D_{n-1} + c_n D_{n-2}) < \tfrac{1}{2}$$

erfüllt ist oder nicht. (*Minkowski* **1.**)

In der Tat ist ja diese Ungleichung keine andere als (10).

Wenn in einem regelmäßigen Kettenbruch alle Teilnenner größer als 1 sind, so ist es bereits der Diagonalkettenbruch, da ja dann keine „ausgezeichneten" Teilnenner vorhanden sind. Jedoch gibt es auch Diagonalkettenbrüche, in denen Teilnenner 1 vorkommen. Entwickelt man z. B. die Zahl $\frac{5}{13}$ in einen Diagonalkettenbruch, so findet man diesen:

$$(11)\qquad \frac{5}{13} = 0 + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}.$$

Der erste Teilnenner d_1 aber kann niemals 1 sein; denn sonst wären die Näherungsbrüche nullter und erster Ordnung gleich $\frac{d_0}{1}$ und $\frac{d_0 + c_1}{1}$, und es müßte also

$$|\xi_0 - d_0| < \frac{1}{2},\quad |\xi_0 - (d_0 + c_1)| < \frac{1}{2}$$

sein, was offenbar nicht möglich ist.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Elemente eines halbregelmäßigen Kettenbruches genügen müssen, damit es ein Diagonalkettenbruch ist, sind nicht bekannt. Sie sind jedenfalls wesentlich komplizierterer Natur als bei den singulären Kettenbrüchen oder bei denen nach nächsten Ganzen. Wenn nämlich

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ein singulärer Kettenbruch ist, so sind

$$b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ebenfalls solche, und entsprechend ist es bei den Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen. Dagegen haben die Diagonalkettenbrüche nicht die analoge Eigenschaft; denn z. B. ist (11) ein Diagonalkettenbruch; dagegen

$$2 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2}$$

ist gewiß keiner, weil hier $d_1 = 1$ wäre.

III. Wir beweisen nun noch

Satz 21. *Der Diagonalkettenbruch für eine quadratische Irrationalzahl ist periodisch.* (*Minkowski* **1.**)

Zum Beweis der Periodizität genügt es diesmal nicht, wie in den beiden letzten Paragraphen nachzuweisen, daß für die ξ_ν nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte möglich ist. Denn aus der Gleichheit

$$\begin{aligned} \xi_n &= d_n + \frac{c_{n+1}|}{|d_{n+1}} + \frac{c_{n+2}|}{|d_{n+2}} + \cdots \\ = \xi_{n+k} &= d_{n+k} + \frac{c_{n+k+1}|}{|d_{n+k+1}} + \frac{c_{n+k+2}|}{|d_{n+k+2}} + \cdots \end{aligned}$$

könnte diesmal noch keineswegs die Identität der beiden Kettenbrüche geschlossen werden, da dies ja, wie wir sahen, keine Diagonalkettenbrüche zu sein brauchen, und wir auch nicht wissen, ob sie sonstwie eindeutig bestimmbar sind.

Wir entwickeln jetzt die quadratische Irrationalzahl ξ_0 in einen regelmäßigen Kettenbruch, der nach dem Lagrangeschen Satz periodisch ist:

$$(12) \qquad \xi_0 = [b_0, b_1, \ldots b_{h-1}, \overline{b_h, b_{h+1}, \ldots b_{h+k-1}}].$$

Da man den Periodenstrich an einer beliebigen späteren Stelle beginnen lassen kann, so behalten wir uns vor, die Zahl h nach Bedarf sehr groß zu wählen. Die Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ von (12) schreiben wir von $\frac{A_h}{B_h}$ angefangen in folgendem Schema hin:

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \frac{A_h}{B_h}, & \frac{A_{h+1}}{B_{h+1}}, & \ldots, & \frac{A_{h+k-1}}{B_{h+k-1}} \\ \frac{A_{h+k}}{B_{h+k}}, & \frac{A_{h+k+1}}{B_{h+k+1}}, & \ldots, & \frac{A_{h+2k-1}}{B_{h+2k-1}} \\ \frac{A_{h+2k}}{B_{h+2k}}, & \frac{A_{h+2k+1}}{B_{h+2k+1}}, & \ldots, & \frac{A_{h+3k-1}}{B_{h+3k-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Um nun aus (12) den Diagonalkettenbruch herzuleiten, sind nach dem zu Beginn dieses Paragraphen auseinandergesetzten Verfahren alle diejenigen Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ zu beseitigen, für welche $\left|\xi_0 - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right| \geqq \frac{1}{2B_\nu^2}$ ist. Wir werden jetzt zeigen, daß dabei von den Näherungsbrüchen einer einzelnen Kolonne des Schemas (13) entweder alle zu beseitigen sind, oder gar keiner (wenn h genügend groß gewählt ist).

Nehmen wir dies einstweilen als bewiesen an, so folgt daraus, daß in der periodisch sich wiederholenden Teilnennerfolge

$$b_h, b_{h+1}, \ldots b_{h+k-1}$$

von (12) die „ausgezeichneten“ Elemente allemal an der gleichen Stelle wiederkehren. Durch die auf S. 185 beschriebene Transformation in den Diagonalkettenbruch wird daher jede solche Teilnennerfolge in gleicher Weise transformiert, so daß der entstehende Kettenbruch wieder periodisch ist.

Es bleibt demnach in der Tat nur noch zu zeigen, daß von den Näherungsbrüchen, welche eine Kolonne des Schemas (13) füllen, entweder alle dem Diagonalkettenbruch angehören oder gar keiner. Nehmen wir etwa die erste Kolonne (für die andern ist der Beweis ganz ebenso), so ist also nachzuweisen, daß die Ungleichung

$$(14)\qquad \left|\xi_0 - \frac{A_{h+\lambda k}}{B_{h+\lambda k}}\right| < \frac{1}{2B_{h+\lambda k}^2},$$

wenn sie für einen der Werte $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, dann für alle diese Werte richtig ist. Da es uns aber freisteht, die Zahl h durch eine passende größere zu ersetzen, so kommt es auf das gleiche hinaus, wenn wir nur folgendes beweisen:

„Die Ungleichung (14) ist entweder nur für eine endliche Anzahl von λ-Werten richtig, oder für alle hinreichend großen.“ Dies wollen wir also jetzt dartun.

Wenn wieder mit ξ_ν die vollständigen Quotienten des regelmäßigen Kettenbruches bezeichnet werden, so ist wegen der Periodizität: $\xi_{h+1+\lambda k} = \xi_{h+1}$, also

$$\xi_0 = \frac{A_{h+\lambda k}\,\xi_{h+1} + A_{h+\lambda k-1}}{B_{h+\lambda k}\,\xi_{h+1} + B_{h+\lambda k-1}},$$

so daß (14) gleichbedeutend ist mit:

$$\frac{1}{B_{h+\lambda k}(B_{h+\lambda k}\xi_{h+1}+B_{h+\lambda k-1})}<\frac{1}{2B_{h+\lambda k}^2},$$

oder nach leichter Umformung

$$(15)\qquad 2-\xi_{h+1}<\frac{B_{h+\lambda k-1}}{B_{h+\lambda k}}.$$

Nun ist aber nach Formel (20), Kap. I oder nach § 11, I:

$$\frac{B_{h+\lambda k}}{B_{h+\lambda k-1}}=[b_{h+\lambda k}, b_{h+\lambda k-1}, \ldots b_2, b_1],$$

und dieser regelmäßige Kettenbruch hat mit dem periodischen

$$(16)\qquad [\overline{b_{h+k}, b_{h+k-1}, \ldots b_{h+2}, b_{h+1}}]$$

die ersten λk Glieder gemein, so daß die Zahl $\frac{B_{h+\lambda k}}{B_{h+\lambda k-1}}$ zwischen den Näherungsbrüchen $(\lambda k-2)^{\text{ter}}$ und $(\lambda k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von (16) liegt. Infolgedessen ist

$$\lim_{\lambda=\infty}\frac{B_{h+\lambda k}}{B_{h+\lambda k-1}}=[\overline{b_{h+k}, b_{h+k-1}, \ldots b_{h+2}, b_{h+1}}].$$

Aber dieser Kettenbruch hat nach Satz 6, Kap. III den Wert $-\frac{1}{\eta_{h+1}}$, wenn η_{h+1} die zu ξ_{h+1} konjugierte Zahl ist. Die rechte Seite von (15) hat also für $\lim \lambda=\infty$ den Grenzwert $-\eta_{h+1}$. Wenn nun die Ungleichung (15) für unendlich viele λ-Werte besteht, so ist also auch

$$2-\xi_{h+1}\leqq-\eta_{h+1}.$$

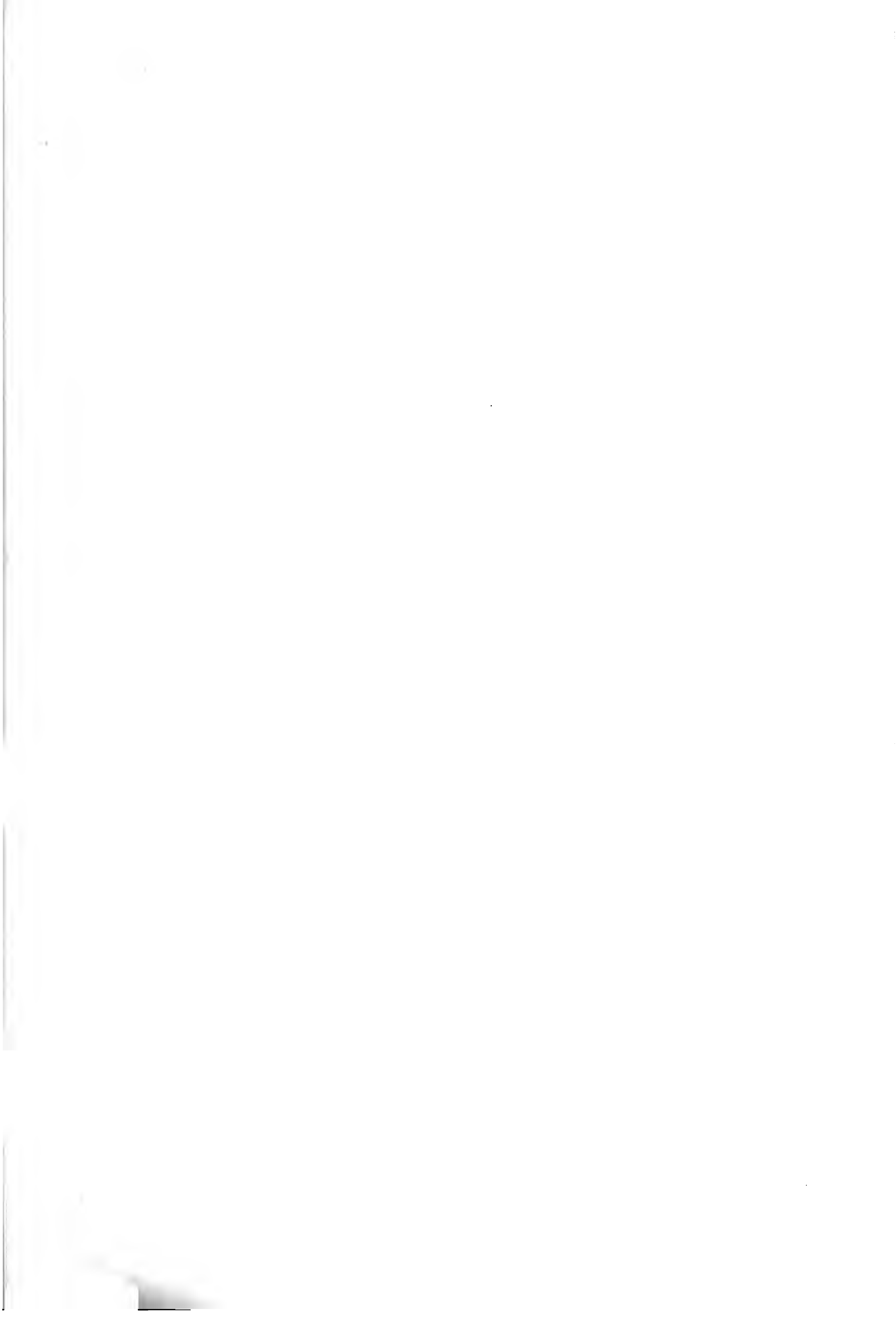
Aber hier ist Gleichheit ausgeschlossen, weil $\xi_{h+1}-\eta_{h+1}$ stets irrational ist. Es muß also notwendig

$$2-\xi_{h+1}<-\eta_{h+1}$$

sein, d. h. die linke Seite von (15) ist kleiner als der Grenzwert der rechten Seite. Infolgedessen muß die Ungleichung (15), wenn sie für unendlich viele λ-Werte besteht, gewiß für alle hinreichend großen λ bestehen. W. z. b. w.

II

ANALYTISCH-FUNKTIONENTHEORETISCHER TEIL



Sechstes Kapitel.

Transformation von Kettenbrüchen.

§ 42. Null als Teilzähler. — Äquivalente Kettenbrüche.

I. Sei

$$(1) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{0|}{|b_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \cdots$$

ein endlicher oder unendlicher Kettenbruch, dessen λ^{ter} Teilzähler Null ist, während im übrigen die Elemente ganz beliebige Zahlen sein dürfen. Nach den Formeln (24), Kap. I ist dann

$$(2) \qquad \begin{cases} A_{\lambda+\nu-1} = A_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} \\ B_{\lambda+\nu-1} = B_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda}. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man zweierlei:

a) Wenn der endliche Kettenbruch

$$(3) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} = \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}$$

sinnlos ist, d. h. wenn $B_{\lambda-1} = 0$, so sind auch die Näherungsbrüche von (1) von der $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Ordnung an sämtlich sinnlos. Insbesondere ist also der Kettenbruch (1) selbst sinnlos, bzw. wenn er unendlich ist, divergent.

b) Wenn der Kettenbruch (3) nicht sinnlos ist, so sind die nicht sinnlosen Näherungsbrüche von (1) von der $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Ordnung an alle einander gleich. Insbesondere gilt also

Satz 1. *Wenn der Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}} + \frac{0|}{|b_\lambda} + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \cdots$$

konvergiert, bzw. im Fall der Endlichkeit nicht sinnlos ist, so ist sein Wert gleich dem des endlichen Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}|}{|b_{\lambda-1}}.$$

Man sieht sogleich, daß der Kettenbruch (1) immer dann sinnlos bzw. divergent ist, wenn der im Nenner unter der Null stehende Kettenbruch

$$(4)\qquad b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

endlich ist und den Wert Null hat, oder wenn er unendlich ist und unbegrenzt viele Näherungsbrüche vom Wert Null besitzt. Dies folgt sofort aus den Formeln (2), da ja die dort auftretenden Zahlen $A_{\nu-1,\lambda}$ gerade die Näherungszähler von (4) sind. Wenn dagegen der Kettenbruch (4) unendlich ist und den Wert Null hat, so kann (1) sehr wohl konvergieren. Beispielsweise ist

$$(5)\qquad (\sqrt{2}-1) - \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \cdots = 0;$$

aber gleichwohl konvergiert der Kettenbruch

$$(6)\qquad 1 + \frac{0\qquad|}{|\sqrt{2}-1} - \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \frac{1|}{|2} + \cdots.$$

Denn da hier $\lambda = 1$ ist, so wird nach (2)

$$(7)\qquad \begin{cases} A_\nu = A_0 A_{\nu-1,1} = A_{\nu-1,1} \\ B_\nu = B_0 A_{\nu-1,1} = A_{\nu-1,1}. \end{cases}$$

Aber $A_{\nu-1,1}$ ist als Näherungszähler des Kettenbruches (5) gewiß irrational, also $\neq 0$, so daß sich aus (7) ergibt: $\frac{A_\nu}{B_\nu} = 1$, woraus die Behauptung folgt.

II. Die Elemente eines endlichen oder unendlichen Kettenbruches

$$(8)\qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots$$

seien jetzt wieder ganz willkürliche Größen. Neben dem Kettenbruch (8) betrachten wir dann noch den folgenden

$$(9)\qquad c_0 b_0 + \frac{c_0 c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \cdots + \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu|}{|c_\nu b_\nu} + \cdots,$$

wo die Multiplikatoren c_ν irgend welche von Null verschiedene Zahlen sind. Sind, wie gewöhnlich, A_ν, B_ν die Näherungszähler und -Nenner des ersten; C_ν, D_ν die des zweiten Kestenbruches, so ist

$$(10)\qquad \begin{cases} C_\nu = c_0 c_1 \ldots c_\nu A_\nu \\ D_\nu = c_1 c_2 \ldots c_\nu B_\nu. \end{cases}$$

Dies ergibt sich augenblicklich aus der Euler-Mindingschen Darstellung für die Näherungszähler und -Nenner (§ 3), da ja die Ausdrücke $\frac{a_{i+1}}{b_i b_{i+1}}$

sich nicht ändern, wenn man von (8) zu (9) übergeht, oder ebenso einfach mit Hilfe der Rekursionsformeln durch vollständige Induktion.

Da alle c_ν von Null verschieden, so ist nach (10) für $B_\nu = 0$ stets auch $D_\nu = 0$ und umgekehrt; dagegen ist für $B_\nu \neq 0$ stets

$$\frac{C_\nu}{D_\nu} = c_0 \frac{A_\nu}{B_\nu}. \tag{11}$$

Wenn alle $a_\nu \neq 0$ sind, so gilt auch umgekehrt der Satz, daß jeder Kettenbruch, dessen Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) den Wert $c_0 \frac{A_\nu}{B_\nu}$ hat, notwendig von der Form (9) sein muß. Denn ist etwa

$$q_0 + \frac{p_1|}{|q_1} + \frac{p_2|}{|q_2} + \cdots$$

ein solcher Kettenbruch und bezeichnet man mit P_ν, Q_ν seinen Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung, so ist

$$P_{-1} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad P_0 = q_0, \quad Q_0 = 1, \tag{12}$$

$$P_\nu = q_\nu P_{\nu-1} + p_\nu P_{\nu-2}, \quad Q_\nu = q_\nu Q_{\nu-1} + p_\nu Q_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 1). \tag{13}$$

Da für $\nu \geqq 0$ aber $\frac{P_\nu}{Q_\nu} = c_0 \frac{A_\nu}{B_\nu}$ sein soll, so kann man für $\nu \geqq 0$

$$P_\nu = c_0 g_\nu A_\nu, \quad Q_\nu = g_\nu B_\nu \qquad (g_\nu \neq 0)$$

setzen, woraus für $\nu = 0$ insbesondere $g_0 = 1$, $q_0 = c_0 b_0$ folgt. Setzt man dann noch $\frac{g_\nu}{g_{\nu-1}} = c_\nu$, also $g_\nu = c_1 c_2 \ldots c_\nu$, so erhält man:

$$P_\nu = c_0 c_1 \ldots c_\nu A_\nu, \quad c_0 Q_\nu = c_0 c_1 \ldots c_\nu B_\nu \qquad (\nu \geqq 0),$$

wozu noch die Formeln $P_{-1} = A_{-1}$, $Q_{-1} = B_{-1}$ kommen. Die Gleichungen (13) gehen daher über in

$$A_\nu = \frac{q_\nu}{c_\nu} A_{\nu-1} + \frac{p_\nu}{c_{\nu-1} c_\nu} A_{\nu-2}, \quad B_\nu = \frac{q_\nu}{c_\nu} B_{\nu-1} + \frac{p_\nu}{c_{\nu-1} c_\nu} B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 1).$$

Da aber auch

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}, \quad B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2},$$

und da wegen $A_{\nu-1} B_{\nu-2} - A_{\nu-2} B_{\nu-1} = \pm a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} \neq 0$ die a_ν, b_ν durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt sind, so erhält man für $\nu \geqq 1$:

$$\frac{q_\nu}{c_\nu} = b_\nu, \quad \frac{p_\nu}{c_{\nu-1} c_\nu} = a_\nu. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Formel (11) liefert nun insbesondere

Satz 2. *Wenn von den beiden endlichen oder unendlichen Kettenbrüchen*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \cdots,$$

$$c_0 b_0 + \frac{c_0 c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \cdots + \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu|}{|c_\nu b_\nu} + \cdots,$$

wo die c_ν *irgend welche von Null verschiedene Zahlen sind, der eine konvergiert (bzw. im Fall der Endlichkeit nicht sinnlos ist), so gilt das gleiche auch vom andern, und zwar ist der Wert des zweiten das* c_0*-fache von dem des ersten.*

Am wichtigsten ist der Fall $c_0 = 1$; der Kettenbruch (9) heißt dann mit (8) **äquivalent** (*Seidel* 2). Aus dieser Definition folgt ohne weiteres:

a) Ist ein Kettenbruch mit einem zweiten äquivalent, so ist auch der zweite mit dem ersten äquivalent. Die Kettenbrüche heißen daher miteinander äquivalent.

b) Sind zwei Kettenbrüche mit einem dritten äquivalent, so sind sie auch miteinander äquivalent.

Weiter erhält man aus Formel (11) und den daran angeschlossenen Erörterungen für $c_0 = 1$ den wichtigen

Satz 3. *Zwei äquivalente Kettenbrüche haben die gleiche Serie von Näherungsbrüchen, wobei auch einem sinnlosen Näherungsbruch des einen ein ebensolcher des andern entspricht. Und umgekehrt sind zwei Kettenbrüche mit der gleichen Serie von Näherungsbrüchen, sofern die Teilzähler von Null verschieden sind, stets äquivalent.* (*Seidel* 2.)

Hiernach kann jeder Kettenbruch, wenn es sich um die Entscheidung seiner Konvergenz oder auch um die Berechnung seines Wertes handelt, durch einen äquivalenten ersetzt werden. Zur Bezeichnung der Äquivalenz bedienen wir uns des Zeichens $\equiv$; es kann nach dem Bewiesenen ohne weiteres durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden, sobald von einem der zwei äquivalenten Kettenbrüche feststeht, daß er konvergiert (bzw. nicht sinnlos ist). Beispielsweise besteht die Äquivalenz

$$(14)\quad \frac{b_1|}{|b_1} + \frac{b_2|}{|b_2} + \frac{b_3|}{|b_3} + \cdots \equiv \frac{b_0|}{|b_0} + \frac{b_0|}{|b_1} + \frac{b_1|}{|b_2} + \frac{b_2|}{|b_3} + \cdots \quad (\textit{Stern } 2),$$

wenn alle $b_\nu \neq 0$ sind; denn der zweite geht aus dem ersten hervor, indem man $c_\nu = \frac{b_{\nu-1}}{b_\nu}$ für $\nu \geqq 1$ wählt.

Man bedient sich der Transformation in einen äquivalenten Kettenbruch hauptsächlich in vier Fällen:

A. Wenn die Elemente Bruchform haben, zur Beseitigung dieser Brüche; so ist

$$b_0 + \frac{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\,\Big|}{\Big|\,\frac{\beta_1}{\gamma_1}} + \cdots + \frac{\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\,\Big|}{\Big|\,\frac{\beta_\nu}{\gamma_\nu}} + \cdots \equiv b_0 + \frac{\alpha_1 |}{| \beta_1} + \frac{\gamma_1 \alpha_2 |}{| \beta_2} + \cdots + \frac{\gamma_{\nu-1} \alpha_\nu |}{| \beta_\nu} + \cdots$$

und allgemeiner

$$b_0 + \frac{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}\,\Big|}{\Big|\,\frac{\beta_1}{\delta_1}} + \cdots + \frac{\frac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu}\,\Big|}{\Big|\,\frac{\beta_\nu}{\delta_\nu}} + \cdots \equiv b_0 + \frac{\delta_1 \alpha_1 |}{| \gamma_1 \beta_1} + \frac{\gamma_1 \delta_1 \delta_2 \alpha_2 |}{| \gamma_2 \beta_2} + \cdots$$

$$+ \frac{\gamma_{\nu-1} \delta_{\nu-1} \delta_\nu \alpha_\nu |}{| \gamma_\nu \beta_\nu} + \cdots.$$

B. Um die Teilnenner, sofern keiner verschwindet, alle gleich 1 zu machen:

$$b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \cdots + \frac{a_\nu |}{| b_\nu} + \cdots \equiv b_0 + \frac{\frac{a_1}{b_1}\,\Big|}{\Big|\,1} + \frac{\frac{a_2}{b_1 b_2}\,\Big|}{\Big|\,1} + \cdots + \frac{\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\,\Big|}{\Big|\,1} + \cdots.$$

C. Um die Teilzähler, sofern keiner verschwindet, alle gleich 1 zu machen:

$$b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \cdots + \frac{a_{2\nu} |}{| b_{2\nu}} + \frac{a_{2\nu+1} |}{| b_{2\nu+1}} + \cdots \equiv b_0 + \frac{1 |}{\Big|\,\frac{b_1}{a_1}} + \frac{1}{\Big|\,\frac{a_1}{a_2} b_2} + \cdots$$

$$+ \frac{1 \qquad |}{\Big|\,\frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} b_{2\nu}} + \frac{1 \qquad |}{\Big|\,\frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}} + \cdots.$$

D. Um den Näherungsnennern, soferne keiner verschwindet, vorgeschriebene Werte zu geben. Sollen z. B. alle gleich 1 sein, so ist nach (10)

$$c_1 c_2 \ldots c_\nu = \frac{1}{B_\nu},$$

also

$$c_\nu = \frac{B_{\nu-1}}{B_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

zu setzen.

§ 43. Kontraktion.

I. Wenn die Teilzähler eines Kettenbruches alle von Null verschieden sind, können zwei sukzessive Näherungsbrüche niemals einander gleich und auch nicht beide sinnlos sein. Dies folgt sofort aus der Formel (30), Kap. I:

$$A_\lambda B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_\lambda = (-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda \neq 0.$$

Wenn also zwei sukzessive Näherungsbrüche einander gleich sind, etwa $\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = \frac{A_\lambda}{B_\lambda}$, so muß von den Teilzählern $a_1, a_2, \ldots a_\lambda$ mindestens einer

verschwinden, so daß nach § 42, I alle folgenden Näherungsbrüche, soweit sie nicht sinnlos sind, ebenfalls den gleichen Wert haben.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, einen Kettenbruch herzustellen, dessen Näherungsbrüche vorgegebene Werte K_0, K_1, $K_2, \ldots$ haben (*Dan. Bernoulli* 2). Dabei soll wegen des soeben Ausgeführten $K_{\nu-1} \neq K_\nu$ vorausgesetzt werden. Alsdann löst, wenn ein Kettenbruch der verlangten Art gefunden ist, jeder mit ihm äquivalente ebenfalls unsere Aufgabe, und umgekehrt sind auch alle Kettenbrüche, die die Aufgabe lösen, miteinander äquivalent (nach Satz 3). Da der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung gleich K_ν, also nicht sinnlos sein soll, läßt es sich so einrichten, daß alle Näherungsnenner gleich 1 sind, also die Näherungszähler der Reihe nach $K_0, K_1, K_2, \ldots$. Dadurch sind aber die Elemente eindeutig festgelegt; ist nämlich

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \cdots$$

der gesuchte Kettenbruch, so ergibt sich durch Anwendung der Rekursionsformeln auf die Näherungszähler K_ν und die Näherungsnenner 1:

$$K_0 = \beta_0, \quad K_1 = \beta_0\beta_1 + \alpha_1, \quad 1 = \beta_1$$

$$\left.\begin{aligned} K_\nu &= \beta_\nu K_{\nu-1} + \alpha_\nu K_{\nu-2} \\ 1 &= \beta_\nu + \alpha_\nu \end{aligned}\right\} (\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

Hieraus folgt durch Auflösung, da nach Voraussetzung $K_{\nu-1} \neq K_{\nu-2}$ ist:

$$\beta_0 = K_0$$

$$\alpha_1 = K_1 - K_0, \quad \beta_1 = 1$$

$$\alpha_\nu = \frac{K_{\nu-1} - K_\nu}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}}, \quad \beta_\nu = \frac{K_\nu - K_{\nu-2}}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} \quad (\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

Hiermit sind die Elemente des gesuchten Kettenbruches eindeutig berechnet, und offenbar hat der Kettenbruch mit diesen Elementen auch wirklich die verlangten Näherungsbrüche. Man erhält daher

Satz 4. *Ist $K_0, K_1, K_2, \ldots$ irgend eine begrenzte oder unbegrenzte Serie von Zahlen, und zwar allgemein $K_{\nu-1} \neq K_\nu$, so gibt es einen Kettenbruch, und zwar abgesehen von äquivalenten* n u r e i n e n

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \cdots,$$

dessen Näherungsbrüche der Reihe nach $K_0, K_1, K_2, \ldots$ sind. Seine Elemente sind folgende:

$$\beta_0 = K_0$$

$$\alpha_1 = K_1 - K_0, \quad \beta_1 = 1$$

$$\alpha_\nu = \frac{K_{\nu-1} - K_\nu}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}}, \quad \beta_\nu = \frac{K_\nu - K_{\nu-2}}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} \quad (\nu = 2, 3, 4, \ldots).$$

II. Wir wollen dieses Theorem jetzt auf einen speziellen Fall anwenden; sei nämlich

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \tag{1}$$

ein unendlicher Kettenbruch mit von Null verschiedenen Teilzählern. Sei ferner

$$\frac{A_{n_0}}{B_{n_0}},\ \frac{A_{n_1}}{B_{n_1}},\ \frac{A_{n_2}}{B_{n_2}}, \ldots \tag{2}$$

eine unbegrenzte Serie nicht sinnloser Näherungsbrüche von (1); also

$$B_{n_\nu} \neq 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Dabei soll $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ sein, und von den Zahlen (2) sollen keine zwei aufeinanderfolgende den gleichen Wert haben. Da nach Formel (33), Kap. I

$$\frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} - \frac{A_{n_{\nu-1}}}{B_{n_{\nu-1}}} = (-1)^{n_\nu - 1} a_1 a_2 \ldots a_{n_{\nu-1}+1} \frac{B_{n_\nu - n_{\nu-1} - 1,\, n_{\nu-1}+1}}{B_{n_\nu} B_{n_{\nu-1}}}, \tag{4}$$

so ist also auch

$$B_{n_\nu - n_{\nu-1} - 1,\, n_{\nu-1}+1} \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

Nach Satz 4 wird nun der Kettenbruch

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \cdots \tag{6}$$

gerade die Größen (2) zu Näherungsbrüchen haben, wenn wir

$$\beta_0 = \frac{A_{n_0}}{B_{n_0}}, \quad \alpha_1 = \frac{A_{n_1}}{B_{n_1}} - \frac{A_{n_0}}{B_{n_0}}, \quad \beta_1 = 1,$$

$$\alpha_\nu = - \frac{\dfrac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} - \dfrac{A_{n_{\nu-1}}}{B_{n_{\nu-1}}}}{\dfrac{A_{n_{\nu-1}}}{B_{n_{\nu-1}}} - \dfrac{A_{n_{\nu-2}}}{B_{n_{\nu-2}}}}, \qquad \beta_\nu = \frac{\dfrac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} - \dfrac{A_{n_{\nu-2}}}{B_{n_{\nu-2}}}}{\dfrac{A_{n_{\nu-1}}}{B_{n_{\nu-1}}} - \dfrac{A_{n_{\nu-2}}}{B_{n_{\nu-2}}}} \qquad (\nu \geqq 2)$$

setzen. Dafür läßt sich aber unter Anwendung von (4) auch schreiben:

$$\beta_0 = \frac{A_{n_0}}{B_{n_0}}, \quad \alpha_1 = (-1)^{n_0} a_1 a_2 \ldots a_{n_0+1} \frac{B_{n_1 - n_0 - 1,\, n_0+1}}{B_{n_1} B_{n_0}}, \qquad \beta_1 = 1$$

$$\alpha_\nu = (-1)^{n_{\nu-1} - n_{\nu-2} - 1} a_{n_{\nu-2}+2} a_{n_{\nu-2}+3} \ldots a_{n_{\nu-1}+1} \frac{B_{n_{\nu-2}} B_{n_\nu - n_{\nu-1} - 1,\, n_{\nu-1}+1}}{B_{n_\nu} B_{n_{\nu-1} - n_{\nu-2} - 1,\, n_{\nu-2}+1}}$$

$$\beta_\nu = \frac{B_{n_{\nu-1}} B_{n_\nu - n_{\nu-2} - 1,\, n_{\nu-2}+1}}{B_{n_\nu} B_{n_{\nu-1} - n_{\nu-2} - 1,\, n_{\nu-2}+1}} \qquad (\nu \geqq 2).$$

Nun kann man noch den Kettenbruch (6) durch einen äquivalenten

$$\beta_0 + \frac{c_1 \alpha_1 |}{| c_1 \beta_1} + \frac{c_1 c_2 \alpha_2 |}{| c_2 \beta_2} + \frac{c_2 c_3 \alpha_3 |}{| c_3 \beta_3} + \cdots$$

ersetzen, wo die c_ν beliebige von Null verschiedene Zahlen sind. Wählt man speziell

$$c_1 = B_{n_1}, \quad c_\nu = \frac{B_{n_\nu} B_{n_{\nu-1} - n_{\nu-2} - 1, n_{\nu-2} + 1}}{B_{n_{\nu-1}}} \qquad (\nu \geq 2),$$

was wegen (3) und (5) erlaubt ist, so ergibt sich schließlich

Satz 5. *Um aus dem unendlichen Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1 |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} + \cdots$$

mit den Näherungsbrüchen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *einen neuen zu gewinnen*

$$\delta_0 + \frac{\gamma_1 |}{| \delta_1} + \frac{\gamma_2 |}{| \delta_2} + \cdots,$$

dessen Näherungsbrüche der Reihe nach

$$\frac{A_{n_0}}{B_{n_0}}, \frac{A_{n_1}}{B_{n_1}}, \frac{A_{n_2}}{B_{n_2}}, \cdots \qquad (n_0 < n_1 < n_2 < \cdots)$$

sind, hat man

$$\delta_0 = \frac{A_{n_0}}{B_{n_0}},$$

$$\gamma_1 = (-1)^{n_0} a_1 a_2 \ldots a_{n_0+1} \frac{B_{n_1 - n_0 - 1, n_0 + 1}}{B_{n_0}}, \quad \delta_1 = B_{n_1},$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\nu &= (-1)^{n_{\nu-1} - n_{\nu-2} - 1} a_{n_{\nu-2}+2} a_{n_{\nu-2}+3} \ldots a_{n_{\nu-1}+1} \\ &\qquad \times B_{n_{\nu-2} - n_{\nu-3} - 1, n_{\nu-3}+1} B_{n_\nu - n_{\nu-1} - 1, n_{\nu-1}+1} \\ \delta_\nu &= B_{n_\nu - n_{\nu-2} - 1, n_{\nu-2}+1} \end{aligned}\right\} (\nu \geqq 2)$$

zu setzen (mit $n_{-1} = -1$*). Dabei hat* $B_{\nu,\lambda}$ *die Bedeutung wie in § 5, II, und es muß* $B_{n_\nu} \neq 0$, $B_{n_\nu - n_{\nu-1} - 1, n_{\nu-1}+1} \neq 0$ *vorausgesetzt werden.*

Man sagt, der neue Kettenbruch entsteht aus dem ursprünglichen durch „Kontraktion" (*Seidel* 2). Bereits in § 37 sind uns in den Transformationen $\mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{T}_2$ spezielle Kontraktionen begegnet. Wenn ein Kettenbruch konvergiert, so konvergiert offenbar auch jeder aus ihm durch Kontraktion entstehende, und zwar hat er den gleichen Wert. Denn die Reihe der Näherungsbrüche des kontrahierten Kettenbruches ist ja eine Teilreihe der Näherungsbrüche des ursprünglichen. Aus diesem Grund konvergiert aber der kontrahierte sogar stets rascher, und der praktische Nutzen der Kontraktion liegt gerade darin, daß

langsam konvergierende Kettenbrüche in rasch konvergierende transformiert werden können. Doch hüte man sich davor, umgekehrt aus der Konvergenz des kontrahierten auch ohne weiteres auf die Konvergenz des ursprünglichen Kettenbruches zu schließen.

Sehr häufig wird der Kettenbruch mit den Näherungsbrüchen $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ gebraucht; man findet ihn, indem man $n_\nu = 2\nu$ in unsere allgemeinen Formeln einsetzt; es kommt

$$(7)\qquad b_0 + \frac{a_1 b_2 \mid}{\mid b_1 b_2 + a_2} - \frac{a_2 a_3 b_4 \mid}{\mid (b_2 b_3 + a_3) b_4 + b_2 a_4} - \frac{a_4 a_5 b_2 b_6 \mid}{\mid (b_4 b_5 + a_5) b_6 + b_4 a_6}$$
$$- \frac{a_6 a_7 b_4 b_8 \mid}{\mid (b_6 b_7 + a_7) b_8 + b_6 a_8} - \cdots.$$

Ebenso hat der Kettenbruch

$$(8)\qquad \frac{b_0 b_1 + a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2 \frac{b_3}{b_1} \mid}{\mid (b_1 b_2 + a_2) b_3 + b_1 a_3} - \frac{a_3 a_4 b_1 b_5 \mid}{\mid (b_3 b_4 + a_4) b_5 + b_3 a_5}$$
$$- \frac{a_5 a_6 b_3 b_7 \mid}{\mid (b_5 b_6 + a_6) b_7 + b_5 a_7} - \frac{a_7 a_8 b_5 b_9 \mid}{\mid (b_7 b_8 + a_8) b_9 + b_7 a_9} - \cdots$$

die Näherungsbrüche $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

III. Als weiteres Beispiel betrachten wir den Kettenbruch

$$g_0 + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1} \mid}{\mid b_{k-1}} + \frac{f_1 \mid}{\mid g_1} + \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1} \mid}{\mid b_{k-1}} + \frac{f_2 \mid}{\mid g_2}$$
$$+ \frac{a_1 \mid}{\mid b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1} \mid}{\mid b_{k-1}} + \frac{f_3 \mid}{\mid g_3} + \cdots,$$

aus welchem wir den kontrahierten Kettenbruch mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}},\ \frac{A_{2k-1}}{B_{2k-1}},\ \frac{A_{3k-1}}{B_{3k-1}}, \ldots$$

herleiten wollen. Setzen wir also in Satz 5 $n_\nu = k - 1 + \nu k$, was auch für $\nu = -1$ anwendbar ist, so kommt:

$$\delta_0 = \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}},\quad \gamma_1 = (-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_{k-1} f_1 \frac{B_{k-1,k}}{B_{k-1}},$$

$$\gamma_\nu = (-1)^{k-1} a_1 a_2 \ldots a_{k-1} f_\nu B_{k-1,(\nu-2)k} B_{k-1,\nu k} \qquad (\nu \geqq 2),$$

$$\delta_\nu = B_{2k-1,(\nu-1)k} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Nun ist aber wegen der speziellen Form unseres Kettenbruches

$$B_{k-2,\nu k}=B_{k-2},\quad B_{k-1,\nu k}=B_{k-1};$$

ferner nach Formel (24), Kap. I:

$$B_{2k-1}=B_{k-1}A_{k-1,k}+a_k B_{k-2}B_{k-1,k},$$

also auch, indem man die Indizes aller Elemente um $(\nu-1)k$ erhöht:

$$\begin{aligned}B_{2k-1,(\nu-1)k}&=B_{k-1,(\nu-1)k}A_{k-1,\nu k}+a_{\nu k}B_{k-2,(\nu-1)k}B_{k-1,\nu k}\\&=B_{k-1}(A_{k-1,\nu k}+f_\nu B_{k-2}).\end{aligned}$$

Oder, weil bei unserm speziellen Kettenbruch

$$A_{k-1,\nu k}=K\begin{pmatrix}a_1, & a_2, \ldots & a_{k-1}\\ g_\nu, & b_1, & b_2, \ldots & b_{k-1}\end{pmatrix}=g_\nu B_{k-1}+a_1 B_{k-2,1}$$

(nach Formel (27), Kap. I) ist, endlich auch

$$B_{2k-1,(\nu-1)k}=B_{k-1}(g_\nu B_{k-1}+f_\nu B_{k-2}+a_1 B_{k-2,1}).$$

Es kommt also

$$\delta_0=\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}=\frac{g_0 B_{k-1}+a_1 B_{k-2,1}}{B_{k-1}},\quad \gamma_1=(-1)^{k-1}a_1 a_2\ldots a_{k-1}f_1;$$

$$\gamma_\nu=(-1)^{k-1}a_1 a_2\ldots a_{k-1}f_\nu B_{k-1}^2 \qquad (\nu\geqq 2),$$

$$\delta_\nu=B_{k-1}(g_\nu B_{k-1}+f_\nu B_{k-2}+a_1 B_{k-2,1}) \qquad (\nu\geqq 1).$$

Geht man nun noch zu einem äquivalenten Kettenbruch über mittels der Multiplikatoren $c_\nu=\frac{1}{B_{k-1}}$, so wird der kontrahierte Kettenbruch schließlich folgender:

$$\frac{g_0 B_{k-1}+a_1 B_{k-2,1}}{B_{k-1}}+\frac{\frac{1}{B_{k-1}}(-1)^{k-1}a_1 a_2\ldots a_{k-1}f_1\,|}{|\,g_1 B_{k-1}+f_1 B_{k-2}+a_1 B_{k-2,1}}$$
$$+\frac{(-1)^{k-1}a_1 a_2\ldots a_{k-1}f_2\,|}{|\,g_2 B_{k-1}+f_2 B_{k-2}+a_1 B_{k-2,1}}+\frac{(-1)^{k-1}a_1 a_2\ldots a_{k-1}f_3\,|}{|\,g_3 B_{k-1}+f_3 B_{k-2}+a_1 B_{k-2,1}}+\cdots.$$

Diese Transformation ist besonders nützlich, um gewisse **regelmäßige** Kettenbrüche in rascher konvergierende zu verwandeln. Man erhält dafür, indem man $a_\nu=1$, $f_\nu=1$ setzt, die Formel:

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}&[g_0, b_1,\ldots b_{k-1}, g_1, b_1,\ldots b_{k-1}, g_2, b_1,\ldots b_{k-1}, g_3,\ldots]\\&=\frac{1}{B_{k-1}}\left\{g_0 B_{k-1}+B_{k-2,1}+\frac{(-1)^{k-1}\,|}{|\,g_1 B_{k-1}+B_{k-2}+B_{k-2,1}}\right.\\&\qquad\left.+\frac{(-1)^{k-1}\,|}{|\,g_2 B_{k-1}+B_{k-2}+B_{k-2,1}}+\cdots\right\}.\end{aligned}\right.$$

Für ungerades k ist der Kettenbruch rechts ebenfalls regelmäßig, und die Formel, die im Prinzip schon *Euler* **4** kannte, ist nichts anderes als die Gleichung (7) von Seite 134, die wir dort nur für $k = 3$ zu einem speziellen Zweck bewiesen haben. Für gerades k steht auf der rechten Seite von (9) ein reduziert-regelmäßiger Kettenbruch.

Sind speziell alle g_ν einander gleich, so lehrt unsere Formel, einen k-gliedrig reinperiodischen regelmäßigen Kettenbruch in einen eingliedrig-periodischen zu transformieren, der selbst regelmäßig oder reduziert-regelmäßig ist, je nachdem k ungerade oder gerade (*Öttinger* **1**). Da man die Gliederzahl der Periode stets gerade annehmen kann, indem man nötigenfalls zwei Perioden zu einer (imprimitiven) vereinigt, ergibt sich, daß allemal eine Transformation in einen reduziert-regelmäßigen Kettenbruch möglich ist.

§ 44. Extension.

Wenn ein Kettenbruch durch Kontraktion in einen andern transformiert ist, so wollen wir umgekehrt sagen, daß der erstere aus dem kontrahierten durch „Extension" hervorgeht. Die Extension besteht also darin, daß man aus einem gegebenen Kettenbruch einen anderen herleitet, der außer den Näherungsbrüchen des gegebenen in ihrer natürlichen Reihenfolge noch gewisse weitere Näherungsbrüche in endlicher oder unendlicher Anzahl enthält. Auch die Extension haben wir schon einmal angewandt: Die Transformationen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{T}_1$ des § 37 sind Extensionen.

Sei nun wieder

$$(1) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

ein beliebiger Kettenbruch mit von Null verschiedenen Teilzählern und mit den Näherungsbrüchen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$. Wir wollen nun einen andern herleiten, dessen Näherungsbrüche der Reihe nach die folgenden sein sollen:

$$\frac{A_0}{B_0}, \frac{A_1}{B_1}, \ldots, \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}, K, \frac{A_k}{B_k}, \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}, \ldots,$$

wo K beliebig vorgegeben, doch natürlich von den beiden Nachbarn $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ verschieden. Aus diesem Grund können wir K in der Form annehmen

$$K = \frac{A_k - \varrho A_{k-1}}{B_k - \varrho B_{k-1}}, \quad \varrho \neq 0.$$

Der gesuchte Kettenbruch hat dann (von Äquivalenz abgesehen) offenbar die Gestalt

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{\alpha|}{|\beta} + \frac{\alpha'|}{|\beta'} + \frac{\alpha''|}{|\beta''} + \frac{a_{k+2}|}{|b_{k+2}} + \frac{a_{k+3}|}{|b_{k+3}} + \cdots,$$

wobei α, β usw. aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$(2) \qquad \begin{cases} A_k - \varrho A_{k-1} = \beta A_{k-1} + \alpha A_{k-2} \\ B_k - \varrho B_{k-1} = \beta B_{k-1} + \alpha B_{k-2} \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} A_k = \beta'(A_k - \varrho A_{k-1}) + \alpha' A_{k-1} \\ B_k = \beta'(B_k - \varrho B_{k-1}) + \alpha' B_{k-1} \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} A_{k+1} = \beta'' A_k + \alpha''(A_k - \varrho A_{k-1}) \\ B_{k+1} = \beta'' B_k + \alpha''(B_k - \varrho B_{k-1}). \end{cases}$$

Da aber alle a_ν von Null verschieden sind, so ist auch

$$A_{k-1}B_{k-2} - A_{k-2}B_{k-1} \neq 0;$$

folglich sind durch die Gleichungen

$$A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}, \quad B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}$$

die Größen b_k, a_k eindeutig bestimmt. Durch Vergleichung mit (2) ergibt sich daher sofort:

$$\varrho + \beta = b_k; \quad \alpha = a_k;$$

ebenso folgt aus (4):

$$\beta'' + \alpha'' = b_{k+1}, \quad -\alpha''\varrho = a_{k+1};$$

und noch etwas einfacher aus (3):

$$\beta' = 1, \quad -\beta'\varrho + \alpha' = 0.$$

Damit sind die Unbekannten $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ gefunden, und der gesuchte Kettenbruch ist folgender:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_k - \varrho} + \frac{\varrho|}{|1} - \frac{\frac{a_{k+1}}{\varrho}\Big|}{\Big|b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}} + \frac{a_{k+2}|}{|b_{k+2}} + \frac{a_{k+3}|}{|b_{k+3}} + \cdots;$$

man erhält somit

Satz 6. *Will man in den Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0),$$

dessen Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ *sind, zwischen* $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ *und* $\frac{A_k}{B_k}$ *noch den Näherungsbruch* $\frac{A_k - \varrho A_{k-1}}{B_k - \varrho B_{k-1}}$ *einschalten, so ist die Gliederfolge*

$$\frac{a_k|}{|b_k} + \frac{a_{k+1}|}{|b_{k+1}}$$

zu ersetzen durch

$$\frac{a_k|}{|b_k - \varrho} + \frac{\varrho|}{|1} - \frac{\frac{a_{k+1}}{\varrho}\Big|}{\Big|b_{k+1} + \frac{a_{k+1}}{\varrho}},$$

während sonst alles unverändert bleibt.

Der Satz gilt mit leicht ersichtlicher Modifikation auch für $k = 0$. Selbstverständlich kann die Transformation gleichzeitig mehrmals, sogar unendlich oft angewandt werden. Beispielsweise wird der extendierte Kettenbruch mit den Näherungsbrüchen

$$(5)\qquad \frac{A_0 - \varrho_0}{B_0},\ \frac{A_0}{B_0},\ \frac{A_1 - \varrho_1 A_0}{B_1 - \varrho_1 B_0},\ \frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_2 - \varrho_2 A_1}{B_2 - \varrho_2 B_1},\ \frac{A_2}{B_2},\ \frac{A_3 - \varrho_3 A_2}{B_3 - \varrho_3 B_2},\ \cdots$$

folgender sein:

$$(6)\qquad b_0 - \varrho_0 + \frac{\varrho_0|}{|1} - \frac{\frac{a_1}{\varrho_0}\Big|}{\Big|b_1 + \frac{a_1}{\varrho_0} - \varrho_1} + \frac{\varrho_1|}{|1} - \frac{\frac{a_2}{\varrho_1}\Big|}{\Big|b_2 + \frac{a_2}{\varrho_1} - \varrho_2} + \frac{\varrho_2|}{|1} - + \cdots.$$

Die Extension wird uns späterhin noch gute Dienste leisten. *Wenn es nämlich gelingt, einen Kettenbruch durch Extension in einen andern zu transformieren, von dem man weiß, daß er konvergiert, so wird der ursprüngliche erst recht konvergieren, und zwar gegen den gleichen Wert;* denn er entsteht ja aus dem extendierten durch Kontraktion.

§ 45. Äquivalenz von Kettenbrüchen und Reihen.

I. Nach *Seidel* 2 nennt man eine Reihe $c_0 + c_1 + c_2 + \cdots$ und einen Kettenbruch $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$ **äquivalent**, wenn die Beziehungen

$$(1)\quad c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_\nu = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

statthaben. Dabei können Reihe und Kettenbruch beide unendlich sein, oder auch beide endlich und müssen in diesem Fall gleiche Gliederzahl haben.

Nach dieser Definition gibt es zu einem Kettenbruch jedenfalls nur dann eine äquivalente Reihe, wenn er keine sinnlosen Näherungsbrüche hat. In diesem Fall gibt es aber auch wirklich eine und zwar **nur eine** äquivalente Reihe; ihre Glieder ergeben sich nämlich eindeutig aus (1) in der Form:

$$c_0 = \frac{A_0}{B_0} = b_0,$$

$$c_\nu = \frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1}\frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1}B_\nu} \qquad (\nu = 1,2,3,\ldots).$$

Sind dabei, was wir wieder voraussetzen wollen, alle Teilzähler a_ν von Null verschieden, so werden auch alle Reihenglieder c_ν für $\nu \geqq 1$ von Null verschieden. Es ergibt sich, wenn wir auch hier Äquivalenz durch $\equiv$ bezeichnen:

$$(2) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \equiv b_0 + \frac{a_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4} + - \cdots.$$

Die Glieder der Reihe sind dabei, vom ersten abgesehen, alle von Null verschieden. Umgekehrt ist auch jede Reihe, deren Glieder, vom ersten abgesehen, von Null verschieden sind, unendlich vielen Kettenbrüchen äquivalent, die aber alle miteinander äquivalent sind. Wir brauchen nämlich, um dies einzusehen, nur einen Kettenbruch zu bilden, dessen Näherungsbrüche der Reihe nach die folgenden sind:

$$K_0 = c_0, \; K_1 = c_0 + c_1, \; K_2 = c_0 + c_1 + c_2, \ldots.$$

Da aber für $\nu \geqq 1$ stets $c_\nu \neq 0$, also $K_\nu \neq K_{\nu-1}$ ist, und da

$$K_0 = c_0, \; K_1 - K_0 = c_1,$$

$$\frac{K_{\nu-1} - K_\nu}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} = -\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}, \quad \frac{K_\nu - K_{\nu-2}}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} = 1 + \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} \qquad (\nu = 2,3,4,\ldots)$$

ist, so leistet dies nach Satz 4 der Kettenbruch

$$c_0 + \frac{c_1|}{|1} - \frac{\frac{c_2}{c_1}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_2}{c_1}} - \frac{\frac{c_3}{c_2}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_3}{c_2}} - \frac{\frac{c_4}{c_3}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_4}{c_3}} - \cdots,$$

sowie jeder damit äquivalente, aber sonst keiner. Wir erhalten also

Satz 7. *Die Reihe*

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_\nu + \cdots \qquad (c_\nu \neq 0 \textit{ für } \nu \geqq 1)$$

und der Kettenbruch

$$c_0 + \frac{c_1|}{|1} - \frac{\frac{c_2}{c_1}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_2}{c_1}} - \frac{\frac{c_3}{c_2}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_3}{c_2}} - \cdots - \frac{\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}\Big|}{\Big|1 + \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}}} - \cdots$$

sind äquivalent. (*Euler* **1**, **3**, **5**, *Stern* **2**.)

Zur Vermeidung der Brüche kann man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzen und erhält

$$(3)\quad\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_\nu + \cdots \\ \equiv c_0 + \dfrac{c_1|}{|1} - \dfrac{c_2|}{|c_1 + c_2} - \dfrac{c_1 c_3|}{|c_2 + c_3} - \cdots - \dfrac{c_{\nu-2} c_\nu|}{|c_{\nu-1} + c_\nu} - \cdots. \end{cases}$$

Die Brüche lassen sich aber auch durch Änderung der Bezeichnung vermeiden. Setzt man nämlich $c_\nu = \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_\nu$ für $\nu \geqq 1$, so kommt

$$(4)\begin{cases} c_0 + \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 + \cdots + \gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_\nu + \cdots \\ \equiv c_0 + \dfrac{\gamma_1|}{|1} - \dfrac{\gamma_2|}{|1+\gamma_2} - \dfrac{\gamma_3|}{|1+\gamma_3} - \cdots - \dfrac{\gamma_\nu|}{|1+\gamma_\nu} - \cdots \quad (\gamma_\nu \neq 0). \end{cases}$$

II. Besonders häufig wird unsere Transformation auf Potenzreihen angewandt; für solche ergibt sich direkt aus Satz 7:

$$(5)\quad\begin{cases} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_\nu x^\nu + \cdots \\ \equiv c_0 + \dfrac{c_1 x|}{|1} - \dfrac{\frac{c_2}{c_1} x|}{\left|1 + \frac{c_2}{c_1} x\right.} - \dfrac{\frac{c_3}{c_2} x|}{\left|1 + \frac{c_3}{c_2} x\right.} - \cdots - \dfrac{\frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} x|}{\left|1 + \frac{c_\nu}{c_{\nu-1}} x\right.} - \cdots. \end{cases}$$

Wenn eine Reihe konvergiert, so wird der äquivalente Kettenbruch gegen den gleichen Wert konvergieren, während aus der Divergenz der Reihe auch die Divergenz des Kettenbruches folgt. Dies ergibt sich sofort aus der Definitionsgleichung (1) für $\lim \nu = \infty$. Im Konvergenzfall kann dann das Äquivalenzzeichen ohne weiteres durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden. Bei der so aus (5) entstehenden Formel ist, wie man direkt einsieht, auch der Wert $x = 0$ zulässig, obwohl dieser bisher auszuschließen war, weil ja kein Reihenglied verschwinden durfte. Wir geben hierfür einige Beispiele.

A. Für $c_0 = 1$, $c_\nu = \dfrac{r(r-1)\cdots(r-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots \nu}$ folgt

$$(6)\quad (1+x)^r = 1 + \frac{rx|}{|1} - \frac{\frac{r-1}{2} x|}{\left|1 + \frac{r-1}{2} x\right.} - \frac{\frac{r-2}{3} x|}{\left|1 + \frac{r-2}{3} x\right.} - \frac{\frac{r-3}{4} x|}{\left|1 + \frac{r-3}{4} x\right.} - \cdots.$$

Ist dabei r eine ganze Zahl $\geqq 0$, so bricht die Binomialreihe mit dem $(r+1)^{\text{ten}}$ Glied ab; also hat auch der äquivalente Kettenbruch nur $r+1$ Glieder; d. h. er ist gerade soweit fortzusetzen, als die Teilzähler von Null verschieden sind. In allen andern Fällen ist der Kettenbruch unendlich, und die Formel (6) hat den gleichen Gültigkeitsbereich wie

die Binomialreihe; sie gilt also für $|x| < 1$, während für $|x| > 1$ der Kettenbruch divergiert. Speziell für $r = -1$ kommt

$$(7)\quad \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{x|}{|1} + \frac{x|}{|1-x} + \frac{x|}{|1-x} + \frac{x|}{|1-x} + \cdots \qquad (\text{für } |x| < 1).$$

B. Für $m > -1$ und $-1 < x \leqq 1$ ist

$$\frac{1}{x^m}\int_0^x \frac{t^m\,dt}{1+t} = \frac{1}{x^m}\int_0^x (t^m - t^{m+1} + t^{m+2} - \cdots)\,dt = \frac{x}{m+1} - \frac{x^2}{m+2} + \frac{x^3}{m+3} - \cdots.$$

Setzt man also $c_0 = 0$, $c_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{m+\nu}$, so kommt

$$\frac{1}{x^m}\int_0^x \frac{t^m\,dt}{1+t} = \frac{\frac{1}{m+1}x\,|}{|\;1} + \frac{\frac{m+1}{m+2}x\,|}{\left|1 - \frac{m+1}{m+2}x\right.} + \frac{\frac{m+2}{m+3}x\,|}{\left|1 - \frac{m+2}{m+3}x\right.} + \cdots$$

oder, wenn man zur Vermeidung der Brüche einen äquivalenten Kettenbruch nimmt:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{x^m}\displaystyle\int_0^x \frac{t^m\,dt}{1+t} = \dfrac{x\,|}{|m+1} + \dfrac{(m+1)^2x\,|}{|m+2-(m+1)x} + \dfrac{(m+2)^2x\,|}{|m+3-(m+2)x} + \cdots \\ \qquad (m > -1;\ -1 < x \leqq 1). \end{cases}$$

Speziell für $m = 0$ kommt

$$(9)\quad \log(1+x) = \frac{x|}{|1} + \frac{1x\,|}{|2-x} + \frac{4x\,|}{|3-2x} + \frac{9x\,|}{|4-3x} + \cdots \qquad (-1 < x \leqq 1)$$

und hieraus insbesondere für $x = 1$:

$$(10)\quad \log 2 = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{4|}{|1} + \frac{9|}{|1} + \frac{16|}{|1} + \cdots$$

Für $m = -\frac{1}{2}$, $x = y^2$ folgt nach Division durch y aus (8):

$$\int_0^{y^2} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)} = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,y = \frac{y\,|}{\left|\frac{1}{2}\right.} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 y^2\,|}{\left|\frac{3}{2} - \frac{1}{2}y^2\right.} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 y^2\,|}{\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{2}y^2\right.} + \cdots,$$

oder also auch

$$(11)\quad \mathrm{arc\,tg}\,y = \frac{y|}{|1} + \frac{1y^2\,|}{|3-y^2} + \frac{9y^2\,|}{|5-3y^2} + \frac{25y^2\,|}{|7-5y^2} + \cdots \qquad (-1 \leqq y \leqq 1).$$

Speziell für $y = 1$:

$$(12)\quad \frac{\pi}{4} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|2} + \frac{9|}{|2} + \frac{25|}{|2} + \frac{49|}{|2} + \cdots.$$

Dieser Kettenbruch war lange vor Euler bekannt. Er findet sich bei *Wallis* 1, 2 b, der *Lord Brouncker* als Entdecker nennt.

C. Setzt man $c_\nu = \frac{1}{\nu!}$, so kommt die Formel

$$(13)\quad \begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x\,|}{|\,1} - \dfrac{\frac{1}{2}x\,|}{|\,1+\frac{1}{2}x} - \dfrac{\frac{1}{3}x\,|}{|\,1+\frac{1}{3}x} - \dfrac{\frac{1}{4}x\,|}{|\,1+\frac{1}{4}x} - \cdots \\[2ex] \quad\; = 1 + \dfrac{x\,|}{|\,1} - \dfrac{1x\,|}{|\,2+x} - \dfrac{2x\,|}{|\,3+x} - \dfrac{3x\,|}{|\,4+x} - \dfrac{4x\,|}{|\,5+x} - \cdots, \end{cases}$$

welche wie die Exponentialreihe für alle x gilt (reelle und komplexe). Durch einfache Umformung (Anwendung von Satz 1 und 2, Kap. I) findet man hieraus:

$$(14)\quad \frac{xe^x}{e^x-1} = \frac{x}{e^{-x}-1} + x = 1 + x - \frac{1x\,|}{|\,2+x} - \frac{2x\,|}{|\,3+x} - \frac{3x\,|}{|\,4+x} - \cdots,$$

wobei für die Nullstellen des Nenners, also für $x = 2n\pi i$ der Kettenbruch unwesentlich divergiert (Satz 3, Kap. I). Speziell für $x = -1$ kommt, wenn man noch den reziproken Wert nimmt und dann beiderseits 1 addiert:

$$(15)\quad e = 2 + \frac{2\,|}{|\,2} + \frac{3\,|}{|\,3} + \frac{4\,|}{|\,4} + \cdots.$$

Nach § 42, Formel (14) ist dann auch

$$(15\text{a})\quad e = 2 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,2} + \frac{2\,|}{|\,3} + \frac{3\,|}{|\,4} + \frac{4\,|}{|\,5} + \cdots \quad (\textit{Euler}\ 10,\ \textit{Cesaro}\ 1).$$

Einen weiteren bemerkenswerten Kettenbruch für die Zahl e erhält man aus (14) für $x = 1$; es kommt zunächst

$$(16)\quad \frac{e}{e-1} = 2 - \frac{1\,|}{|\,3} - \frac{2\,|}{|\,4} - \frac{3\,|}{|\,5} - \frac{4\,|}{|\,6} - \cdots$$

Wendet man aber hierauf die Extensionsformel (6) von § 44 an, mit $a_\nu = -\nu$, $b_\nu = \nu + 2$, $\varrho_\nu = 1$, so ergibt sich

$$(17)\quad \frac{e}{e-1} = 1 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{2\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{3\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{4\,|}{|\,1} + \cdots,$$

sofern dieser Kettenbruch überhaupt konvergiert, was wir in § 50 beweisen werden und hier vorweg nehmen wollen. Indem man 1 subtrahiert, sodann den reziproken Wert nimmt und wieder 1 addiert, kommt schließlich

$$(18)\quad e = 2 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{2\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{3\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{4\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{5\,|}{|\,1} + \cdots.$$

III. Die Äquivalenz (4) kann selbst, wenn die Reihe divergiert, von Nutzen sein. Nach ihr ist nämlich, wenn man den Index der γ um 1 verringert,

$$\gamma_0 + \gamma_0\gamma_1 + \gamma_0\gamma_1\gamma_2 + \cdots + \gamma_0\gamma_1\cdots\gamma_\nu$$
$$= \frac{\gamma_0}{|1} - \frac{\gamma_1|}{|1+\gamma_1} - \frac{\gamma_2|}{|1+\gamma_2} - \cdots - \frac{\gamma_\nu|}{|1+\gamma_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hieraus folgt nach Division durch γ_0 und Übergang zum reziproken Wert:

$$\frac{\gamma_1|}{|1+\gamma_1} - \frac{\gamma_2|}{|1+\gamma_2} - \frac{\gamma_3|}{|1+\gamma_3} - \cdots - \frac{\gamma_\nu}{|1+\gamma_\nu}$$
$$= 1 - \frac{1}{1+\gamma_1+\gamma_1\gamma_2+\cdots+\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_\nu},$$

woraus man folgendes entnimmt:

Satz 8. *Der unendliche Kettenbruch*

$$\frac{\gamma_1|}{|1+\gamma_1} - \frac{\gamma_2|}{|1+\gamma_2} - \frac{\gamma_3|}{|1+\gamma_3} - \cdots \qquad (\gamma_\nu \neq 0)$$

zeigt folgendes Verhalten:

1. *Wenn die unendliche Reihe*

$$1 + \gamma_1 + \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \cdots$$

konvergiert und ihr Wert K ist $\neq 0$, so konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert $1 - \frac{1}{K}$.

2. *Wenn die Reihe gegen den Wert Null konvergiert, so divergiert der Kettenbruch, und zwar unwesentlich.*

3. *Wenn die Reihe derart divergiert, daß die absolut genommene Summe ihrer ν ersten Glieder für unbegrenzt wachsende ν den Grenzwert ∞ hat, so konvergiert der Kettenbruch gegen den Wert 1.*

4. *Wenn die Reihe derart divergiert, daß der in 3. angegebene Umstand nicht eintritt, so divergiert der Kettenbruch wesentlich.*

Beispielsweise liegt für $\gamma_\nu = \alpha + \nu\beta$ $(\beta \neq 0)$ der Fall 3. vor, und man erhält also

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha+\beta|}{1+\alpha+\beta} - \dfrac{\alpha+2\beta|}{|1+\alpha+2\beta} - \dfrac{\alpha+3\beta|}{|1+\alpha+3\beta} - \cdots = 1 \\ \left(\beta \neq 0,\ \dfrac{\alpha}{\beta} \neq -1, -2, -3, \cdots\right). \end{cases}$$

Ebenso liegt aber auch für $\gamma_{2\nu-1} = \frac{\alpha+\nu-1}{\beta+\nu}$, $\gamma_{2\nu} = \frac{\beta+\nu}{\alpha+\nu}$, wobei $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$, $\beta \neq -1, -2, -3, \ldots$ ist, der Fall 3. vor, wie der Leser leicht erkennen wird (vgl. übrigens Seite 214 oben); also kommt

$$\frac{\frac{\alpha}{\beta+1}}{\left|1+\frac{\alpha}{\beta+1}\right.} - \frac{\frac{\beta+1}{\alpha+1}}{\left|1+\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right.} - \frac{\frac{\alpha+1}{\beta+2}}{\left|1+\frac{\alpha+1}{\beta+2}\right.} - \frac{\frac{\beta+2}{\alpha+2}}{\left|1+\frac{\beta+2}{\alpha+2}\right.} - \cdots = 1,$$

oder nach Multiplikation mit α, nebst Übergang zu einem äquivalenten Kettenbruch:

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\alpha^2 \mid}{\mid \alpha+\beta+1} - \dfrac{(\beta+1)^2 \mid}{\mid \alpha+\beta+2} - \dfrac{(\alpha+1)^2 \mid}{\mid \alpha+\beta+3} - \dfrac{(\beta+2)^2 \mid}{\mid \alpha+\beta+4} - \cdots = \alpha \\ (\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots;\ \beta \neq -1, -2, -3, \ldots). \end{array}\right.$$

§ 46. Äquivalenz von Kettenbrüchen und Produkten.

I. In dem endlichen oder unendlichen Produkt

$$(1+\gamma_0)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)\cdots$$

seien die Faktoren $\neq 0$; nur der letzte Faktor (wenn das Produkt endlich ist) soll auch Null sein dürfen. Ein Kettenbruch heißt mit dem Produkt „äquivalent“, wenn sein Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung gleich

$$K_\nu = (1+\gamma_0)(1+\gamma_1)\cdots(1+\gamma_\nu)$$

ist für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Um einen solchen äquivalenten Kettenbruch herzustellen, setzen wir $K_\nu \neq K_{\nu-1}$, also $\gamma_\nu \neq 0$ für $\nu \geqq 1$ voraus; nach Satz 4 sind dann die Elemente des gesuchten Kettenbruches die folgenden:

$$b_0 = K_0 = 1 + \gamma_0,$$

$$a_1 = K_1 - K_0 = (1+\gamma_0)\gamma_1,\quad b_1 = 1,$$

$$a_\nu = \frac{K_{\nu-1} - K_\nu}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} = -(1+\gamma_{\nu-1})\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu-1}} \qquad (\nu \geqq 2),$$

$$b_\nu = \frac{K_\nu - K_{\nu-2}}{K_{\nu-1} - K_{\nu-2}} = 1 + (1+\gamma_{\nu-1})\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu-1}} \qquad (\nu \geqq 2),$$

so daß sich ergibt:

Satz 9. *Das endliche oder unendliche Produkt*

$$(1+\gamma_0)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)\cdots$$

dessen Faktoren, allenfalls vom letzten (im Fall der Endlichkeit) abgesehen, $\neq 0$ *und, vom ersten abgesehen,* $\neq 1$ *sind, ist äquivalent mit dem Kettenbruch*

$$1 + \gamma_0 + \frac{(1+\gamma_0)\gamma_1 \mid}{\mid 1} - \frac{c_2 \mid}{\mid 1 + c_2} - \frac{c_3 \mid}{\mid 1 + c_3} - \frac{c_4 \mid}{\mid 1 + c_4} - \cdots,$$

wobei

$$c_\nu = (1+\gamma_{\nu-1})\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu-1}}.$$

für $\nu = 2, 3, 4, \ldots$ *ist. Im Fall der Endlichkeit haben Kettenbruch und Produkt gleich viele Glieder.* (*Stern* **2**, *Glaisher* **1**.)

Wenn Äquivalenz auch hier wieder durch $\equiv$ bezeichnet wird, ergibt sich speziell für $\gamma_0 = 0$ die Formel:

$$(1)\quad \begin{cases} 1 \cdot (1+\gamma_1)(1+\gamma_2)(1+\gamma_3)\cdots \\ \equiv 1 + \frac{\gamma_1|}{|1} - \frac{c_2|}{|1+c_2} - \frac{c_3|}{|1+c_3} - \frac{c_4|}{|1+c_4} - \cdots \end{cases}$$

Aus der Definition der Äquivalenz folgt ohne weiteres: Wenn ein unendliches Produkt konvergiert, so konvergiert der Kettenbruch gegen den gleichen Wert; wenn das Produkt gegen Null divergiert[1]), so konvergiert der Kettenbruch gegen Null, während in jedem andern Fall der Divergenz auch der Kettenbruch divergiert.

II. Wir geben hierzu wieder einige Beispiele.

A. Um auf die bekannte Formel

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = (1-x)(1+x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{3}\right)\cdots$$

die Äquivalenz (1) anzuwenden, fügen wir dem Produkt einen ersten Faktor 1 hinzu und haben dann zu setzen:

$$\gamma_{2\nu-1} = -\frac{x}{\nu}, \quad \gamma_{2\nu} = \frac{x}{\nu},$$

also

$$c_{2\nu} = \frac{x}{\nu} - 1, \quad c_{2\nu+1} = -\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\frac{\nu}{\nu+1}.$$

Dies ergibt:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{\pi x} = 1 - \frac{x|}{|1} + \frac{1-x|}{|x} + \frac{(1+x)\frac{1}{2}\Big|}{\Big|\frac{1-x}{2}} + \frac{1-\frac{x}{2}\Big|}{\Big|\frac{x}{2}} + \frac{\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{2}{3}\Big|}{\Big|\frac{1-x}{3}} \\ \qquad + \frac{1-\frac{x}{3}\Big|}{\Big|\frac{x}{3}} + \frac{\left(1+\frac{x}{3}\right)\frac{3}{4}\Big|}{\Big|\frac{1-x}{4}} + \cdots \\ = 1 - \frac{x|}{|1} + \frac{1(1-x)|}{|x} + \frac{1(1+x)|}{|1-x} + \frac{2(2-x)|}{|x} \\ \qquad + \frac{2(2+x)|}{|1-x} + \frac{3(3-x)|}{|x} + \frac{3(3+x)|}{|1-x} + \cdots \end{cases}$$

1) Ein Produkt mit lauter von Null verschiedenen Faktoren wird bekanntlich nur dann als konvergent bezeichnet, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} (1+\gamma_0)(1+\gamma_1)(1+\gamma_2)\cdots(1+\gamma_\nu)$$

existiert und von Null verschieden ist. Ist er aber Null, so sagt man, das Produkt divergiere gegen Null.

Diese Formel gilt für alle Werte von x; im allgemeinen ist der Kettenbruch unendlich; nur, wenn x eine ganze Zahl ist (auch für $x = 0$), ist er endlich und zwar soweit fortzusetzen, als die Teilzähler von Null verschieden bleiben.[1] Speziell für $x = \frac{1}{2}$ kommt, wenn man zur Vermeidung von Brüchen gleich einen äquivalenten nimmt:

$$\frac{2}{\pi} = 1 - \frac{1|}{|2} + \frac{1 \cdot 2|}{|1} + \frac{2 \cdot 3|}{|1} + \frac{3 \cdot 4|}{|1} + \frac{4 \cdot 5|}{|1} + \cdots,$$

woraus sich leicht ergibt (durch Anwendung der Sätze 1, 2, Kap. I):

$$(3) \qquad 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1 \cdot 2|}{|1} + \frac{2 \cdot 3|}{|1} + \frac{3 \cdot 4|}{|1} + \frac{4 \cdot 5|}{|1} + \cdots = \frac{\pi}{2} \quad (\textit{Euler } 5).$$

Für $x = -\frac{1}{2}$ folgt aus (2)

$$\frac{2}{\pi} = 1 + \frac{1|}{|2} - \frac{2 \cdot 3|}{|1} - \frac{1 \cdot 2|}{|3} - \frac{4 \cdot 5|}{|1} - \frac{3 \cdot 4|}{|3} - \frac{6 \cdot 7|}{|1} - \frac{5 \cdot 6|}{|3} - \cdots,$$

und hieraus leicht:

$$(4) \qquad \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1|}{|3} - \frac{2 \cdot 3|}{|1} - \frac{1 \cdot 2|}{|3} - \frac{4 \cdot 5|}{|1} - \frac{3 \cdot 4|}{|3} - \frac{6 \cdot 7|}{|1} - \frac{5 \cdot 6|}{|3} - \cdots$$

(*Stern* 2).

B. Wir wollen die Formel (1) anwenden auf das Produkt

$$(5) \qquad \left(1+\frac{z}{\alpha}\right)\left(1+\frac{z}{\beta+1}\right)\left(1+\frac{z}{\alpha+1}\right)\left(1+\frac{z}{\beta+2}\right)\left(1+\frac{z}{\alpha+2}\right)\left(1+\frac{z}{\beta+3}\right)\cdots,$$

wo α, β, z beliebige reelle oder komplexe Zahlen sind; nur muß naturgemäß

$$\alpha \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$$
$$\beta \neq -1, -2, -3, \ldots$$
$$z \neq 0$$

sein. Ist in (5) ein Faktor gleich Null, so setzen wir das Produkt nur bis zu diesem Faktor inklusive fort; der äquivalente (endliche) Kettenbruch hat dann auch den Wert Null. Andernfalls betrachten wir das unendliche Produkt. Um dann zunächst die Konvergenz zu prüfen, geht man am besten aus von der absoluten Konvergenz der Reihe

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{(\beta+1)^2} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} + \frac{1}{(\beta+2)^2} + \frac{1}{(\alpha+2)^2} + \frac{1}{(\beta+3)^2} + \cdots,$$

aus welcher sich nach einem bekannten Satz von Weierstraß die Konvergenz des folgenden Produkts ergibt:

$$(6) \left(1+\frac{z}{\alpha}\right)e^{-\frac{z}{\alpha}}\left(1+\frac{z}{\beta+1}\right)e^{-\frac{z}{\beta+1}}\left(1+\frac{z}{\alpha+1}\right)e^{-\frac{z}{\alpha+1}}\left(1+\frac{z}{\beta+2}\right)e^{-\frac{z}{\beta+2}}\cdots.$$

---

1) Ob die Formel (2) für ganzzahlige x auch dann richtig ist, wenn wir rechts den unendlichen Kettenbruch, der jetzt einen verschwindenden Teilzähler hat, stehen lassen, d. h. ob dieser unendliche Kettenbruch dann konvergiert (vgl. Satz 1), mag dahingestellt bleiben. Die Beantwortung dieser Frage hat wenig Interesse.

Wenn man nun in der Reihe

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+2}+\frac{1}{\alpha+2}+\frac{1}{\beta+3}+\cdots$$

den reellen Teil vom imaginären trennt (falls α, β komplex sind), so erkennt man aus den elementarsten Sätzen der Reihenlehre leicht, die Reihe divergiert derart, daß ihr reeller Teil mit wachsender Gliederzahl über alle Grenzen wächst, während der imaginäre einen endlichen Grenzwert hat. Setzt man also die Summe ihrer ν ersten Glieder gleich $p_\nu + iq_\nu$, so ist

$$\lim_{\nu=\infty} p_\nu = \infty, \quad \lim_{\nu=\infty} q_\nu = \text{endlich};$$

setzt man ferner $z = \zeta + i\eta \neq 0$, so wird das Produkt

$$e^{-\frac{z}{\alpha}}\,e^{-\frac{z}{\beta+1}}\,e^{-\frac{z}{\alpha+1}}\,e^{-\frac{z}{\beta+2}}\,e^{-\frac{z}{\alpha+2}}\cdots, \tag{7}$$

wenn man die ν ersten Faktoren nimmt, den Wert haben:

$$e^{-(\zeta+i\eta)(p_\nu+iq_\nu)} = e^{-\zeta p_\nu+\eta q_\nu}\,e^{-i(\eta p_\nu+\zeta q_\nu)};$$

das unendliche Produkt (7) wird also für $\zeta > 0$ gegen Null, für $\zeta < 0$ gegen ∞ divergieren, während es für $\zeta = 0$, weil dann $\eta \neq 0$ ist, in endlichen Grenzen schwankt, ohne einem bestimmten Grenzwert zuzustreben. Mit Rücksicht auf die Konvergenz von (6) ergibt sich daraus für das Verhalten des Produktes (5) folgendes: Für $\zeta > 0$ divergiert es absolut gegen ∞, für $\zeta < 0$ gegen Null, während es für $\zeta = 0$ oszilliert.

Wir wenden nun die Formel (1) an und finden das Produkt (5) nach Hinzufügung eines ersten Faktors 1 äquivalent mit dem folgenden Kettenbruch:

$$1+\frac{\frac{z}{\alpha}\,|}{|\,1}-\frac{\left(1+\frac{z}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\beta+1}\,|}{|\,1+\left(1+\frac{z}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\beta+1}}-\frac{\left(1+\frac{z}{\beta+1}\right)\frac{\beta+1}{\alpha+1}\,|}{|\,1+\left(1+\frac{z}{\beta+1}\right)\frac{\beta+1}{\alpha+1}}-\cdots$$

$$\equiv 1+\frac{z\,|}{|\,\alpha}-\frac{\alpha(\alpha+z)\,|}{|\,\alpha+\beta+z+1}-\frac{(\beta+1)(\beta+z+1)\,|}{|\,\alpha+\beta+z+2}-\frac{(\alpha+1)(\alpha+z+1)\,|}{|\,\alpha+\beta+z+3}$$

$$-\frac{(\beta+2)(\beta+z+2)\,|}{|\,\alpha+\beta+z+4}-\cdots,$$

wo das alternierende Bildungsgesetz der Glieder leicht ersichtlich ist. Daher ist für $\nu \geqq 1$ das Produkt der ν ersten Faktoren von (5) gleich

$$1+\frac{z}{U_\nu},$$

wobei U_ν der Näherungsbruch $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des Kettenbruches

$$
(8)\begin{cases} \alpha - \dfrac{\alpha(\alpha+z)}{|\alpha+\beta+z+1} - \dfrac{(\beta+1)(\beta+z+1)|}{|\alpha+\beta+z+2} - \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+z+1)|}{|\alpha+\beta+z+3} \\ \qquad - \dfrac{(\beta+2)(\beta+z+2)|}{|\alpha+\beta+z+4} - \dfrac{(\alpha+2)(\alpha+z+2)|}{|\alpha+\beta+z+5} - \cdots \end{cases}
$$

ist. Wenn nun das Produkt (5) einen Faktor Null hat und wenn etwa der n^{te} Faktor der erste ist, welcher verschwindet, so muß $U_n = -z$ sein. Der in diesem Fall endliche und zwar n-gliedrige Kettenbruch (8) hat also dann den Wert $-z$. Wenn aber kein Faktor verschwindet, gilt folgendes: Da für $\zeta > 0$ das Produkt (5) absolut gegen ∞ divergiert, so muß U_ν gegen Null konvergieren; da für $\zeta < 0$ das Produkt gegen Null divergiert, so muß U_ν gegen $-z$ konvergieren. Für $\zeta = 0$, $\eta \neq 0$ oszilliert das Produkt, also auch U_ν. Endlich für den seither ausgeschlossenen Wert $z = 0$ ist der Kettenbruch (8) nach § 45, Formel (20) gleich 0. Zusammenfassend ergibt sich also

Satz 10. *Der Kettenbruch*

$$
\alpha - \frac{\alpha(\alpha+z)}{|\alpha+\beta+z+1} - \frac{(\beta+1)(\beta+z+1)|}{|\alpha+\beta+z+2} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+z+1)|}{|\alpha+\beta+z+3}
$$
$$
- \frac{(\beta+2)(\beta+z+2)|}{|\alpha+\beta+z+4} - \frac{(\alpha+2)(\alpha+z+2)|}{|\alpha+\beta+z+5} - \cdots,
$$

bei welchem α, β, z beliebige Zahlen sind, jedoch

$$
\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots, \quad \beta \neq -1, -2, -3, \ldots,
$$

zeigt folgendes Verhalten:

1. *Ist ein Teilzähler gleich Null, so hat der endliche bis zum letzten von Null verschiedenen Teilzähler fortgesetzte Kettenbruch den Wert $-z$.*

2. *Sind alle Teilzähler $\neq 0$, so hat der unendliche Kettenbruch den Wert 0 oder $-z$, je nachdem der reelle Teil von z positiv oder negativ ist. Wenn der reelle Teil von z gleich 0, so ist der Kettenbruch wesentlich divergent; nur für $z = 0$ konvergiert er und hat den Wert 0.*

Man ersieht aus diesem Beispiel, wie selbst divergente Produkte mit Vorteil benutzt werden können.

§ 47. Die Transformation von Bauer und Muir.

I. Wenn die Teilzähler des $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruches

$$
(1) \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n}
$$

alle von Null verschieden sind, und wenn wieder A_ν, B_ν seine Näherungszähler bzw. -Nenner sind, so wollen wir einen $(n+2)$-gliedrigen Kettenbruch bilden, dessen Näherungszähler bzw. -Nenner der Reihe nach die folgenden sind:

$$A_0 + r_0 A_{-1}, \qquad A_1 + r_1 A_0, \ldots, A_n + r_n A_{n-1}, \sigma A_n$$
bzw. $$B_0 + r_0 B_{-1} = 1, \; B_1 + r_1 B_0, \ldots, B_n + r_n B_{n-1}, \sigma B_n \qquad (\sigma \neq 0).$$

Dieser Kettenbruch sei

$$d_0 + \frac{c_1|}{|d_1} + \frac{c_2|}{|d_2} + \cdots + \frac{c_{n+1}|}{|d_{n+1}}. \tag{2}$$

Hierbei wollen wir die Möglichkeit $c_{n+1} = 0$ zulassen; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ aber sollen von Null verschieden sein. Demgemäß müssen wir

$$(A_\nu + r_\nu A_{\nu-1})(B_{\nu-1} + r_{\nu-1} B_{\nu-2}) - (A_{\nu-1} + r_{\nu-1} A_{\nu-2})(B_\nu + r_\nu B_{\nu-1}) \neq 0$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

voraussetzen, was wegen

$$A_\nu B_{\nu-1} - A_{\nu-1} B_\nu = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots a_\nu,$$
$$A_\nu B_{\nu-2} - A_{\nu-2} B_\nu = (-1)^\nu b_\nu a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1}$$

und weil alle $a_\nu \neq 0$ sind, sich reduziert auf:

$$a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu) \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Die c_ν, d_ν berechnen sich dann eindeutig aus den folgenden Gleichungen:

$$d_0 = A_0 + r_0 A_{-1} = b_0 + r_0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} d_0 d_1 + c_1 = A_1 + r_1 A_0 = b_0 b_1 + a_1 + r_1 b_0 \\ \quad d_1 = B_1 + r_1 B_0 = b_1 + r_1, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} d_\nu(A_{\nu-1} + r_{\nu-1} A_{\nu-2}) + c_\nu(A_{\nu-2} + r_{\nu-2} A_{\nu-3}) = A_\nu + r_\nu A_{\nu-1} \\ d_\nu(B_{\nu-1} + r_{\nu-1} B_{\nu-2}) + c_\nu(B_{\nu-2} + r_{\nu-2} B_{\nu-3}) = B_\nu + r_\nu B_{\nu-1} \end{cases} \tag{6}$$
$$(\nu = 2, 3, \ldots, n),$$

$$\begin{cases} d_{n+1}(A_n + r_n A_{n-1}) + c_{n+1}(A_{n-1} + r_{n-1} A_{n-2}) = \sigma A_n \\ d_{n+1}(B_n + r_n B_{n-1}) + c_{n+1}(B_{n-1} + r_{n-1} B_{n-2}) = \sigma B_n. \end{cases} \tag{7}$$

Durch (4) ist d_0 bekannt. Setzt man den Wert in (5) ein, so kommt durch Auflösung nach c_1, d_1:

$$c_1 = a_1 - r_0(b_1 + r_1), \quad d_1 = b_1 + r_1.$$

Die Auflösung von (6) ergibt nach leichter Rechnung, die dem Leser überlassen sei:

$$\left.\begin{aligned} c_\nu &= a_{\nu-1} \cdot \frac{a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu)}{a_{\nu-1} - r_{\nu-2}(b_{\nu-1} + r_{\nu-1})} \\ d_\nu &= b_\nu + r_\nu - r_{\nu-2} \cdot \frac{a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu)}{a_{\nu-1} - r_{\nu-2}(b_{\nu-1} + r_{\nu-1})} \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Endlich kommt durch Auflösung von (7):

$$c_{n+1} = \frac{-a_n r_n \sigma}{a_n - r_{n-1}(b_n + r_n)}, \quad d_{n+1} = \sigma + \frac{r_n r_{n-1} \sigma}{a_n - r_{n-1}(b_n + r_n)}.$$

Die in diesen Formeln auftretenden Nenner sind wegen (3) von Null verschieden, und der Kettenbruch (2) mit den so berechneten Elementen hat offenbar alle verlangten Eigenschaften. Zur Vereinfachung der Formeln empfiehlt es sich, die Bezeichnung etwas zu ändern. Indem wir zunächst r_ν beibehalten, führen wir für b_ν, a_ν neue Größen β_ν, α_ν ein mittels der Gleichungen

$$b_\nu = \beta_\nu - r_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

$$a_\nu = \alpha_\nu + r_{\nu-1}\beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

oder, nach β_ν, α_ν aufgelöst:

$$\beta_\nu = b_\nu + r_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

$$\alpha_\nu = a_\nu - r_{\nu-1}(b_\nu + r_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Bedingungsungleichung (3) lautet also jetzt einfach

$$\alpha_\nu \neq 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

und demgemäß können wir für r_ν noch neue Größen $\varrho_{\nu+1}$ einführen vermittels der Gleichung

$$r_\nu = \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Endlich führen wir für die noch fehlenden Zahlen r_n, σ drei andere: α_{n+1}, β_{n+1}, ϱ_{n+1} ein, nämlich

$$\alpha_{n+1} = -\sigma r_n, \quad \beta_{n+1} = \sigma, \quad \varrho_{n+1} = -\frac{1}{\sigma},$$

zwischen denen dann die Relation $\beta_{n+1}\varrho_{n+1} = -1$ besteht. Mit Hilfe dieser Zahlen α_ν, β_ν, ϱ_ν drücken sich nun die a_ν, b_ν, c_ν, d_ν folgendermaßen aus:

$$a_\nu = \alpha_\nu(1 + \varrho_\nu\beta_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$b_\nu = \beta_\nu - \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n),$$

$$d_0 = \beta_0, \quad c_1 = \alpha_1, \quad d_1 = \beta_1,$$

$$\left.\begin{aligned} c_\nu &= \alpha_\nu(1 + \varrho_{\nu-1}\beta_{\nu-1}) \\ d_\nu &= \beta_\nu - \varrho_{\nu-1}\alpha_\nu \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n+1),$$

und es ergibt sich

Satz 11. *Hat der* $(n+1)$*-gliedrige Kettenbruch*

$$\beta_0 - \varrho_1\alpha_1 + \frac{\alpha_1(1+\varrho_1\beta_1)|}{|\beta_1 - \varrho_2\alpha_2} + \cdots + \frac{\alpha_n(1+\varrho_n\beta_n)|}{|\beta_n - \varrho_{n+1}\alpha_{n+1}}, \textit{ wobei } \varrho_{n+1} \neq 0,$$

lauter von Null verschiedene Teilzähler, und sind A_ν, B_ν seine Näherungszähler bzw. -Nenner, so hat der $(n+2)$-gliedrige Kettenbruch

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1 |}{| \beta_1} + \frac{\alpha_2(1+\varrho_1\beta_1) |}{| \beta_2 - \varrho_1\alpha_2} + \cdots + \frac{\alpha_{n+1}(1+\varrho_n\beta_n) |}{| \beta_{n+1} - \varrho_n\alpha_{n+1}}, \text{ wobei } \beta_{n+1} = -\frac{1}{\varrho_{n+1}},$$

der Reihe nach die Näherungszähler

$$A_0 + \varrho_1\alpha_1,\quad A_1 + \varrho_2\alpha_2 A_0, \ldots, A_n + \varrho_{n+1}\alpha_{n+1}A_{n-1},\quad \beta_{n+1}A_n$$

und die Näherungsnenner

$$B_0\,(=1),\quad B_1 + \varrho_2\alpha_2 B_0, \ldots, B_n + \varrho_{n+1}\alpha_{n+1}B_{n-1},\quad \beta_{n+1}B_n.$$

Wenn also einer der beiden Kettenbrüche sinnlos ist, so ist es auch der andere; andernfalls haben beide den gleichen Wert. Subtrahiert man β_0 von beiden Kettenbrüchen, so erkennt man insbesondere: *Das Produkt der beiden $(n+1)$-gliedrigen Kettenbrüche*

$$(8)\quad \begin{cases} -\varrho_1\alpha_1 + \dfrac{\alpha_1(1+\varrho_1\beta_1) |}{| \beta_1 - \varrho_2\alpha_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_n(1+\varrho_n\beta_n) |}{| \beta_n - \varrho_{n+1}\alpha_{n+1}}, \\ \beta_1 + \dfrac{\alpha_2(1+\varrho_1\beta_1) |}{| \beta_2 - \varrho_1\alpha_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n+1}(1+\varrho_n\beta_n) |}{| \beta_{n+1} - \varrho_n\alpha_{n+1}}, \end{cases}$$

deren erster lauter von Null verschiedene Teilzähler hat, und wobei $\varrho_{n+1}\beta_{n+1} = -1$ ist, hat den Wert α_1. Dies gilt, wenn einer der Kettenbrüche sinnlos ist, noch immer in dem Sinn, daß dann der andere den Wert Null hat.

Wählt man z. B.

$$\alpha_\nu = k-1,\ \beta_\nu = 1+\gamma_\nu,\ \varrho_\nu = \frac{1}{k-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$
$$\alpha_{n+1} = 0,$$

wo natürlich, damit ϱ_ν einen Sinn hat, $k \neq 1$ sein muß, so kommt die Formel von *G. Bauer* **1**:

$$(9)\quad \begin{cases} \left(-1 + \dfrac{k+\gamma_1 |}{| \gamma_1} + \cdots + \dfrac{k+\gamma_{n-1} |}{| \gamma_{n-1}} + \dfrac{k+\gamma_n |}{| \gamma_n + 1}\right) \\ \times\left(1+\gamma_1 + \dfrac{k+\gamma_1 |}{| \gamma_2} + \cdots + \dfrac{k+\gamma_{n-1} |}{| \gamma_n}\right) = k-1 \end{cases} \quad (k+\gamma_\nu \neq 0).$$

Diese hat aber, wenn der zweite Faktor nicht sinnlos ist, auch für $k=1$ noch Gültigkeit, weil dann der erste Faktor verschwindet. In der Tat, setzt man

$$\xi_n = \gamma_n + 1,\quad \xi_{n-1} = \gamma_{n-1} + \frac{1+\gamma_n}{\xi_n},\quad \xi_{n-2} = \gamma_{n-2} + \frac{1+\gamma_{n-1}}{\xi_{n-1}}, \ldots,$$

$$\xi_1 = \gamma_1 + \frac{1+\gamma_2}{\xi_2},\quad \xi_0 = -1 + \frac{1+\gamma_1}{\xi_1},$$

so ergibt sich sukzessive:

$$\xi_n = \gamma_n + 1,\ \xi_{n-1} = \gamma_{n-1} + 1,\ \xi_{n-2} = \gamma_{n-2} + 1, \ldots, \xi_1 = \gamma_1 + 1,\ \xi_0 = 0;$$

anderseits mittels Satz 1, Kap. I:

$$0 = \xi_0 = -1 + \frac{1+\gamma_1 |}{| \gamma_1} + \frac{1+\gamma_2 |}{| \gamma_2} + \cdots + \frac{1+\gamma_{n-1} |}{| \gamma_{n-1}} + \frac{1+\gamma_n |}{| \gamma_n + 1}. \text{ W.z.b.w.}$$

Als weiteres Beispiel wählen wir

$$\alpha_\nu = \delta_{\nu-1}(k-\alpha);\ \beta_\nu = k - \delta_\nu;\ \varrho_\nu = \frac{1}{\alpha - k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n+1),$$

wobei natürlich $k \neq \alpha$, und wegen $\varrho_{n+1}\beta_{n+1} = -1 : \delta_{n+1} = \alpha$ zu setzen ist; es ergibt sich so die Formel von *Muir* 5:

$$(10)\ \begin{cases} \left(\delta_0 + \frac{\delta_0(\delta_1-\alpha) |}{| k} + \frac{\delta_1(\delta_2-\alpha) |}{| k} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_n-\alpha) |}{| k}\right) \\ \times\left(k - \delta_1 + \frac{\delta_1(\delta_1-\alpha) |}{| k - \delta_2 + \delta_1} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_{n-1}-\alpha) |}{| k - \delta_n + \delta_{n-1}} + \frac{\delta_n(\delta_n-\alpha) |}{| k - \alpha + \delta_n}\right) \\ = \delta_0(k-\alpha) \qquad\qquad (\delta_\nu \neq 0;\ \delta_\nu \neq \alpha), \end{cases}$$

welche aber, wenn der erste Faktor nicht sinnlos ist, auch noch für $k = \alpha$ gilt, indem dann der zweite Faktor verschwindet. In der Tat, setzt man diesmal

$$\xi_n = \delta_n,\ \xi_{n-1} = \alpha - \delta_n + \delta_{n-1} + \frac{\delta_n(\delta_n - \alpha)}{\xi_n}, \ldots,$$

$$\xi_1 = \alpha - \delta_2 + \delta_1 + \frac{\delta_2(\delta_2-\alpha)}{\xi_2},\quad \xi_0 = \alpha - \delta_1 + \frac{\delta_1(\delta_1-\alpha)}{\xi_1},$$

so ergibt sich sukzessive:

$$\xi_n = \delta_n,\ \ \xi_{n-1} = \delta_{n-1}, \ldots, \xi_2 = \delta_2,\ \ \xi_1 = \delta_1,\ \ \xi_0 = 0;$$

also auch wieder vermittels Satz 1, Kap. I:

$$(11)\quad 0 = \alpha - \delta_1 + \frac{\delta_1(\delta_1-\alpha) |}{| \alpha - \delta_2 + \delta_1} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_{n-1}-\alpha) |}{| \alpha - \delta_n + \delta_{n-1}} + \frac{\delta_n(\delta_n-\alpha) |}{| \delta_n}.$$

Setzt man in (10) $-\alpha$, $-\delta_\nu$ an Stelle von α, δ_ν, so kommt:

$$(10a)\ \begin{cases} \left(-\delta_0 + \frac{\delta_0(\delta_1-\alpha) |}{| k} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_n-\alpha) |}{| k}\right) \\ \times\left(k + \delta_1 + \frac{\delta_1(\delta_1-\alpha) |}{| k + \delta_2 - \delta_1} + \cdots + \frac{\delta_n(\delta_n-\alpha) |}{| k + \alpha - \delta_n}\right) = -\delta_0(k+\alpha), \end{cases}$$

und durch Elimination des Kettenbruches

$$\frac{\delta_0(\delta_1-\alpha)|}{|\quad k} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_n-\alpha)|}{|\quad k}$$

aus den Formeln (10) und (10a) folgt noch:

$$(12)\quad \begin{cases} \left(\frac{k+\alpha}{2} - \delta_1 + \frac{\delta_1(\delta_1-\alpha)|}{|k-\delta_2+\delta_1} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_{n-1}-\alpha)|}{|k-\delta_n+\delta_{n-1}} + \frac{\delta_n(\delta_n-\alpha)|}{|k-\alpha+\delta_n}\right) \\ \times\left(\frac{k-\alpha}{2} + \delta_1 + \frac{\delta_1(\delta_1-\alpha)|}{|k+\delta_2-\delta_1} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_{n-1}-\alpha)|}{|k+\delta_n-\delta_{n-1}} + \frac{\delta_n(\delta_n-\alpha)|}{|k+\alpha-\delta_n}\right) \\ = \frac{k^2-\alpha^2}{4} \qquad (\delta_\nu \neq 0;\ \delta_\nu \neq \alpha). \end{cases}$$

Hier verschwindet für $k=\alpha$ der erste, für $k=-\alpha$ der zweite Faktor. Die Formel (12), die sich übrigens auch direkt aus (8) gewinnen läßt, indem man

$$\alpha_\nu = \frac{k^2-\alpha^2}{4},\quad \beta_\nu = \delta_\nu + \frac{k-\alpha}{2}\quad \varrho_\nu = 4\,\frac{\delta_\nu - \frac{k+\alpha}{2}}{k^2-\alpha^2},\quad \delta_{n+1} = \alpha$$

setzt, stammt ebenfalls von *Muir* 5; Spezialfälle von *Bauer* 1. Beide Autoren gelangten dazu, indem sie Zähler und Nenner der Kettenbrüche als Kontinuanten (§ 4) darstellten und auf diese einige bekannte Determinantenumformungen anwandten.

II. In gewissen Fällen kann man zur Grenze $n=\infty$ übergehen. In dieser Richtung liegt

Satz 12. a) *Wenn die beiden unendlichen Kettenbrüche*

$$\beta_0 - \varrho_1\alpha_1 + \frac{\alpha_1(1+\varrho_1\beta_1)|}{|\beta_1-\varrho_2\alpha_2} + \frac{\alpha_2(1+\varrho_2\beta_2)|}{|\beta_2-\varrho_3\alpha_3} + \cdots,$$

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2(1+\varrho_1\beta_1)|}{|\beta_2-\varrho_1\alpha_2} + \frac{\alpha_3(1+\varrho_2\beta_2)|}{|\beta_3-\varrho_2\alpha_3} + \cdots$$

positive Elemente haben (α_ν, β_ν, ϱ_ν reell) und wenn beide konvergieren, so konvergieren sie gegen den gleichen Wert.

b) *Wenn wenigstens der erste Kettenbruch positive Elemente hat und konvergiert, und wenn für genügend große ν stets $\varrho_\nu\alpha_\nu \geq 0$ ist, so konvergiert auch der zweite Kettenbruch und hat den gleichen Wert wie der erste.*

Beweis zu a). Sind wieder $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ die Näherungsbrüche des ersten Kettenbruches, so sind die des zweiten nach Satz 11:

$$(13)\qquad \frac{A_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}A_{\nu-1}}{B_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}B_{\nu-1}}.$$

Nach Voraussetzung existieren also die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \xi_0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}A_{\nu-1}}{B_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}B_{\nu-1}} = \eta_0,$$

und es ist nur zu zeigen, daß sie einander gleich sind. Wenn nun unendlich oft $\varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} \geqq 0$ ist, so liegt, weil die Elemente, also auch die A_ν, B_ν positiv sind, der Bruch (13) unendlich oft zwischen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$, kommt also beliebig nahe an ξ_0. Daher kann sein Grenzwert η_0 nicht von ξ_0 verschieden sein.

Jetzt bleibt noch der Fall, daß für alle hinreichend großen ν stets $\varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} < 0$ ist. Nun hat man aber nach den Rekursionsformeln für die Näherungszähler:

$$A_\nu = (\beta_\nu - \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1})A_{\nu-1} + \alpha_\nu(1 + \varrho_\nu\beta_\nu)A_{\nu-2},$$

oder nach leichter Umformung, weil $\varrho_\nu\alpha_\nu < 0$, also $\neq 0$ ist:

$$A_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}A_{\nu-1} + \frac{\alpha_\nu(1+\varrho_\nu\beta_\nu)}{-\varrho_\nu\alpha_\nu}(A_{\nu-1} + \varrho_\nu\alpha_\nu A_{\nu-2}) = -\frac{1}{\varrho_\nu}A_{\nu-1}.$$

Die entsprechende Gleichung besteht auch für die B_ν, und daher ergibt sich durch Division:

$$\frac{(A_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}A_{\nu-1}) + \frac{\alpha_\nu(1+\varrho_\nu\beta_\nu)}{-\varrho_\nu\alpha_\nu}(A_{\nu-1} + \varrho_\nu\alpha_\nu A_{\nu-2})}{(B_\nu + \varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1}B_{\nu-1}) + \frac{\alpha_\nu(1+\varrho_\nu\beta_\nu)}{-\varrho_\nu\alpha_\nu}(B_{\nu-1} + \varrho_\nu\alpha_\nu B_{\nu-2})} = \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}.$$

Da aber diesmal $\varrho_\nu\alpha_\nu < 0$, also wegen der positiven Elemente des ersten Kettenbruches $\frac{\alpha_\nu(1+\varrho_\nu\beta_\nu)}{-\varrho_\nu\alpha_\nu} > 0$ ist, da ferner die Elemente, also auch die Näherungszähler und -Nenner des zweiten Kettenbruches positiv sind, so besagt diese Gleichung, daß $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen des zweiten Kettenbruches liegt. Daher sind die Grenzwerte ξ_0, η_0 wieder gleich.

Beweis zu b). Da der erste Kettenbruch positive Elemente hat, so sind auch die Näherungsnenner B_ν positiv; ebenso ist nach Voraussetzung $\varrho_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} \geqq 0$ für genügend große Werte von ν. Daher liegt der Bruch (13) zwischen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$. Wenn also $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ einen Grenzwert hat, so muß der Bruch (13) den gleichen Grenzwert haben. W. z. b. w.

Als Beispiel wählen wir wieder

$$(14) \qquad \alpha_\nu = \frac{k^2 - \alpha^2}{4}, \quad \beta_\nu = \delta_\nu + \frac{k-\alpha}{2}, \quad \varrho_\nu = 4\,\frac{\delta_\nu - \frac{k+\alpha}{2}}{k^2 - \alpha^2},$$

wo natürlich $k^2 \neq \alpha^2$ sein muß. Es folgt dann

$$(15) \quad \begin{cases} k - \delta_1 + \delta_0 + \dfrac{\delta_1(\delta_1 - \alpha)|}{|k - \delta_2 + \delta_1} + \dfrac{\delta_2(\delta_2 - \alpha)|}{|k - \delta_3 + \delta_2} + \dfrac{\delta_3(\delta_3 - \alpha)|}{|k - \delta_4 + \delta_3} + \cdots \\ = \dfrac{k-\alpha}{2} + \delta_0 + \dfrac{\frac{k^2-\alpha^2}{4}\Big|}{\Big|\frac{k-\alpha}{2} + \delta_1} + \dfrac{\delta_1(\delta_1 - \alpha)|}{|k + \delta_2 - \delta_1} + \dfrac{\delta_2(\delta_2 - \alpha)|}{|k + \delta_3 - \delta_2} + \cdots, \end{cases}$$

sofern diese Kettenbrüche die Bedingungen von Satz 12 erfüllen.[1]) Die Formel gilt aber, wenn noch $\delta_\nu > 0$ ist, auch für $k = \alpha$, insofern, als dann der links stehende Kettenbruch, falls er positive Elemente hat und konvergiert, notwendig den Wert δ_0 hat. In der Tat, bezeichnen wir seine Näherungszähler und -Nenner mit A_ν, B_ν, so ist offenbar

$$\alpha - \delta_1 + \delta_0 + \frac{\delta_1(\delta_1 - \alpha)|}{|\alpha - \delta_2 + \delta_1} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}(\delta_{n-1} - \alpha)|}{|\alpha - \delta_n + \delta_{n-1}} + \frac{\delta_n(\delta_n - \alpha)|}{|\delta_n}$$
$$= \frac{\delta_n A_{n-1} + \delta_n(\delta_n - \alpha) A_{n-2}}{\delta_n B_{n-1} + \delta_n(\delta_n - \alpha) B_{n-2}},$$

also zwischen $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ und $\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}$ gelegen. Da aber dieser letzte Kettenbruch nach Formel (11) den Wert δ_0 hat, so ergibt sich, daß δ_0 zwischen $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$ und $\frac{A_{n-2}}{B_{n-2}}$ liegt, wie groß auch n sei. Der Grenzwert von $\frac{A_n}{B_n}$ kann daher nicht von δ_0 verschieden sein. Somit erhält man die Formel

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{\delta_1(\delta_1 - \alpha)|}{|\alpha - \delta_2 + \delta_1} + \dfrac{\delta_2(\delta_2 - \alpha)|}{|\alpha - \delta_3 + \delta_2} + \dfrac{\delta_3(\delta_3 - \alpha)|}{|\alpha - \delta_4 + \delta_3} + \cdots = \delta_1 - \alpha \\ \text{für } \delta_\nu > 0, \ \delta_\nu - \alpha > 0, \ \alpha - \delta_{\nu+1} + \delta_\nu > 0, \end{cases}$$

vorausgesetzt, daß der Kettenbruch überhaupt konvergiert. Speziell für $\delta_\nu = a + b + \nu c$, $\alpha = 2b$ kommt:

---

1) Dazu ist keineswegs erforderlich, daß die Zahlen k, α, δ_ν reell sind. In Satz 12 ist vielmehr nur die Reellität von α_ν, β_ν, ϱ_ν gefordert, was sich hier reduziert auf

$$k, \ \alpha^2, \ \delta_\nu - \frac{\alpha}{2} = \text{reell}.$$

Es darf also α auch rein imaginär sein, sofern dann alle δ_ν den imaginären Teil $\frac{\alpha}{2}$ haben.

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a+b+c)(a-b+c)|}{|\;2b-c} + \frac{(a+b+2c)(a-b+2c)|}{|\;2b-c} \\ &+ \frac{(a+b+3c)(a-b+3c)|}{|\;2b-c} + \cdots = a-b+c \\ &\quad \text{für} \quad a \pm b + c > 0, \quad 2b > c \geqq 0. \end{aligned}\right.$$

Denn, daß dieser Kettenbruch wirklich konvergiert, ergibt sich aus einem im nächsten Kapitel zu beweisenden Kriterium (Satz 10, Seite 239).

Beispiel. Sei $a = b = c = 1$; dann folgt

$$(18)\quad \frac{1\cdot 3|}{|\;1} + \frac{2\cdot 4|}{|\;1} + \frac{3\cdot 5|}{|\;1} + \frac{4\cdot 6|}{|\;1} + \frac{5\cdot 7|}{|\;1} + \cdots = 1.$$

Wir kehren jetzt zu der allgemeinen Formel (15) zurück. Wird dort speziell $\delta_\nu = a + b + \nu c$, $\alpha = 2b$, $k = 2h + 2c$ gesetzt, wobei

$$(19)\quad c \geqq 0, \quad h > -\frac{c}{2}, \quad a + c \geqq 0, \quad (a+c)^2 > b^2 > -\infty$$

sein soll, so kommt:

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &2h + c + \frac{(a+b+c)(a-b+c)|}{|\;2h+c} + \frac{(a+b+2c)(a-b+2c)|}{|\;2h+c} \\ &\qquad + \frac{(a+b+3c)(a-b+3c)|}{|\;2h+c} + \cdots \\ &= h + c + a + \frac{(h+b+c)(h-b+c)|}{|\;h+2c+a} + \frac{(a+b+c)(a-b+c)|}{|\;2h+3c} \\ &\qquad + \frac{(a+b+2c)(a-b+2c)|}{|\;2h+3c} + \frac{(a+b+3c)(a-b+3c)|}{|\;2h+3c} + \cdots. \end{aligned}\right.$$

Hier sind nämlich in der Tat die Voraussetzungen von Satz 12 erfüllt.[1]) Denn erstens hat der links stehende Kettenbruch lauter positive Elemente und konvergiert, wie sich wieder aus Satz 10, Seite 239 ergibt; zweitens ist für $c > 0$:

$$\varrho_\nu \alpha_\nu = \delta_\nu - \frac{k+\alpha}{2} = a + b + \nu c - (h + c + b) = a - h + (\nu - 1)c > 0$$

für genügend große ν; also die Bedingung von Satz 12 b) erfüllt. Wenn aber $c = 0$, so ist entweder $\varrho_\nu \alpha_\nu = a - h > 0$, also wieder Satz 12 b) anwendbar; oder aber es ist $a - h \leqq 0$, also mit Rücksicht auf (19) für $c = 0$:

$$h^2 \geqq a^2 > b^2, \quad h + a > 0,$$

---

1) Außer für $h \pm b + c = 0$. Die Formel (20) bleibt aber auch in diesem Fall richtig, sofern man den rechtsstehenden Kettenbruch auf sein Anfangsglied beschränkt. Dann deckt sie sich nämlich mit (17), weil ja wegen (19) $h + c > 0$ sein muß, so daß die Gleichung $h \pm b + c = 0$ mit $h + c = |b|$, d. h. mit $h = |b| - c$ gleichbedeutend ist.

so daß jetzt der auf der rechten Seite von (20) stehende Kettenbruch ebenfalls lauter positive Elemente hat; da er auch nach dem gleichen Kriterium sich als konvergent erweist, so tritt jetzt Satz 12a) in Kraft.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(21)\quad \begin{cases} h + \frac{c}{2} + \frac{(a+b+c)(a-b+c)|}{|\quad 2h+c} + \frac{(a+b+2c)(a-b+2c)|}{|\quad 2h+c} + \cdots \\ = \varphi_{b,c}(a, h), \end{cases}$$

so nimmt Formel (20) die Gestalt einer Funktionalgleichung an:

$$(22)\quad \varphi_{b,c}(a,h) = a + \frac{c}{2} + \frac{(h+b+c)(h-b+c)}{a+\frac{c}{2}+\varphi_{b,c}(a,h+c)} \quad \text{(bei d. Voraussetzungen (19))}.$$

III. Wir machen von Formel (22) drei Anwendungen.

A. Für $c = 0$, $b = 0$ kommt

$$[\varphi_{0,0}(a, h) - a][\varphi_{0,0}(a, h) + a] = h^2,$$

also $\varphi_{0,0}(a, h) = \sqrt{h^2 + a^2}$, oder

$$(23)\quad h + \frac{a^2|}{|2h} + \frac{a^2|}{|2h} + \frac{a^2|}{|2h} + \cdots = \sqrt{a^2 + h^2} \qquad (h > 0,\ a^2 > 0).$$

Dies ergibt sich übrigens leicht auch daraus, daß der Kettenbruch periodisch ist.

B. Für $a = -1$, $c = 2$ kommt

$$(24)\quad \begin{cases} \varphi_{b,2}(-1, h)\,\varphi_{b,2}(-1, h+2) = (h+b+2)(h-b+2) \\ \qquad (h > -1,\ 1 > b^2 > -\infty). \end{cases}$$

Diese Formel findet sich für $b = 0$ und ganzzahlige h bereits bei *Wallis* **1**. Sie hat dann *Euler* **13** zu interessanten, aber erfolglosen Beweisversuchen angeregt und hat auch die Arbeit von *Bauer* **1**, der sie richtig bewies, veranlaßt. Wir wollen sie zur Berechnung des Kettenbruches $\varphi_{b,2}(-1, h)$ benutzen. Aus (24) folgt zunächst, indem man für h der Reihe nach die Werte $h, h+2, h+4, \ldots h+4\nu-2$ setzt, die entstehenden Gleichungen mit $1, -1, 1, -1, \ldots$ potenziert und dann miteinander multipliziert:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi_{b,2}(-1,h)}{\varphi_{b,2}(-1,h+4\nu)} = \prod\limits_{\lambda=1}^{\nu} \dfrac{(h+b+4\lambda-2)(h-b+4\lambda-2)}{(h+b+4\lambda)(h-b+4\lambda)} \\[2ex] \qquad = \prod\limits_{\lambda=1}^{\nu} \dfrac{\left(\frac{h+b}{4}-\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\left(\frac{h+b}{4}+\lambda\right)} \cdot \prod\limits_{\lambda=1}^{\nu} \dfrac{\left(\frac{h-b}{4}-\frac{1}{2}+\lambda\right)}{\left(\frac{h-b}{4}+\lambda\right)} \\[2ex] = \dfrac{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+1+\nu\right)} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+\frac{1}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+1+\nu\right)}, \end{cases}$$

wo Γ die bekannte Gammafunktion bezeichnet. Hier wollen wir zur Grenze $\nu = \infty$ übergehen. Nun ist aber definitionsgemäß

$$\varphi_{b,2}(-1, h+4\nu) = h+4\nu+1+\frac{1^2-b^2|}{|2h+8\nu+2}+\frac{3^2-b^2|}{|2h+8\nu+2}+\cdots$$
$$> h+4\nu,$$

und auch

$$\frac{1-b^2}{\varphi_{b,2}(-1, h+4\nu)-(h+4\nu+1)} = 2h+8\nu+2+\frac{3^2-b^2|}{|2h+8\nu+2}+\cdots$$
$$> 2h+8\nu > 1.$$

Daher

$$\varphi_{b,2}(-1, h+4\nu)\begin{cases} > h+4\nu \\ < h+4\nu+1+1-b^2, \end{cases}$$

und folglich

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{4\nu}{\varphi_{b,2}(-1, h+4\nu)} = 1.$$

Multipliziert man daher (25) mit 4ν und läßt dann ν über alle Grenzen wachsen, so kommt

$$\varphi_{b,2}(-1, h) = 4\frac{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+\frac{1}{2}\right)}\Phi(b)\,\Phi(-b),$$

wobei

$$\Phi(b) = \lim_{\nu=\infty}\sqrt{\nu}\,\frac{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+1+\nu\right)}$$

$$= \lim_{\nu=\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}+\nu\right)}{(\nu-1)!\,\nu^{\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}}}\cdot\lim_{\nu=\infty}\frac{(\nu-1)!\,\nu^{\frac{h+b}{4}+1}}{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+1+\nu\right)} = 1.^{1)}$$

Ebenso wird $\Phi(-b) = 1$, und man erhält somit, wenn man für $\varphi_{b,2}(-1, h)$ den Kettenbruch einsetzt:

$$(26)\qquad \begin{cases} h+1+\frac{1^2-b^2|}{|2h+2}+\frac{3^2-b^2|}{|2h+2}+\frac{5^2-b^2|}{|2h+2}+\cdots \\ = 4\frac{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{h+b}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h-b}{4}+\frac{1}{2}\right)} \qquad \begin{pmatrix} h > -1 \\ 1 > b^2 > -\infty \end{pmatrix}. \end{cases}$$

1) Bekanntlich ist ja $\lim\limits_{\nu=\infty}\frac{\Gamma(x+\nu)}{(\nu-1)!\,\nu^x} = 1$. Man vergleiche etwa: Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, Seite 3. Dort ist diese Eigenschaft sogar in die Definition der Gammafunktion aufgenommen.

Speziell für $h = 0$ kommt unter Benutzung bekannter Eigenschaften der Gammafunktion[1]):

$$(27)\quad 1 + \frac{1^2 - b^2|}{|\;2} + \frac{3^2 - b^2|}{|\;2} + \frac{5^2 - b^2|}{|\;2} + \cdots = b \operatorname{cotg} \frac{b\pi}{4} \quad (1 > b^2 > -\infty).$$

Oder wenn man $b\sqrt{-1}$ an Stelle von b setzt,

$$(27\text{a})\quad 1 + \frac{1^2 + b^2|}{|\;2} + \frac{3^2 + b^2|}{|\;2} + \frac{5^2 + b^2|}{|\;2} + \cdots = b\,\frac{e^{\frac{b\pi}{4}} + e^{-\frac{b\pi}{4}}}{e^{\frac{b\pi}{4}} - e^{-\frac{b\pi}{4}}} \quad (b^2 > -1).$$

Weiter folgt aus (26) für $b = 0$:

$$(28)\quad \begin{cases} h + 1 + \dfrac{1\;|}{|\,2h+2} + \dfrac{9\;|}{|\,2h+2} + \dfrac{25\;|}{|\,2h+2} + \cdots = 4\,\dfrac{\Gamma\left(\frac{h}{4}+1\right)^2}{\Gamma\left(\frac{h}{4}+\frac{1}{2}\right)^2} \\ (h > -1). \end{cases}$$

Hieraus noch speziell für $h = 4n$ und $h = 4n - 2$:

$$(28\text{a})\quad \begin{cases} 4n + 1 + \dfrac{1\;|}{|\,8n+2} + \dfrac{9\;|}{|\,8n+2} + \dfrac{25\;|}{|\,8n+2} + \dfrac{49\;|}{|\,8n+2} + \cdots \\ \qquad = \left(\dfrac{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}\right)^2 \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^2 \dfrac{1}{\pi} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\ 4n - 1 + \dfrac{1\;|}{|\,8n-2} + \dfrac{9\;|}{|\,8n-2} + \dfrac{25\;|}{|\,8n-2} + \dfrac{49\;|}{|\,8n-2} + \cdots \\ \qquad = \left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\right)^2 4n^2 \pi \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Diese Formeln hat für kleine n bereits *Euler* **13**. Die allgemeinere Formel (26) steht bei *Stieltjes* **3, 5**. Daselbst findet sich noch die weitere Formel

$$(29)\quad \begin{cases} 1 + \dfrac{2b\;|}{|\,2h+1-b} + \dfrac{1^2 - b^2|}{|\,2h+1} + \dfrac{2^2 - b^2|}{|\,2h+1} + \dfrac{3^2 - b^2|}{|\,2h+1} + \cdots \\ = \dfrac{\Gamma\left(\frac{h-b}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{h+b}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{h-b}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{h+b}{2}+\frac{1}{2}\right)}, \end{cases}$$

die sich für

$$h > -\frac{1}{2}, \quad 1 > b^2 > -\infty, \quad b \neq h + 1$$

---

1) Nämlich $\Gamma(1+x)\,\Gamma(1-x) = x\,\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi x}{\sin \pi x}$ (Nielsen, l. c. Seite 14), angewandt für $x = \dfrac{b}{4}$ und $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{b}{4}$.

auf analoge Art beweisen läßt. In der Tat folgt aus (22) für $a = 0$, $c = 1$:

$$\varphi_{b,1}(0, h) = \frac{1}{2} + \frac{(h+1+b)(h+1-b)}{\frac{1}{2} + \varphi_{b,1}(0, h+1)},$$

wofür man, wenn

$$1 + \frac{2b}{h + \frac{1}{2} - b + \varphi_{b,1}(0, h)} = \psi(h)$$

gesetzt wird, so daß $\psi(h)$ gerade der in (29) stehende Kettenbruch ist, einfacher schreiben kann:

$$\psi(h)\,\psi(h+1) = \frac{h+b+1}{h-b+1}.$$

Die weitere Entwicklung ist dann unter Benutzung der leicht erweislichen Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \psi(h+\nu) = 1$$

ganz analog wie vorhin im Anschluß an Formel (24); sie mag dem Leser überlassen bleiben.

Speziell für $b = \frac{1}{2}$, $h = k - \frac{1}{2}$ entsteht aus (29), wenn man zur Vermeidung der Brüche den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt:

$$(30)\qquad 1 + \frac{2\,|}{|4k-1} + \frac{1\cdot 3\,|}{|4k} + \frac{3\cdot 5\,|}{|4k} + \frac{5\cdot 7\,|}{|4k} + \cdots = \frac{k}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)^2} \quad (k>0).$$

Hieraus schließlich für $k = 2n$ und $k = 2n-1$:

$$(30\text{a})\begin{cases} 1 + \dfrac{2\,|}{|8n-1} + \dfrac{1\cdot 3\,|}{|8n} + \dfrac{3\cdot 5\,|}{|8n} + \dfrac{5\cdot 7\,|}{|8n} + \dfrac{7\cdot 9\,|}{|8n} + \cdots \\ \qquad = \left(\dfrac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\right)^2 \dfrac{1}{n\pi} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\ 1 + \dfrac{2\,|}{|8n-5} + \dfrac{1\cdot 3\,|}{|8n-4} + \dfrac{3\cdot 5\,|}{|8n-4} + \dfrac{5\cdot 7\,|}{|8n-4} + \dfrac{7\cdot 9\,|}{|8n-4} + \cdots \\ \qquad = \left(\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2 \dfrac{2n^2\pi}{2n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

Diese beiden Formeln stehen für kleine n bereits bei *Euler* 2.

C. Aus der allgemeinen Formel (22) folgt, indem man für h der Reihe nach die Werte $h, h+c, h+2c, \ldots h+(\nu-1)c$ einsetzt, die endliche Kettenbruchentwicklung

$$(31)\left\{\begin{aligned}&\varphi_{b,c}(a,h)=a+\frac{c}{2}+\frac{(h+b+c)(h-b+c)\mid}{\mid 2a+c}+\frac{(h+b+2c)(h-b+2c)\mid}{\mid 2a+c}+\cdots\\&\qquad+\frac{(h+b+(\nu-1)c)(h-b+(\nu-1)c)\mid}{\mid 2a+c}+\frac{(h+b+\nu c)(h-b+\nu c)\mid}{\mid a+\frac{c}{2}+\varphi_{b,c}(a,h+\nu c)}\\&\text{für}\quad c\geqq 0,\ h>-\frac{c}{2},\quad a+c\geqq 0,\quad (a+c)^2>b^2>-\infty.\end{aligned}\right.$$

Ist nun etwa $h=\pm b-\nu c$, so lehrt diese Formel den Wert des **unendlichen Kettenbruches** $\varphi_{b,c}(a,\pm b-\nu c)$ in Gestalt eines **endlichen Kettenbruches** zu berechnen. Andernfalls wollen wir noch

$$a>-\frac{c}{2},\quad (h+c)^2>b^2$$

voraussetzen. Dann hat auch der Kettenbruch

$$\varphi_{b,c}(h,a)=a+\frac{c}{2}+\frac{(h+b+c)(h-b+c)\mid}{\mid 2a+c}+\frac{(h+b+2c)(h-b+2c\mid}{\mid 2a+c}+\cdots$$

lauter positive Elemente. Bezeichnet man seine Näherungszähler und -Nenner für den Augenblick mit A_ν und B_ν, so besagt die Formel (31) soviel wie:

$$\varphi_{b,c}(a,h)=\frac{\left[a+\frac{c}{2}+\varphi_{b,c}(a,h+\nu c)\right]A_{\nu-1}+(h+b+\nu c)(h-b+\nu c)A_{\nu-2}}{\left[a+\frac{c}{2}+\varphi_{b,c}(a,h+\nu c)\right]B_{\nu-1}+(h+b+\nu c)(h-b+\nu c)B_{\nu-2}}.$$

Somit liegt $\varphi_{b,c}(a,h)$ zwischen $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ und $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$, also zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen von $\varphi_{b,c}(h,a)$. Es muß also notwendig $\varphi_{b,c}(a,h)=\varphi_{b,c}(h,a)$ sein; oder wenn man die Kettenbrüche einsetzt:

$$(32)\left\{\begin{aligned}&h+\frac{c}{2}+\frac{(a+b+c)(a-b+c)\mid}{\mid 2h+c}+\frac{(a+b+2c)(a-b+2c)\mid}{\mid 2h+c}+\\&\qquad\qquad+\frac{(a+b+3c)(a-b+3c)\mid}{\mid 2h+c}+\cdots\\&=a+\frac{c}{2}+\frac{(h+b+c)(h-b+c)\mid}{\mid 2a+c}+\frac{(h+b+2c)(h-b+2c)\mid}{\mid 2a+c}+\\&\qquad\qquad+\frac{(h+b+3c)(h-b+3c)\mid}{\mid 2a+c}+\cdots\end{aligned}\right.$$

wenn $c\geqq 0$, und beide Kettenbrüche positive Elemente haben (b reell oder rein imaginär.

Beispielsweise ist nach § 45, Formel (8) für $x = 1$:

$$\frac{1}{2} + \frac{(m+1)^2|}{|\,1} + \frac{(m+2)^2|}{|\,1} + \frac{(m+3)^2|}{|\,1} + \cdots = \frac{1}{\int\limits_0^1 \frac{t^m\,dt}{1+t}} - m - \frac{1}{2},$$

sofern $m > -1$ ist. Hierauf darf, wenn sogar $m > -\frac{1}{2}$ ist, die Formel (32) angewandt werden mit $a = m$, $b = 0$, $c = 1$, $h = 0$. Man gewinnt dadurch die neue Formel:

$$(33)\qquad \begin{cases} \int\limits_0^1 \frac{t^m\,dt}{1+t} = \frac{1\,|}{|\,2m+1} + \frac{1\,|}{|\,2m+1} + \frac{4\,|}{|\,2m+1} + \frac{9\,|}{|\,2m+1} + \cdots \\ \qquad\qquad \text{für } 2m+1 > 0, \end{cases}$$

die sich auch zur numerischen Berechnung des Integrals eignet, namentlich für größere Werte von m. Zur Beurteilung der erzielten Genauigkeit dient dabei die aus Satz 11 des nächsten Kapitels zu erschließende Tatsache, daß der Wert eines konvergenten Kettenbruches mit lauter positiven Elementen immer zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen liegt.

Siebentes Kapitel.

Kriterien für Konvergenz und Divergenz.

§ 48. Bedingte und unbedingte Konvergenz.

I. Wenn eine unendliche Reihe konvergiert, so bleibt sie konvergent, wenn beliebig viele Anfangsglieder weggelassen werden; ebenso ist es bei Produkten, im allgemeinen aber nicht bei Kettenbrüchen (*Stern* **1**). Dieser Umstand gibt Veranlassung zu folgender

Definition. *Ein konvergenter Kettenbruch mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern*

(1) $$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

heißt ***unbedingt konvergent****, wenn er nach Weglassung beliebig vieler Anfangselemente konvergent bleibt, wenn also die Kettenbrüche*

$$b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

sämtlich konvergieren. Andernfalls heißt die Konvergenz ***bedingt****.* (*Pringsheim* **1**.)

Um zu untersuchen, ob und unter welchen Umständen die Konvergenz eines Kettenbruches eine nur bedingte sein kann, gehen wir aus von der Formel (32), Kap. I:

(2) $$(-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda B_{\nu-1,\lambda} = A_{\nu+\lambda-1} B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1} B_{\nu+\lambda-1}.$$

Ersetzt man hier ν, λ durch $\nu + 1$, $\lambda - 1$ und berücksichtigt, daß $B_{\nu,\lambda-1} = A_{\nu-1,\lambda}$ ist, so kommt

(3) $$(-1)^{\lambda-2} a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} = A_{\nu+\lambda-1} B_{\lambda-2} - A_{\lambda-2} B_{\nu+\lambda-1}.$$

Wenn nun der Kettenbruch (1) konvergiert und etwa den Wert ξ_0 hat, so folgt aus (2) und (3) sogleich

(4) $$(-1)^{\lambda-1} a_1 a_2 \ldots a_\lambda \lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu+\lambda-1}} = B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1},$$

(5) $$(-1)^{\lambda-2} a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu+\lambda-1}} = B_{\lambda-2}\xi_0 - A_{\lambda-2}.$$

Es existieren also jedenfalls die links stehenden Grenzwerte. Wenn nun $B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1} \neq 0$, so kann man Gleichung (5) durch (4) dividieren und erhält:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}} = -a_\lambda \frac{B_{\lambda-2}\xi_0 - A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1}},$$

so daß also auch der Kettenbruch

$$(6) \qquad b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots$$

konvergiert. Wenn dagegen $B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1} = 0$, so muß notwendig $B_{\lambda-2}\xi_0 - A_{\lambda-2} \neq 0$ sein, weil ja

$$(7) \qquad A_{\lambda-1}B_{\lambda-2} - A_{\lambda-2}B_{\lambda-1} = (-1)^{\lambda-2}a_1 a_2 \ldots a_{\lambda-1} \neq 0$$

ist. Man kann daher diesmal (4) durch (5) dividieren und erhält

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu-1,\lambda}}{A_{\nu-1,\lambda}} = 0.$$

Infolgedessen hat jetzt der Quotient $\frac{A_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu-1,\lambda}}$ keinen endlichen Grenzwert, d. h. der Kettenbruch (6) divergiert. Daraus ersieht man, daß (6) dann und nur dann divergiert, wenn $B_{\lambda-1}\xi_0 - A_{\lambda-1} = 0$ ist. Alsdann ist aber $B_{\lambda-1} \neq 0$, weil sonst zugleich $B_{\lambda-1}$ und $A_{\lambda-1}$ verschwinden würde, was wegen (7) nicht möglich ist. Es ist daher auch $\xi_0 = \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}$; d. h. der Wert des Kettenbruches (1) ist seinem Näherungsbruch $(\lambda - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung gleich. Somit ergibt sich

Satz 1. *Ein konvergenter Kettenbruch mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern ist unbedingt konvergent, wenn sein Wert keinem seiner Näherungsbrüche gleich ist; andernfalls ist er nur bedingt konvergent.* (*Pringsheim* 1.)

Übrigens besteht auch für endliche Kettenbrüche ein ganz analoger Satz, dessen Formulierung wir übergehen können.

Beispiel. Es ist

$$1 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots = 0,$$

da hier, wie man durch vollständige Induktion sogleich ersieht, $A_\nu = 1$, $B_\nu = \nu + 1$ ist. Ferner ist offenbar

$$1 = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|0},$$

also nach Satz 1, Kap. I auch:

$$1 = 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots.$$

Dieser Kettenbruch ist also konvergent; aber da er seinem Näherungsbruch nullter Ordnung gleich ist, kann er nur bedingt konvergieren. In der Tat ist auch

$$1 + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

divergent, da hier, wie man wieder durch vollständige Induktion erkennt, $A_\nu = \nu + 1$, $B_\nu = 1$ ist.

Aus unseren Untersuchungen geht hervor, daß, wenn der Kettenbruch (1) konvergiert, dann der Kettenbruch (6) höchstens in der Weise divergieren kann, daß die reziproken Werte seiner Näherungsbrüche gegen Null konvergieren. Er ist also nach der in § 8, II festgesetzten Benennung „unwesentlich divergent". Es empfiehlt sich für das folgende, die konvergenten und unwesentlich divergenten Kettenbrüche zu einem Begriff zusammenzufassen; wir wollen sie als „konvergent im weiteren Sinne" bezeichnen. Doch soll, wenn nur von Konvergenz ohne näheren Zusatz die Rede ist, stets wirkliche Konvergenz (im engeren Sinne) gemeint sein. Wir können dann sagen, daß ein konvergenter Kettenbruch nach Weglassen beliebig vieler Anfangselemente noch mindestens im weiteren Sinne konvergent bleibt.

II. Während bei den unendlichen Reihen und Produkten die Konvergenz durch die ersten Glieder nicht beeinflußt wird, sondern nur von dem infinitären Verhalten der Glieder abhängt, ist dies bei den Kettenbrüchen nicht der Fall. Durch das Anfangsglied b_0 allerdings kann die Konvergenz, wie man augenblicklich sieht, nicht beeinflußt werden, wohl aber durch irgendein anderes Glied. So sahen wir z. B. schon, daß von den beiden Kettenbrüchen

$$1 - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots, \quad 1 + \frac{1|}{|1} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \frac{1|}{|2} - \cdots$$

der erste konvergiert, der zweite divergiert, obwohl sie sich nur in dem Glied $\frac{a_1|}{|b_1}$ unterscheiden. Dagegen beweisen wir jetzt

Satz 2. *Bei unendlichen Kettenbrüchen mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern hängt die „Konvergenz im weiteren Sinne" nur von dem infinitären Verhalten der Elemente ab.*

In der Tat brauchen wir dazu offenbar nur zu zeigen, daß, wenn von den beiden Kettenbrüchen

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots, \tag{8}$$

$$b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots \tag{9}$$

der eine mindestens im weiteren Sinne konvergiert, vom anderen das gleiche gilt. Denn daraus folgt dann, daß die Konvergenz im weiteren

Sinne nicht beeinflußt wird, wenn man vorne einen Teilbruch wegläßt oder hinzufügt, so daß dann auch das Weglassen oder Hinzufügen beliebig vieler Teilbrüche ohne Einfluß ist.

Nun sind die Näherungsbrüche ν^{ter} bzw. $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von (8) und (9) bzw. $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, $\frac{A_{\nu-1,1}}{B_{\nu-1,1}}$. Da aber nach Kap. I, Formel (27)

$$(10) \qquad \begin{cases} A_\nu = b_0 A_{\nu-1,1} + a_1 B_{\nu-1,1}, \\ B_\nu = A_{\nu-1,1} \end{cases}$$

ist, so ersieht man leicht wegen $a_1 \neq 0$, daß, wenn mindestens einer der beiden Grenzwerte $\lim \frac{A_\nu}{B_\nu}$, $\lim \frac{B_\nu}{A_\nu}$ existiert, dann gewiß auch von den Grenzwerten $\lim \frac{A_{\nu-1,1}}{B_{\nu-1,1}}$, $\lim \frac{B_{\nu-1,1}}{A_{\nu-1,1}}$ mindestens einer existiert, und umgekehrt. W. z. b. w.

Weiter ersehen wir aus (10), daß nicht gleichzeitig

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu-1,1}}{A_{\nu-1,1}} = 0$$

sein kann; vielmehr folgt aus der zweiten dieser Gleichungen stets $\lim \frac{A_\nu}{B_\nu} = b_0$, so daß die erste nicht bestehen kann. Dies ergibt

Satz 3. *Wenn einer der beiden Kettenbrüche*

$$\begin{aligned} &b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \\ &b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots \end{aligned} \qquad (a_\nu \neq 0)$$

mindestens im weiteren Sinne konvergiert (was dann nach Satz 2 sogar von beiden gilt), so ist wenigstens einer von ihnen auch im engeren Sinne konvergent.

§ 49. Divergenzkriterien von Broman und Stern.

I. Hat ein Kettenbruch unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche, so ist er divergent. Hieraus folgt insbesondere

Satz 4. *Der Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|0} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|0} + \frac{a_4|}{|b_4} + \frac{a_5|}{|0} + \frac{a_6|}{|b_6} + \frac{a_7|}{|0} + \cdots$$

ist stets divergent. (*Broman* 1.)

In der Tat ist hier $b_{2\nu+1} = 0$ für alle $\nu \geqq 0$; also

$$B_{2\nu+1} = b_{2\nu+1} B_{2\nu} + a_{2\nu+1} B_{2\nu-1} = a_{2\nu+1} B_{2\nu-1} = a_{2\nu+1} a_{2\nu-1} \cdots a_5 a_3 B_1 = 0;$$

daher die Näherungsbrüche ungerader Ordnung alle sinnlos.

Hat ein Kettenbruch gar keine sinnlosen Näherungsbrüche, so gestattet die Äquivalenz (2) des § 45, die Konvergenzfrage auf die analoge Frage für eine unendliche Reihe zurückzuführen. Dasselbe erweist sich aber durch eine geringe Modifikation auch möglich, wenn nur eine endliche Anzahl sinnloser Näherungsbrüche vorhanden ist, sodaß deren Ordnung kleiner als eine endliche Zahl n ist. In der Tat ist dann für $\nu > n$:

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_n}{B_n} + \left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right) + \left(\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\right) + \cdots + \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right)$$

$$= \frac{A_n}{B_n} + (-1)^n \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{B_n B_{n+1}} + (-1)^{n+1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+2}}{B_{n+1} B_{n+2}} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}.$$

Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Kettenbruches ist daher die Bedingung, daß der Ausdruck

$$(-1)^{\nu-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}$$

für genügend große ν existiert und das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe ist. Sind speziell alle Teilzähler gleich 1, so muß also insbesondere

$$\lim_{\nu=\infty} |B_{\nu-1} B_\nu| = \infty \tag{1}$$

sein. Nun lehrt aber die für $a_\nu = 1$ spezialisierte Euler-Mindingsche Formel (§ 3)

$$B_\nu = b_1 b_2 \cdots b_\nu \left(1 + \sum_i^{1,\nu-1} \frac{1}{b_i b_{i+1}} + \sum_{i<k}^{1,\nu-2} \frac{1}{b_i b_{i+1}} \frac{1}{b_{k+1} b_{k+2}} + \cdots\right),$$

daß B_ν nur solche Glieder enthält, welche in dem Produkt

$$b_1 b_2 \cdots b_\nu \left(1 + \frac{1}{b_1}\right)\left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_\nu}\right) = (1 + b_1)(1 + b_2) \cdots (1 + b_\nu)$$

vorkommen, und folglich ist

$$|B_\nu| \leqq (1 + |b_1|)(1 + |b_2|) \cdots (1 + |b_\nu|), \tag{2}$$

wie übrigens auch leicht mittels der Rekursionsformel für B_ν bewiesen werden kann. Wenn daher das unendliche Produkt $\Pi(1 + |b_\nu|)$ kon-

vergiert, so bleiben die $|B_\nu|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke, und die Bedingung (1) ist nicht erfüllt; also divergiert der Kettenbruch. Er ist aber nicht einmal im weiteren Sinne konvergent; denn der reziproke Kettenbruch

$$\frac{1|}{|b_0} + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

ist ja aus dem gleichen Grunde divergent. Da die Konvergenz des Produktes $\Pi(1+|b_\nu|)$ bekanntlich die der Reihe $\Sigma|b_\nu|$ nach sich zieht, und umgekehrt, ergibt sich

Satz 5. *Wenn die Reihe $\Sigma|b_\nu|$ konvergiert, so ist der Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

divergent und nicht einmal im weiteren Sinne konvergent. (*Stern* **1**, *Stolz* **1**.)

II. Wir setzen jetzt $\Sigma|b_\nu|$ immer noch als konvergent voraus; dann bleibt, wie wir sahen, $|B_\nu|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke. Das gleiche gilt aber auch von $|A_\nu|$, da man analog zu (2) leicht erkennt:

$$|A_\nu| \leqq (1+|b_0|)(1+|b_1|)\cdots(1+|b_\nu|).$$

Demgemäß werden auch die beiden Reihen

$$\sum b_\nu A_{\nu-1}, \quad \sum b_\nu B_{\nu-1} \tag{3}$$

absolut konvergieren. Nun ist aber

$$A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + A_{\nu-2},$$

woraus sogleich folgt:

$$A_{2\nu} = A_0 + b_2 A_1 + b_4 A_3 + \cdots + b_{2\nu} A_{2\nu-1},$$
$$A_{2\nu+1} = A_1 + b_3 A_2 + b_5 A_4 + \cdots + b_{2\nu+1} A_{2\nu},$$

und analog für die B_ν. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihen (3) werden also die vier Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} A_{2\nu} = \mathsf{A}_0, \quad \lim_{\nu=\infty} A_{2\nu+1} = \mathsf{A}_1, \quad \lim_{\nu=\infty} B_{2\nu} = \mathsf{B}_0, \quad \lim_{\nu=\infty} B_{2\nu+1} = \mathsf{B}_1 \tag{4}$$

existieren. Aus der Relation $A_{2\nu+1}B_{2\nu} - A_{2\nu}B_{2\nu+1} = 1$ folgt dann weiter

$$\mathsf{A}_1\mathsf{B}_0 - \mathsf{A}_0\mathsf{B}_1 = 1, \tag{5}$$

und man erhält somit

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 existieren, wenn mit A_ν, B_ν die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung bezeichnet werden, die vier Grenzwerte*

$$\lim_{\nu=\infty} A_{2\nu} = \mathsf{A}_0, \quad \lim_{\nu=\infty} A_{2\nu+1} = \mathsf{A}_1, \quad \lim_{\nu=\infty} B_{2\nu} = \mathsf{B}_0, \quad \lim_{\nu=\infty} B_{2\nu+1} = \mathsf{B}_1,$$

und es ist $\mathsf{A}_1\mathsf{B}_0 - \mathsf{A}_0\mathsf{B}_1 = 1$. (*von Koch* **1**, **2**.)

Wegen (5) können B_0, B_1 nicht beide verschwinden; daher existiert mindestens einer der beiden Grenzwerte

$$(6) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = \frac{A_0}{B_0}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} = \frac{A_1}{B_1},$$

sie sind aber wegen (5) (oder auch nach Satz 5) voneinander verschieden. Ist $B_0 = 0$, so ist nach (5) $A_0 \neq 0$, also existiert immer noch der Grenzwert $\lim_{\nu=\infty} \frac{B_{2\nu}}{A_{2\nu}}$; analog, wenn $B_1 = 0$ ist. Wir haben aber in den Formeln (7) und (8) des § 43 die kontrahierten Kettenbrüche angegeben, deren Näherungsbrüche die $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$, bzw. $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ sind; es ist dort nur $a_\nu = 1$ zu setzen. So ergibt sich

Satz 7. *Wenn die Reihe $\Sigma|b_\nu|$ konvergiert ($b_\nu \neq 0$), so sind die beiden Kettenbrüche*

$$b_0 + \frac{b_2|}{|b_1 b_2 + 1} - \frac{b_4|}{|b_2 b_3 b_4 + b_2 + b_4} - \frac{b_2 b_6|}{|b_4 b_5 b_6 + b_4 + b_6} - \frac{b_4 b_8|}{|b_6 b_7 b_8 + b_6 + b_8} - \cdots,$$

$$\frac{b_0 b_1 + 1}{b_1} - \frac{\frac{b_3}{b_1}\Big|}{|b_1 b_2 b_3 + b_1 + b_3} - \frac{b_1 b_5|}{|b_3 b_4 b_5 + b_3 + b_5} - \frac{b_3 b_7|}{|b_5 b_6 b_7 + b_5 + b_7} + \cdots$$

mindestens im weiteren Sinne konvergent; wenigstens einer von ihnen konvergiert sogar im engeren Sinne; aber niemals haben beide den gleichen Wert.

Beispiel: Der Kettenbruch

$$1 + \frac{1|}{|b} + \frac{1|}{|b^2} + \frac{1|}{|b^3} + \frac{1|}{|b^4} + \cdots$$

ist für $|b| < 1$ divergent, auch nicht im weiteren Sinne konvergent. Die kontrahierten Kettenbrüche sind hier, wenn man noch zu äquivalenten übergeht und die ersten Glieder etwas modifiziert, die folgenden:

$$\frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^3} - \frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^7} - \frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^{11}} - \frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^{15}} - \cdots,$$

$$\frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^5} - \frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^9} - \frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^{13}} - \frac{b^2|}{|1 + b^2 + b^{17}} - \cdots.$$

Diese sind also für $0 < |b| < 1$ mindestens im weiteren Sinne konvergent, weil ja darauf die Modifikation der Anfangselemente nach Satz 2 keinen Einfluß hat.

§ 50. Konvergenz bei positiven Elementen.

I. **Satz 8.** *Wenn die Teilnenner des Kettenbruches*

$$b_0 + \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

alle positiv sind, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches darin, daß die Reihe Σb_ν divergiert. (*Seidel* **1**, *Stern* **3**.)

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung haben wir bereits in Satz 5 erkannt; es ist also nur zu zeigen, daß sie hinreicht. Nun sind offenbar alle Näherungsnenner B_ν positiv, so daß

$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} > B_{\nu-2}$$

wird. Die dem Kettenbruch äquivalente Reihe

$$\frac{A_0}{B_0} + \frac{1}{B_0 B_1} - \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1}{B_2 B_3} - \frac{1}{B_3 B_4} + - \cdots$$

hat also alternierende Vorzeichen und die absoluten Werte ihrer Glieder nehmen monoton ab. Nach einem bekannten Satz der Reihenlehre ist also nur zu zeigen, daß die Glieder den Grenzwert Null haben, daß also

$$\lim_{\nu=\infty} B_{\nu-1} B_\nu = \infty \tag{1}$$

ist. Nun lehrt aber die Euler-Mindingsche Formel (§ 3), für gerade und ungerade Indizes getrennt angewandt, leicht, daß $B_{2\nu}$ die Glieder $b_1 b_2 + b_1 b_4 + \cdots + b_1 b_{2\nu}$ enthält, und $B_{2\nu+1}$ die Glieder $b_1 + b_3 + \cdots + b_{2\nu+1}$, wie man übrigens ebenso leicht auch durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ aus der Rekursionsformel für die B_ν ersieht; es ist daher

$$B_{2\nu} > b_1(b_2 + b_4 + b_6 + \cdots + b_{2\nu}) \tag{2}$$

$$B_{2\nu+1} > b_1 + b_3 + b_5 + \cdots + b_{2\nu+1}. \tag{3}$$

Wenn also die Reihe Σb_ν divergiert, so wird von den monoton wachsenden Zahlenfolgen $B_{2\nu}$, $B_{2\nu+1}$ mindestens eine ins Unendliche wachsen, so daß die Bedingung (1) in der Tat erfüllt ist. W. z. b. w.

Sind die Teilzähler nicht alle 1, sondern beliebige positive Zahlen, so kann man durch die Transformation § 42, II, C zu einem äquivalenten Kettenbruch übergehen mit den Teilzählern 1, und aus dem vorigen Kriterium ergibt sich dann

Satz 9. *Hat der Kettenbruch*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

lauter positive Elemente, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für seine Konvergenz darin, daß wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum_\nu \frac{a_1 a_3 \dots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2\nu}} b_{2\nu}, \quad \sum_\nu \frac{a_2 a_4 \dots a_{2\nu}}{a_3 a_5 \dots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}$$

divergiert. (*Seidel* **1**, *Stern* **3**.)

Wir machen hierzu folgenden

Zusatz. *Die Sätze 8 und 9 bleiben auch dann richtig, wenn für die Teilnenner die Null zugelassen wird, sofern nur nicht alle $b_{2\nu+1}$ gleich Null sind.* (*Broman* **1**.) (Vgl. Satz 4.)

Beim Beweis können wir uns offenbar wieder auf den Fall beschränken, daß die Teilzähler gleich 1 sind. Ist dann etwa b_{2n+1} die erste nicht verschwindende unter den Zahlen $b_1, b_3, b_5, \dots$, so kann man aus der Euler-Mindingschen Formel als Ersatz für die Ungleichungen (2), (3) die folgenden entnehmen:

$$\left.\begin{aligned} B_{2\nu} &\geqq 1 + b_{2n+1}(b_{2n+2} + b_{2n+4} + \dots + b_{2\nu}) \\ B_{2\nu+1} &\geqq b_{2n+1} + b_{2n+3} + \dots + b_{2\nu+1} \end{aligned}\right\} \text{ für } \nu > n,$$

woran sich die gleichen Folgerungen knüpfen wie oben.

II. Die Anwendung von Satz 9 ist vielfach etwas unbequem. Man kann aber daraus bequemere Bedingungen herleiten, welche für die Konvergenz wenigstens hinreichen. Sind nämlich u_ν, v_ν reelle Zahlen $\geqq 0$, so ist

$$\sqrt{u_\nu v_\nu} \leqq \frac{u_\nu + v_\nu}{2}.$$

Wenn also die Reihe $\Sigma \sqrt{u_\nu v_\nu}$ divergiert, so wird mindestens eine der beiden Reihen Σu_ν, Σv_ν ebenfalls divergieren müssen. Wendet man dies auf die beiden in Satz 9 vorkommenden Reihen in der Weise an, daß man zuerst

$$u_\nu = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2\nu}} b_{2\nu}, \quad v_\nu = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \dots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1}, \text{ also } u_\nu v_\nu = \frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}};$$

sodann auch

$$u_\nu = \frac{a_1 a_3 \dots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \dots a_{2\nu}} b_{2\nu}, \quad v_\nu = \frac{a_2 a_4 \dots a_{2\nu-2}}{a_1 a_3 \dots a_{2\nu-1}} b_{2\nu-1}, \text{ also } u_\nu v_\nu = \frac{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}{a_{2\nu}}$$

setzt, so ergibt sich, daß sowohl die Divergenz der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}}$, als auch der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}{a_{2\nu}}}$ für die Konvergenz des Kettenbruches ausreicht. Daher kommt

Satz 10. *Der Kettenbruch mit lauter positiven Elementen*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

wobei aber auch $b_\nu = 0$ *zulässig ist, ist sicher konvergent, wenn die Reihe* $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ *divergiert.* (*Pringsheim* 2.)

Die Bedingung, daß nicht alle b mit ungeradem Index verschwinden, konnte bei der Formulierung des Satzes weggelassen werden, weil ihr Erfülltsein durch die Divergenz der Reihe eo ipso garantiert wird.

Beispiel 1. Bei dem Kettenbruch (17) Seite 209 ist $b_\nu = 1$ und unendlich oft auch $a_\nu = 1$; nach Satz 10 ist der Kettenbruch also konvergent, womit die früher gelassene Lücke ausgefüllt ist.

Beispiel 2. Bei dem Kettenbruch

$$\frac{1^n|}{|b} + \frac{2^n|}{|b} + \frac{3^n|}{|b} + \frac{4^n|}{|b} + \cdots \qquad b > 0$$

ist $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}} = \sum \frac{b}{\sqrt{(\nu+1)^n}}$. Für $n \leqq 2$ divergiert die Reihe, also konvergiert der Kettenbruch. Für $n > 2$ konvergiert die Reihe, also versagt Satz 10. Nach Satz 9 sind dann die beiden Reihen zu untersuchen:

$$\sum \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}{2 \cdot 4 \cdots 2\nu}\right)^n, \quad \sum \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots 2\nu}{3 \cdot 5 \cdots (2\nu + 1)}\right)^n.$$

Von diesen hat die zweite offenbar größere Glieder als die erste; ihr allgemeines Glied ist aber

$$\left(\frac{2 \cdot 4 \cdots 2\nu}{3 \cdot 5 \cdots (2\nu+1)}\right)^n = \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2\nu}{2\nu - 1} \cdot \frac{2\nu}{2\nu + 1} \cdot \frac{1}{2\nu + 1}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2\nu + 1}\right)^{\frac{n}{2}},$$

so daß für $n > 2$ beide Reihen konvergieren. Der Kettenbruch ist dann also divergent.

III. Wir wollen noch eine andere Klasse von hinreichenden Konvergenzbedingungen herleiten; dabei stützen wir uns auf den folgenden

Satz 11. *Bei einem Kettenbruch mit lauter positiven Elementen nähern sich die Näherungsbrüche gerader Ordnung monoton wachsend einem Grenzwert* k, *die ungerader Ordnung monoton abnehmend einem Grenzwert* K, *und es ist* $0 < k \leqq K$.

In der Tat ist ja

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

$$\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu b_{\nu+1}}{B_{\nu-1} B_{\nu+1}},$$

woraus, da die Elemente positiv sind, sofort die Ungleichungen folgen:

$$0 < \frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}} < \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} < \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} < \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}.$$

Da aber eine monoton wachsende (abnehmende) Folge von Zahlen, die unter (über) einer Schranke bleiben, einen Grenzwert hat, so folgt hieraus sogleich die Behauptung. Ebenso ergibt sich der

Zusatz. *Wenn für die Teilnenner auch die Null zugelassen wird, wobei jedoch nicht alle $b_{2\nu+1}$ verschwinden dürfen, so bleibt die Aussage von Satz 11 bestehen; nur ist dann möglicherweise eine endliche Anzahl sinnloser Näherungsbrüche vorhanden.*

Offenbar wird der Kettenbruch konvergent oder wesentlich divergent sein, je nachdem $k = K$ oder $k < K$ ist. Betrachten wir nun die folgende Reihe:

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1}\left(\frac{A_{2\lambda+\nu-1}}{B_{2\lambda+\nu-1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right)}{(-1)^{\nu}\left(\frac{A_{2\lambda+\nu-1}}{B_{2\lambda+\nu-1}} - \frac{A_{\nu}}{B_{\nu}}\right)} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nach Satz 11 sind alle Zähler und Nenner positiv; die Nenner bleiben größer als $K - k$, und die Reihe der Zähler konvergiert. Wenn daher die Reihe (4) selbst divergiert, so kann $K - k$ nicht positiv sein, d. h. der Kettenbruch konvergiert. Die Reihe (4) geht aber, wenn man auf die Zähler und Nenner die Formel (33), Kap. I anwendet und berücksichtigt, daß $B_{2\lambda-1,\nu} = A_{2\lambda-2,\nu+1}$ ist, über in

$$(5) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{2\lambda-2,\nu+1}}{B_{2\lambda-2,\nu+1}} \cdot \frac{B_{\nu}}{a_{\nu+1}B_{\nu-1}}.$$

Wenn also diese Reihe divergiert, so muß der Kettenbruch konvergieren. Da $B_\nu > b_\nu B_{\nu-1}$ ist, so ergibt sich a fortiori, wenn man noch $\lambda + 1$ an Stelle von λ schreibt:

Satz 12. *Ein Kettenbruch* $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$ *mit lauter positiven Elementen ist sicher konvergent, wenn die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{2\lambda,\nu+1}}{B_{2\lambda,\nu+1}} \cdot \frac{b_\nu}{a_{\nu+1}} \quad \textit{(Bezeichnung von § 5, II)}$$

für irgendeinen Wert von $\lambda (= 0, 1, 2, \ldots)$ *divergiert.*

Wendet man Satz 11 an auf den Kettenbruch

$$b_{\nu+1} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \frac{a_{\nu+3}|}{|b_{\nu+3}} + \cdots,$$

so ergibt sich unter anderm:

$$\frac{A_{0,\nu+1}}{B_{0,\nu+1}} < \frac{A_{2,\nu+1}}{B_{2,\nu+1}} < \frac{A_{4,\nu+1}}{B_{4,\nu+1}} < \cdots;$$

dies besagt, daß das Kriterium von Satz 12 um so schärfer ist, je größer man λ wählt. Der Kettenbruch wird nach Satz 12 insbesondere konvergieren, wenn

$$\limsup_{\nu=\infty} \frac{A_{2\lambda,\nu+1}}{B_{2\lambda,\nu+1}} \frac{b_\nu}{a_{\nu+1}} > 0,$$

und auch hier erhält man für wachsende λ eine Skala immer schärferer Kriterien (*Perron* 1). Für $\lambda = 0$ kommt die Divergenz der Reihe $\sum \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$; dieses Kriterium ist weniger scharf wie das von Satz 10. Für $\lambda = 1$ kommt die Reihe

$$\sum_\nu \frac{b_{\nu+3}(b_{\nu+1}b_{\nu+2} + a_{\nu+2}) + b_{\nu+1}a_{\nu+3}}{b_{\nu+2}b_{\nu+3} + a_{\nu+3}} \frac{b_\nu}{a_{\nu+1}}.$$

Diese divergiert beispielsweise für

$$a_{2\nu} = 1, \qquad a_{2\nu-1} = g^{2\nu-1}$$
$$b_{2\nu} = g^{-\nu}, \quad b_{2\nu-1} = g^{-\nu} \qquad (g>1),$$

so daß der Kettenbruch mit diesen Elementen konvergiert, während das Kriterium von Satz 10 versagt.

Für $\nu \geqq 2$ ist auch

$$\frac{B_\nu}{B_{\nu-1}} > \frac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_{\nu-1}} = \frac{a_\nu B_{\nu-2}}{b_{\nu-1}B_{\nu-2} + a_{\nu-1}B_{\nu-3}} = \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} + a_{\nu-1}\frac{B_{\nu-3}}{B_{\nu-2}}} \geqq \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} + \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-2}}},$$

so daß sich, da die Divergenz von (5) hinreicht, a fortiori ergibt:

Satz 13. *Ein Kettenbruch* $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$ *mit lauter positiven Elementen ist sicher konvergent, wenn die Reihe*

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{A_{2\lambda,\nu+1}}{B_{2\lambda,\nu+1}} \frac{a_\nu b_{\nu-2}}{a_{\nu+1}(b_{\nu-1}b_{\nu-2} + a_{\nu-1})} \qquad \text{(Bezeichnung von § 5, II)}$$

für irgendeinen Wert von $\lambda (= 0, 1, 2, \ldots)$ *divergiert.*

Beispielsweise kommt für $\lambda = 0$ die Reihe

$$\sum_\nu \frac{a_\nu b_{\nu-2} b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}(b_{\nu-1}b_{\nu-2} + a_{\nu-1})}.$$

§ 51. Konvergenz bei reellen Elementen.

I. Hat ein Kettenbruch lauter reelle Elemente, so kann man durch Multiplikatoren $c_\nu = \pm 1$ einen äquivalenten herstellen, dessen Elemente ihrem absoluten Werte nach die gleichen sind, aber alle Teilnenner $\geqq 0$. Wenn dann die Teilzähler alle positiv, so läßt sich die Konvergenz nach dem vorigen Paragraphen entscheiden. Wir wollen also jetzt annehmen, daß die Teilzähler alle oder zum Teil negativ sind. Ist nur eine endliche Anzahl negativer vorhanden, so entsteht nach Weglassung einiger Glieder ein Kettenbruch mit positiven Elementen. Ist dieser divergent, so kann er, wie sich aus Satz 11 ergibt, auch nicht im weitern Sinne konvergieren; also ist der ursprüngliche ebenfalls divergent. Ist der zweite aber konvergent, so muß der erste noch mindestens im weitern Sinne konvergieren (Satz 2).

Oft kann ein Kettenbruch der hier betrachteten Art durch Extension in einen mit lauter positiven Elementen übergeführt werden. (*Falk* 1, *Broman* 1.) Dann ist die Konvergenz des extendierten Kettenbruches für die Konvergenz des ursprünglichen jedenfalls hinreichend; es gibt aber Fälle, wie wir sehen werden, in denen sie auch notwendig ist. Wir beweisen auf diesem Weg zunächst

Satz 14. *Wenn die Elemente des Kettenbruches*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

reell sind und den Ungleichungen genügen:

$$\left.\begin{array}{l} b_\nu \geqq |a_\nu| > 0 \\ b_\nu \geqq |a_\nu| + 1 \text{ für } a_{\nu+1} < 0 \end{array}\right\} \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so ersetze man für jedes negative $a_{k+1} = -a'_{k+1}$ $(k \geqq 1)$ die Gliederfolge

$$\frac{a_k|}{|b_k} - \frac{a'_{k+1}|}{|b_{k+1}} \quad \text{durch} \quad \frac{a_k|}{|b_k - 1} + \frac{1|}{|1} + \frac{a'_{k+1}|}{|b_{k+1} - a'_{k+1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens entsteht ein Kettenbruch mit lauter positiven Teilzählern und mit lauter Teilnennern $\geqq 0$. Seine Konvergenz, die nach dem vorigen Paragraphen entschieden werden kann, ist dann hinreichend für die Konvergenz des ursprünglichen Kettenbruches, und, falls unendlich oft $a_\nu > 0$ ist, auch notwendig.[1])

Beweis. Der ursprüngliche Kettenbruch werde der Kürze halber mit K bezeichnet, der abgeänderte mit K'. Daß dann K' lauter positive

1) In etwas anderer Weise hat *Tietze* 1 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen formuliert.

Teilzähler hat, ist evident; als Teilnenner aber treten außer 1 die folgenden Zahlen auf:

$$\left.\begin{array}{r} b_k, \text{ wenn } a_k > 0,\ a_{k+1} > 0 \\ b_k - 1, \text{ wenn } a_k > 0,\ a_{k+1} < 0 \\ b_k - a_k', \text{ wenn } a_k = -a_k' < 0,\ a_{k+1} > 0 \\ b_k - a_k' - 1, \text{ wenn } a_k = -a_k' < 0,\ a_{k+1} < 0 \end{array}\right\} \quad (k \geqq 2).$$

Die Teilnenner von K' sind daher nach den Voraussetzungen unseres Satzes vom zweiten an alle $\geqq 0$. Der erste Teilnenner ist

$$\begin{array}{r} b_1, \text{ wenn } a_2 > 0 \\ b_1 - 1, \text{ wenn } a_2 < 0, \end{array}$$

also in jedem Fall sogar > 0 mit Ausschluß der Gleichheit.

Nun seien wieder A_ν, B_ν die Näherungszähler und -nenner von K. Aus K geht dann K' nach Satz 6, Kap. VI durch Extension hervor, wobei die neu hinzugekommenen Näherungsbrüche die Form haben

$$\frac{A_k - A_{k-1}}{B_k - B_{k-1}} \quad \text{für } a_{k+1} < 0.$$

Daher ist die Konvergenz von K' jedenfalls hinreichend für die von K. Sie ist aber, wenn unendlich oft $a_\nu > 0$ ist, auch notwendig. Dies ist evident, wenn von einem gewissen ν-Werte an dauernd $a_\nu > 0$ ist, weil dann die Näherungsbrüche von K' von einer gewissen Ordnung an auch Näherungsbrüche von K sind. Andernfalls aber kann man auf unendlich viele Arten einen Index k wählen derart, daß $a_k > 0$, $a_{k+1} < 0$, also nach unseren Voraussetzungen auch $b_k > 1$ ist. Wenn dann K konvergiert, also der Grenzwert

$$\xi = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu}$$

existiert, so sei ε eine beliebig kleine positive Zahl. Man kann dann k so wählen, daß

$$\xi - \varepsilon < \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} < \xi + \varepsilon; \quad \xi - \varepsilon < \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} < \xi + \varepsilon$$

und daß zugleich $a_k > 0$, $a_{k+1} < 0$, $b_k > 1$ ist. Dann kommt

$$\frac{A_k - A_{k-1}}{B_k - B_{k-1}} = \frac{(b_k - 1)A_{k-1} + a_k A_{k-2}}{(b_k - 1)B_{k-1} + a_k B_{k-2}};$$

also auch, da ja B_{k-1} und B_{k-2} als Näherungsnenner von K' nicht negativ sein können,

$$\xi - \varepsilon < \frac{A_k - A_{k-1}}{B_k - B_{k-1}} < \xi + \varepsilon.$$

Da nun die zwischen $\xi - \varepsilon$ und $\xi + \varepsilon$ liegenden Brüche $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ und $\frac{A_k - A_{k-1}}{B_k - B_{k-1}}$ zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von K' sind (siehe Satz 6, Kap. VI) und da K' lauter positive Elemente hat (allerdings einige verschwindende Teilnenner), so liegt nach Satz 11 und seinem Zusatz jeder folgende Näherungsbruch von K' erst recht zwischen $\xi - \varepsilon$ und $\xi + \varepsilon$. Also konvergiert K' gegen den Wert ξ. W. z. b. w.

Ein etwas bequemeres Kriterium ist folgendes:

Satz 15. *Wenn die Elemente des Kettenbruches*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

reell sind und den Ungleichungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} b_\nu &\geqq |a_\nu| > 0 \\ b_\nu &\geqq |a_\nu| + 1 \text{ für } a_{\nu+1} < 0 \end{aligned}\right\} \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so ist jede der folgenden zwei Bedingungen für die Konvergenz hinreichend:

1) *Von einer gewissen Stelle an sind alle a_ν negativ.* (*Stern* 1.)

2) *Von den drei Reihen*

$$\text{(A.)} \qquad \sum_{a_\nu > 0} \sqrt{a_\nu}$$

$$\text{(B.)} \qquad \sum_{a_{\nu+1} > 0} \sqrt{b_\nu - |a_\nu|}$$

$$\text{(C.)} \qquad \sum_{a_{\nu+1} < 0} \sqrt{b_\nu - |a_\nu| - 1}$$

ist wenigstens eine divergent.[1]) (*Tietze* 1, 2.)

Beweis. Man bilde wieder den extendierten Kettenbruch K'. Die Anwendung von Satz 10 auf diesen lehrt dann, daß zu seiner Konvergenz jedenfalls die Divergenz von einer der folgenden sechs Reihen ausreicht:

$$\text{(I.)} \sum_{a_\nu > 0,\, a_{\nu+1} < 0} \sqrt{b_\nu - 1}; \qquad \text{(II.)} \sum_{a_\nu < 0,\, a_{\nu+1} < 0} \sqrt{b_\nu - |a_\nu| - 1};$$

$$\text{(III.)} \sum_{a_\nu < 0,\, a_{\nu+1} > 0,\, a_{\nu+2} > 0} \sqrt{\frac{(b_\nu - |a_\nu|) b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}; \qquad \text{(IV.)} \sum_{a_\nu < 0,\, a_{\nu+1} > 0,\, a_{\nu+2} < 0} \sqrt{\frac{(b_\nu - |a_\nu|)(b_{\nu+1} - 1)}{a_{\nu+1}}};$$

$$\text{(V.)} \sum_{a_\nu > 0,\, a_{\nu+1} > 0,\, a_{\nu+2} > 0} \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}; \qquad \text{(VI.)} \sum_{a_\nu > 0,\, a_{\nu+1} > 0,\, a_{\nu+2} < 0} \sqrt{\frac{b_\nu (b_{\nu+1} - 1)}{a_{\nu+1}}}.$$

---

1) Hierin ist auch der die Konvergenz aussagende Teil von Satz 1, Kap. V wieder enthalten, weil dann entweder der Fall 1) vorliegt oder die Reihe (A.) unendlich viele Glieder hat und divergiert.

Hier ist aber nach unseren Voraussetzungen das allgemeine Glied von (I.) $\geqq \sqrt{a_\nu}$; ebenso ist das allgemeine Glied von (V.) und (VI.) $\geqq \sqrt{b_\nu} \geqq \sqrt{a_\nu}$. Durch Zusammenfassung erweist sich also gewiß die Divergenz der Reihe (A.) als ausreichend. Ferner ist das allgemeine Glied der Reihen (III.) und (IV.) $\geqq \sqrt{b_\nu - |a_\nu|}$; noch größer ist das allgemeine Glied von (V.) und (VI.); daher genügt auch die Divergenz von (B.). Endlich durch Zusammenfassung von (I.) und (II.) folgt, daß auch die Divergenz von (C.) hinreicht. Damit ist zunächst Punkt 2) bewiesen.

Um auch Punkt 1) zu erledigen, beachte man, daß in diesem Fall durch die Extension von einer gewissen Stelle an zwischen je zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche von K ein neuer eingeschaltet wird. Die Näherungsbrüche von K sind daher für K' von einer gewissen Stelle an alle von gerader oder alle von ungerader Ordnung. Sie haben also nach Satz 11 und seinem Zusatz (da ja der erste Teilnenner von K', wie wir Seite 243 sahen, sicher $\neq 0$ ist) einen endlichen Grenzwert. W. z. b. w.

II. Ein weiterer Fall, wo die Konvergenz eines extendierten Kettenbruches für die Konvergenz des ursprünglichen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist, liegt offenbar dann vor, wenn durch die Extension nur solche Näherungsbrüche neu hinzukommen die auch für den ursprünglichen Kettenbruch Näherungsbrüche von wachsender Ordnung sind. Wählt man z. B. in der Extensionsformel von Satz 6, Kap. VI für ϱ den Wert $-\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$, so ist der zwischen $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ und $\frac{A_k}{B_k}$ eingeschaltete Näherungsbruch gleich

$$\frac{A_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} A_{k-1}}{B_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}.$$

Nimmt man diese Einschaltung speziell für alle negativen a_{k+1} vor, so findet man, daß der neue Kettenbruch lauter positive Elemente (eventuell auch Teilnenner 0) hat, falls keine zwei aufeinanderfolgenden Teilzähler negativ sind, und $b_k b_{k+1} + a_{k+1} \geqq 0$ ist. Es ergibt sich daher

Satz 16. *Wenn die Elemente des Kettenbruches*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

den Ungleichungen $b_\nu \geqq 0$, $a_\nu \gtrless 0$, *und außerdem*

$$\left.\begin{array}{l} b_\nu b_{\nu+1} + a_{\nu+1} \geqq 0 \\ a_\nu > 0 \end{array}\right\} \text{für } a_{\nu+1} < 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen, so ersetze man für jedes negative $a_{k+1} = -a'_{k+1}$ die Gliederfolge $\frac{a_k|}{|b_k} - \frac{a'_{k+1}|}{|b_{k+1}}$ *durch*

$$\frac{a_k|}{\left|b_k - \frac{a'_{k+1}}{b_{k+1}}\right.} + \frac{\frac{a'_{k+1}}{b_{k+1}}\Big|}{|\;1} + \frac{b_{k+1}|}{|\;0}.$$

Die Konvergenz des so veränderten Kettenbruches, welche nach dem vorigen Paragraphen entschieden werden kann, ist dann notwendig und hinreichend für die Konvergenz des gegebenen.

Beispiel:

$$1 - \frac{(1\cdot 2)^n|}{|\;2^n} + \frac{3^n|}{|4^n} - \frac{(4\cdot 5)^n|}{|\;5^n} + \frac{6^n|}{|7^n} - \frac{(7\cdot 8)^n|}{|\;8^n} + \cdots + \frac{(3\nu)^n\;|}{|(3\nu+1)^n}$$
$$- \frac{(3\nu+1)^n(3\nu+2)^n|}{|\;(3\nu+2)^n} + \cdots.$$

Der extendierte Kettenbruch ist hier

$$0 + \frac{1^n|}{|1} + \frac{2^n|}{|0} + \frac{3^n|}{|0} + \frac{4^n|}{|1} + \frac{5^n|}{|0} + \frac{6^n|}{|0} + \frac{7^n|}{|1} + \frac{8^n|}{|0} + \frac{9^n|}{|0} + \frac{10^n|}{|\;1} + \cdots.$$

Nach Satz 9 und seinem Zusatz wird dieser und also auch der gegebene dann und nur dann konvergieren, wenn wenigstens eine der beiden Reihen

$$\sum_\nu \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(6\nu-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(6\nu-2)}\right)^n, \quad \sum_\nu \left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(6\nu)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(6\nu+1)}\right)^n$$

divergiert. Diese sind aber (vgl. Seite 239) für $n > 2$ beide konvergent. Für $n \leqq 2$ dagegen ist das allgemeine Glied der zweiten Reihe gleich

$$\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{6\nu}{6\nu-1}\,\frac{6\nu}{6\nu+1}\,\frac{6\nu+2}{6\nu+1}\,\frac{1}{6\nu+2}\right)^{\frac{n}{2}} > \left(\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{6\nu+2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

so daß die Reihe divergiert. Daher ist der Kettenbruch umgekehrt für $n > 2$ divergent, für $n \leqq 2$ konvergent.

III. **Definition.** *Ein unendlicher Kettenbruch*

$$(1)\qquad b_0 - \frac{a_1'|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3'|}{|b_3} + \cdots + \frac{a_{2\nu}|}{|b_{2\nu}} - \frac{a'_{2\nu+1}|}{|b_{2\nu+1}} + \cdots,$$

bei dem $b_\nu > 0$, $a_{2\nu} > 0$, $a'_{2\nu+1} > 0$, heißt alternierend.

Die Konvergenz eines alternierenden Kettenbruches kann mit Hilfe von Satz 16 entschieden werden, wenn $b_{2\nu} b_{2\nu+1} \geqq a'_{2\nu+1}$ ist. Wir wollen aber jetzt ein noch weiter gehendes Kriterium herleiten. Zu dem Zweck

seien $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ die Näherungsbrüche von (1). Wir bilden dann durch Kontraktion den Kettenbruch, dessen Näherungsbrüche $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ sind; nach § 43, Formel (8) ist dies der folgende:

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{b_0 b_1 - a_1'}{b_1} + \frac{a_1' a_2 \frac{b_3}{b_1}}{|(b_1 b_2 + a_2) b_3 - b_1 a_3'} + \frac{a_3' a_4 b_1 b_5}{|(b_3 b_4 + a_4) b_5 - b_3 a_5'} \\ \quad + \frac{a_5' a_6 b_3 b_7}{|(b_5 b_6 + a_6) b_7 - b_5 a_7'} + \frac{a_7' a_8 b_5 b_9}{|(b_7 b_8 + a_8) b_9 - b_7 a_9'} + \cdots; \end{cases}$$

seine Teilnenner sind $\geqq 0$, wenn

$$(3)\qquad (b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1} a'_{2\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Wir wollen (3) als erfüllt voraussetzen. Weil der Kettenbruch (2) durch Kontraktion aus (1) entsteht, so ist die Konvergenz von (2) jedenfalls notwendig für die Konvergenz von (1); wir zeigen jetzt, daß sie zufolge der Voraussetzung (3) auch hinreicht. In der Tat, wenn (2) konvergiert, so besagt dies, daß der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ existiert. Nun beachte man, daß $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ aus $\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}$ hervorgeht, indem $a'_{2\nu+1}$ durch Null ersetzt wird. Es ist also

$$\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = \frac{b_0 b_1 - a_1'}{b_1} + \frac{a_1' a_2 \frac{b_3}{b_1}}{|(b_1 b_2 + a_2) b_3 - b_1 a_3'} + \cdots$$
$$+ \frac{a'_{2\nu-3} a_{2\nu-2} b_{2\nu-5} b_{2\nu-1}}{|(b_{2\nu-3} b_{2\nu-2} + a_{2\nu-2}) b_{2\nu-1} - b_{2\nu-3} a'_{2\nu-1}} + \frac{a'_{2\nu-1} a_{2\nu} b_{2\nu-3} b_{2\nu+1}}{|(b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1}}.$$

Da dieser Kettenbruch lauter positive Elemente hat, nur eventuell einige verschwindende Teilnenner, so liegt sein Wert $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ zwischen den zwei vorausgehenden Näherungsbrüchen, also zwischen $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ und $\frac{A_{2\nu-3}}{B_{2\nu-3}}$. Folglich hat $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ den gleichen Grenzwert wie $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$; d. h. der Kettenbruch (1) konvergiert. W. z. b. w.

Wendet man daher auf den Kettenbruch (2) den Satz 9 und seinen Zusatz, sowie den Satz 4 an, so erhält man

Satz 17. *Die Elemente des alternierenden Kettenbruches*

$$b_0 - \frac{a_1'|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3'|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - + \cdots$$

mögen den Ungleichungen genügen:

$$(b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1} a'_{2\nu+1} \qquad (\nu \geqq 1).$$

Wenn dabei für alle ungeraden ν Gleichheit statthat, so divergiert der Kettenbruch. Wenn aber für mindestens ein ungerades ν wirklich Ungleichheit statthat, so setze man zur Abkürzung

$$c_\nu = a'_{2\nu-1} a_{2\nu} b_{2\nu-3} b_{2\nu+1}, \quad d_\nu = (b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1} a'_{2\nu+1};$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches besteht dann darin, daß von den beiden Reihen

$$\sum_\nu \frac{c_3 c_5 \cdots c_{2\nu-1}}{c_4 c_6 \cdots c_{2\nu}} d_{2\nu}, \quad \sum_\nu \frac{c_2 c_4 \cdots c_{2\nu}}{c_3 c_5 \cdots c_{2\nu+1}} d_{2\nu+1}$$

mindestens eine divergiert. (*Perron* 5.)

Die Anwendung dieses Kriteriums ist ziemlich unbequem. Ein einfacheres, aber weniger allgemeines Kriterium ergibt sich durch Anwendung von Satz 10 auf den Kettenbruch (2):

Satz 18. *Unter Beibehaltung der Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 17 ist der Kettenbruch sicher konvergent, wenn die Reihe* $\sum \sqrt{\frac{d_\nu d_{\nu+1}}{c_{\nu+1}}}$ *divergiert.* (*Perron* 5.)

Zu einem noch einfacheren Kriterium gelangt man, wenn die weitere Bedingung $b_{2\nu} b_{2\nu+1} \geqq a'_{2\nu+1}$ erfüllt ist. Dann ist nämlich

$$d_\nu = b_{2\nu-1}(b_{2\nu} b_{2\nu+1} - a'_{2\nu+1}) + a_{2\nu} b_{2\nu+1} \begin{cases} \geqq a_{2\nu} b_{2\nu+1} \\ > b_{2\nu-1}(b_{2\nu} b_{2\nu+1} - a'_{2\nu+1}). \end{cases}$$

Daher wird das allgemeine Glied der Reihe von Satz 18 mindestens gleich dem Ausdruck

$$\sqrt{\frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1} a_{2\nu+2} b_{2\nu+3}}{c_{\nu+1}}} = \sqrt{\frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1} a_{2\nu+2} b_{2\nu+3}}{a'_{2\nu+1} a_{2\nu+2} b_{2\nu-1} b_{2\nu+3}}} = \sqrt{\frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a'_{2\nu+1} b_{2\nu-1}}},$$

und auch größer wie der Ausdruck

$$\sqrt{\frac{b_{2\nu-1}(b_{2\nu} b_{2\nu+1} - a'_{2\nu+1}) a_{2\nu+2} b_{2\nu+3}}{a'_{2\nu+1} a_{2\nu+2} b_{2\nu-1} b_{2\nu+3}}} = \sqrt{\frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1} - a'_{2\nu+1}}{a'_{2\nu+1}}}.$$

Man erhält daher a fortiori

Satz 19. *Der alternierende Kettenbruch*

$$b_0 - \frac{a_1'|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} - \frac{a_3'|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} - \cdots$$

konvergiert sicher, wenn $b_{2\nu} b_{2\nu+1} \geqq a'_{2\nu+1}$ *ist für* $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, *und wenn von den beiden Reihen*

$$\sum_\nu \sqrt{\frac{a_{2\nu} b_{2\nu+1}}{a'_{2\nu+1} b_{2\nu-1}}}, \quad \sum_\nu \sqrt{\frac{b_{2\nu} b_{2\nu+1} - a'_{2\nu+1}}{a'_{2\nu+1}}}$$

wenigstens eine divergiert. (*Perron* **5**.)

Um auch ein einfaches Divergenzkriterium zu erhalten, denken wir uns die drei Zahlenfolgen $a_{2\nu}$, $a'_{2\nu+1}$, $b_{2\nu+1}$ monoton wachsend. Dann werden auch die c_ν monoton wachsen, so daß das allgemeine Glied der beiden in Satz 17 auftretenden Reihen höchstens gleich $d_{2\nu}$ bzw. $d_{2\nu+1}$ ist. Folglich zieht die Konvergenz der Reihe Σd_ν a fortiori die Konvergenz jener beiden Reihen und daher die Divergenz des Kettenbruches nach sich. Man erhält somit

Satz 20. *Wenn die Elemente des alternierenden Kettenbruches*

$$b_0 - \frac{a_1' |}{| b_1} + \frac{a_2 |}{| b_2} - \frac{a_3' |}{| b_3} + \frac{a_4 |}{| b_4} - \cdots$$

den Ungleichungen genügen:

$$a_{2\nu+2} \geqq a_{2\nu}, \quad a'_{2\nu+1} \geqq a'_{2\nu-1}, \quad b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1},$$

und wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [(b_{2\nu-1} b_{2\nu} + a_{2\nu}) b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1} a'_{2\nu+1}]$$

keine negativen Glieder hat und konvergiert, so divergiert der Kettenbruch. (*Perron* **5**.)

Sind speziell alle $a_{2\nu}$ und $a'_{2\nu+1}$ gleich 1, so haben wegen

$$b_{2\nu+1} \geqq b_{2\nu-1}$$

die zwei Reihen

$$\sum b_{2\nu-1} b_{2\nu} b_{2\nu+1}, \quad \sum (b_{2\nu+1} - b_{2\nu-1})$$

lauter nicht negative Glieder, und die Konvergenz der vorigen Reihe ist daher gleichbedeutend mit der Konvergenz dieser beiden. Die Konvergenz der zweiten besagt aber insbesondere, daß die $b_{2\nu+1}$ einen endlichen Grenzwert haben, und dann ist die Konvergenz der ersten gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\Sigma b_{2\nu}$. Also ergibt sich

Satz 21. *Wenn die Teilnenner des alternierenden Kettenbruches*

$$b_0 - \frac{1 |}{| b_1} + \frac{1 |}{| b_2} - \frac{1 |}{| b_3} + \frac{1 |}{| b_4} - \cdots$$

so beschaffen sind, daß erstens die $b_{2\nu+1}$ monoton wachsen, aber einen endlichen Grenzwert haben, und daß zweitens die Reihe $\Sigma b_{2\nu}$ konvergiert, so divergiert der Kettenbruch. (*Gmeiner* **1**, *Perron* **5**.)

§ 52. Irrationalität gewisser Kettenbrüche.

I. Wenn die Elemente eines konvergenten Kettenbruches ganze rationale Zahlen sind, so kann man unter Umständen a priori erkennen, daß sein Wert irrational ist. Beispiele dafür haben wir bereits in den regelmäßigen und halbregelmäßigen Kettenbrüchen kennen gelernt. Weiter gehende Resultate dieser Art ergeben sich auf Grund von

Satz 22. *Wenn die Elemente des unendlichen Kettenbruches*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

reell sind und die Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} b_\nu &\geqq |a_\nu| > 0 \\ b_\nu &\geqq |a_\nu| + 1 \text{ für } a_{\nu+1} < 0 \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

und wenn der Kettenbruch konvergiert, so genügt sein Wert ξ_0 der Ungleichung

$$\xi_0 > b_0, \text{ falls } a_1 > 0$$

$$\text{bzw. } \xi_0 \geqq b_0 - 1, \text{ falls } a_1 < 0.$$

Dabei tritt die Gleichheit $\xi_0 = b_0 - 1$ dann und nur dann ein, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ durchweg $a_\nu < 0$, $b_\nu = |a_\nu| + 1$ ist, und wenn zugleich die Reihe $\sum_\nu |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ divergiert. (*Tietze* 2.)

Zum Beweis leiten wir wie beim Beweis von Satz 14 aus dem gegebenen Kettenbruch durch Extension einen andern her, dessen Teilzähler > 0 und dessen Teilnenner $\geqq 0$ sind. Der extendierte Kettenbruch braucht zwar nicht zu konvergieren; doch ist unter den Häufungswerten seiner Näherungsbrüche jedenfalls die Zahl ξ_0 vorhanden. Da nun der extendierte Kettenbruch folgendermaßen beginnt:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|\ldots}, \qquad \text{falls } a_1 > 0$$

$$\text{bzw. } b_0 - 1 + \frac{1|}{|1} + \frac{a_1'|}{|\ldots}, \text{ falls } a_1 = -a_1' < 0,$$

so sind seine Näherungsbrüche alle größer als b_0 bzw. $b_0 - 1$. Daher muß auch für den Häufungswert ξ_0 die Ungleichung gelten:

$$\text{(a)} \qquad \xi_0 \geqq b_0, \qquad \text{falls } a_1 > 0,$$

$$\text{(b)} \qquad \xi_0 \geqq b_0 - 1, \text{ falls } a_1 < 0.$$

Wäre nun etwa $\xi_0 = b_0$, also

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = b_0,$$

so hätte man wegen der Identität $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|0} = b_0$ nach Satz 1, Kap. I auch

$$0 = b_2 + \frac{a_3|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots.$$

Anderseits muß aber dieser Kettenbruch, wenn er konvergiert, nach dem Bewiesenen $\geqq b_2$ sein für $a_3 > 0$, und $\geqq b_2 - 1$ für $a_3 < 0$. Er ist also nach den Voraussetzungen unseres Satzes gewiß $\geqq |a_2|$ und kann daher nicht Null sein. Wegen dieses Widerspruches ist $\xi_0 = b_0$ nicht möglich, und in der Ungleichung (a) ist das Gleichheitszeichen auszuschließen.

Untersuchen wir nun, ob in (b) Gleichheit möglich ist. In diesem Falle muß

$$(1) \qquad b_0 - 1 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = b_0 - \frac{a_1'|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$$

sein. Da aber offenbar auch $b_0 - 1 = b_0 - \frac{a_1'|}{|a_1'}$, so folgt nach Satz 1, Kap. I:

$$a_1' = b_1 + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots.$$

Nach dem Bewiesenen wäre dieser Kettenbruch größer als b_1, also a fortiori größer als a_1', wenn $a_2 > 0$ wäre. Es ist also notwendig

$$a_2 = -a_2' < 0,$$

und man hat

$$a_1' = b_1 - \frac{a_2'|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots;$$

daher nach dem Bewiesenen $a_1' \geqq b_1 - 1$. Da aber nach Voraussetzung auch $a_1' \leqq b_1 - 1$ ist, so ist gewiß $a_1' = b_1 - 1$, und die vorige Gleichung geht über in:

$$(2) \qquad b_1 - 1 = b_1 - \frac{a_2'|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots.$$

Diese unterscheidet sich aber von (1) nur dadurch, daß alle Indizes um 1 erhöht sind. Man kann also an sie die gleichen Folgerungen anknüpfen und findet $a_3 = -a_3' < 0$, $a_2' = b_2 - 1$, und so fortfahrend ergibt sich allgemein: $a_{\nu+1} = -a'_{\nu+1} < 0$, $a_\nu' = b_\nu - 1$. Infolgedessen kann die Gleichheit $\xi_0 = b_0 - 1$ jedenfalls nur dann eintreten, wenn der Kettenbruch die Form hat

$$b_0 - \frac{a_1'|}{|1 + a_1'} - \frac{a_2'|}{|1 + a_2'} - \frac{a_3'|}{|1 + a_3'} - \cdots; \qquad a_\nu' > 0.$$

Ob sie dann wirklich eintritt, darüber belehrt uns Satz 8, Kap. VI, demzufolge die notwendige und hinreichende Bedingung dafür in der Divergenz der Reihe $\sum_\nu a_1' a_2' \ldots a_\nu'$ besteht. Damit ist Satz 22 vollständig bewiesen.

II. Auf Grund von Satz 22 beweisen wir jetzt

Satz 23. *Wenn die Elemente des unendlichen Kettenbruches*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0)$$

ganze rationale Zahlen sind, die von einem gewissen Index ν an den Ungleichungen genügen:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} b_\nu \geqq |a_\nu|, \\ b_\nu \geqq |a_\nu| + 1 \quad \textit{für } a_{\nu+1} < 0, \end{cases}$$

so konvergiert der Kettenbruch, und sein Wert ξ_0 ist ***irrational****, außer wenn von einem gewissen ν an durchweg*

$$(\beta) \qquad a_\nu < 0, \quad b_\nu = |a_\nu| + 1$$

ist. In diesem Ausnahmsfall ist der Kettenbruch entweder unwesentlich divergent, oder er hat einen ***rationalen*** *Wert.* (*Tietze* 2.)

Da die Elemente ganze Zahlen sind, so müssen auch die Näherungszähler A_ν und -Nenner B_ν ganze Zahlen sein. Ist nun zunächst die Bedingung (α) schon von $\nu = 1$ an erfüllt, so folgt die Konvergenz des gegebenen Kettenbruches aus Satz 15; denn entweder sind alle a_ν von einer gewissen Stelle an negativ, oder die dortige Reihe (A.) hat unendlich viele Glieder und ist, da diese Glieder als Wurzeln aus ganzen Zahlen nicht kleiner als 1 sind, divergent.

Aus gleichem Grunde konvergieren auch die Kettenbrüche

$$(3) \qquad \xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots$$

für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, und es ist nach Satz 1, Kap. I:

$$(4) \qquad \xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu|}{|\xi_\nu} = \frac{A_{\nu-1}\xi_\nu + A_{\nu-2}a_\nu}{B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu}.$$

Liegt nun der Ausnahmsfall (β) vor, so ist für genügend große ν nach Satz 22: $\xi_\nu = b_\nu - 1$, also rational, daher nach (4) auch ξ_0 rational. Liegt aber der Ausnahmsfall (β) nicht vor, so ist nach Satz 22:

$$\xi_\nu > b_\nu, \text{ falls } a_{\nu+1} > 0$$

$$\text{bzw. } \xi_\nu > b_\nu - 1, \text{ falls } a_{\nu+1} < 0;$$

daher wegen der Voraussetzung (α) in jedem Fall $\xi_\nu > |a_\nu|$. Aus (4) folgt dann

$$(5) \qquad \xi_\nu(B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}) = -a_\nu(B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}).$$

Wäre hier $B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1} = 0$, so müßte auch $B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2} = 0$ sein was aber wegen

$$(6) \qquad A_{\nu-1}B_{\nu-2} - A_{\nu-2}B_{\nu-1} = (-1)^{\nu-2} a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} \neq 0$$

nicht möglich ist. Da nun $\xi_\nu > |a_\nu|$, so folgt dann aus (5):

$$|B_{\nu-1}\xi_0 - A_{\nu-1}| < |B_{\nu-2}\xi_0 - A_{\nu-2}|$$

mit Ausschluß der Gleichheit. Demnach sind die unendlich vielen Zahlen $|B_\nu \xi_0 - A_\nu|$ alle voneinander verschieden und liegen unterhalb einer endlichen Schranke. Das ist aber wegen der Ganzzahligkeit von A_ν, B_ν nur für irrationales ξ_0 möglich (vgl. die Fußnote Seite 155).

Lassen wir nun die Beschränkung fallen, daß die Bedingung (α) schon von $\nu = 1$ an erfüllt ist, so wird, wenn nicht der Ausnahmsfall (β) vorliegt, nach dem Bewiesenen mindestens für genügend große ν der Kettenbruch (3) konvergieren und irrational sein. Dann ist aber, da wegen (6) die ganzen Zahlen $B_{\nu-1}$, $B_{\nu-2}$ nicht beide gleich Null sein können, gewiß $B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu \neq 0$, also der endliche Kettenbruch (4) nicht sinnlos. Nach Satz 1, Kap. I konvergiert daher auch der gegebene Kettenbruch, und sein Wert ist gleich dem von (4). Für genügend große ν ist daher $B_{\nu-1} \neq 0$, so daß aus (4) weiter folgt:

$$\xi_0 - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{a_\nu(A_{\nu-2}B_{\nu-1} - A_{\nu-1}B_{\nu-2})}{B_{\nu-1}(B_{\nu-1}\xi_\nu + B_{\nu-2}a_\nu)} = \text{irrational},$$

daher auch ξ_0 irrational.

Liegt dagegen der Ausnahmsfall (β) vor, so ist der Kettenbruch (3) für genügend große ν ebenfalls konvergent, aber gleich $b_\nu - 1$, also rational. Der gegebene ist daher nach Satz 2 mindestens noch im weiteren Sinne konvergent, und wenn er sogar im engeren Sinne konvergiert, so ist sein Wert wieder durch die Gleichung (4) gegeben, also ebenfalls rational. Damit ist Satz 23 vollständig bewiesen.

Die Irrationalität der unendlichen regelmäßigen und halbregelmäßigen Kettenbrüche ist in Satz 23 als Spezialfall enthalten; denn der Ausnahmsfall (β) ist durch die Forderung c) in der Definition auf Seite 154 ausgeschlossen. Weitere Spezialfälle sind der sogenannte Legendresche Irrationalitätssatz, der entsteht, wenn $b_\nu \geq |a_\nu| + 1$ vorausgesetzt wird (*Legendre* **1**, *Pringsheim* **1**), sowie der für $b_\nu \geqq a_\nu > 0$ entstehende Spezialsatz, der vom Verfasser gelegentlich als Stolzscher Irrationalitätssatz bezeichnet wurde, der aber vor *Stolz* **1** bereits von *Stern* **2** bewiesen wurde.

Beispiele. Die drei Kettenbrüche

$$(A) \qquad 2 + \frac{2|}{|2} + \frac{3|}{|3} + \frac{4|}{|4} + \cdots,$$

(B) $$\frac{m|}{|n} + \frac{m^2|}{|3n} + \frac{m^2|}{|5n} + \frac{m^2|}{|7n} + \cdots,$$

(C) $$\frac{m|}{|n} - \frac{m^2|}{|3n} - \frac{m^2|}{|5n} - \frac{m^2|}{|7n} - \cdots,$$

wo m, n ganze Zahlen ($m \neq 0$, $n > 0$), sind irrational. Der Kettenbruch (A) hat aber nach Formel (15) Seite 209 den Wert e; also ist e eine irrationale Zahl. Die Kettenbrüche (B), (C) sind, wie wir in § 64 beweisen werden, bzw. gleich

$$\frac{e^{\frac{2m}{n}} - 1}{e^{\frac{2m}{n}} + 1}, \qquad \operatorname{tang} \frac{m}{n}.$$

Daraus folgt dann, daß die Funktionen e^x und $\operatorname{tang} x$ für rationale x stets irrational sind; rationale Werte können sie also nur dann annehmen, wenn x selbst irrational ist. Da insbesondere $\operatorname{tang} \pi = 0 =$ rational, so ergibt sich, daß π eine irrationale Zahl ist; auf diese Weise hat bereits *Lambert* **1b** die Irrationalität von π erkannt. Auch, daß π nicht die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl sein kann, läßt sich leicht zeigen. Denn wäre $\pi = \frac{\sqrt{m}}{n}$, wo m, n ganze Zahlen, so hätte man

$$0 = \sqrt{m} \operatorname{tang} \frac{\sqrt{m}}{n} = \frac{m|}{|n} - \frac{m|}{|3n} - \frac{m|}{|5n} - \frac{m|}{|7n} - \cdots,$$

während doch in Wirklichkeit dieser Kettenbruch wieder einen irrationalen Wert hat.

§ 53. Die Konvergenzkriterien von Pringsheim.

I. Von jetzt ab sollen für die Elemente a_ν, b_ν ganz beliebige, auch komplexe Zahlen zugelassen sein. Das Pringsheimsche Hauptkriterium ist dann folgendes:

Satz 24. *Wenn die Elemente des Kettenbruches*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

den Ungleichungen genügen:

$$|b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist der Kettenbruch konvergent. Sein Wert ist absolut $\leqq 1$, *und zwar tritt Gleichheit dann und nur dann ein, wenn die folgenden drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:*

1) $$|b_\nu| = |a_\nu| + 1 \qquad (\textit{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

2) $$\frac{a_{\nu+1}}{b_\nu b_{\nu+1}} = \textit{reell und negativ für } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

3) *die Reihe* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ *divergiert.*

In diesem besonderen Fall hat der Kettenbruch den Wert $\frac{a_1}{|a_1|} \cdot \frac{|b_1|}{b_1}$. (*Pringsheim* **1.**)[1])

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß das Verschwinden einiger Teilzähler nicht ausgeschlossen ist. Der Kettenbruch ist auch in diesem Fall konvergent und daher nach Satz 1, Kap. VI gleich einem gewissen endlichen Kettenbruch.

Zum Beweis des Satzes gehen wir aus von der Rekursionsformel für die Näherungsnenner B_ν:

(1) $$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus ihr ergibt sich zufolge unserer Voraussetzungen:

$$|B_\nu| \geqq |b_\nu||B_{\nu-1}| - |a_\nu||B_{\nu-2}| \geqq |b_\nu||B_{\nu-1}| - (|b_\nu| - 1)|B_{\nu-2}|.$$

Daher

$$|B_\nu| - |B_{\nu-1}| \geqq (|b_\nu| - 1)(|B_{\nu-1}| - |B_{\nu-2}|),$$

und folglich

(2) $$|B_\nu| - |B_{\nu-1}| \geqq (|b_\nu| - 1)(|b_{\nu-1}| - 1) \ldots (|b_1| - 1) \geqq |a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_2 a_1|.$$

Die $|B_\nu|$ nehmen somit monoton zu, sind also wegen $B_0 = 1$ alle von Null verschieden. Demnach sind keine sinnlosen Näherungsbrüche vorhanden, und der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung ist gleich

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_0}{B_0} + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0}\right) + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1}\right) + \cdots + \left(\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right)$$

$$= 0 + \frac{a_1}{B_0 B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu},$$

so daß Konvergenz und Wert unseres Kettenbruches gleichbedeutend sind mit Konvergenz und Wert der Reihe

(3) $$0 + \frac{a_1}{B_0 B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \frac{a_1 a_2 a_3}{B_2 B_3} - \frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{B_3 B_4} + \cdots.$$

1) Der wesentliche Inhalt dieses Satzes findet sich für den Fall reeller positiver b_ν und negativer a_ν bereits bei *Stern* 1 (vgl. Satz 15).

Für deren allgemeines Glied gilt aber nach (2) die Abschätzungsformel:

$$\left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}\right| \leqq \frac{|B_\nu| - |B_{\nu-1}|}{|B_{\nu-1} B_\nu|} = \frac{1}{|B_{\nu-1}|} - \frac{1}{|B_\nu|}.$$

Die Reihe (3) konvergiert also, und ihr absoluter Wert ist höchstens gleich

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|B_{\nu-1}|} - \frac{1}{|B_\nu|}\right) \leqq \frac{1}{|B_0|} = 1.$$

Das gleiche gilt daher von dem Kettenbruch. Auch ergibt sich für die Fehlerabschätzung die Formel

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right| \leqq \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \left|\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} - \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right| = \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_\lambda}{B_{\lambda-1} B_\lambda}\right|$$

$$\leqq \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \left(\frac{1}{|B_{\lambda-1}|} - \frac{1}{|B_\lambda|}\right),$$

also schließlich

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right| \leqq \frac{1}{|B_\nu|} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{|B_\lambda|}. \tag{4}$$

Ist nun etwa $a_k = 0$ für ein bestimmtes k, so ist der Kettenbruch nach Satz 1, Kap. VI gleich $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$. Also nach obigem sein absoluter Wert höchstens gleich

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} \left|\frac{a_1 a_2 \cdots a_\nu}{B_{\nu-1} B_\nu}\right| \leqq \sum_{\nu=1}^{k-1} \left(\frac{1}{|B_{\nu-1}|} - \frac{1}{|B_\nu|}\right) = 1 - \frac{1}{|B_{k-1}|} < 1.$$

Sind dagegen alle $a_\nu \neq 0$, so erkennt man, daß der absolute Wert des Kettenbruches höchstens gleich 1 ist und jedenfalls nur dann die 1 erreichen kann, wenn in allen unseren Ungleichungen das Gleichheitszeichen gilt; also insbesondere nur dann, wenn stets $|b_\nu| = |a_\nu| + 1$ ist, und wenn die Gleichung

$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

soviel besagt wie

$$|B_\nu| = |b_\nu B_{\nu-1}| - |a_\nu B_{\nu-2}|;$$

dazu ist aber erforderlich, daß die Zahlen $\frac{B_\nu}{b_\nu B_{\nu-1}}$ und $-\frac{a_\nu B_{\nu-2}}{b_\nu B_{\nu-1}}$ reell und nicht negativ sind. Es muß also auch

$$\frac{B_\nu}{b_\nu B_{\nu-1}} > 0, \quad -\frac{a_{\nu+1} B_{\nu-1}}{b_{\nu+1} B_\nu} > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

sein, und daher durch Multiplikation:

$$\frac{a_{\nu+1}}{b_\nu b_{\nu+1}} < 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so hat der äquivalente Kettenbruch

$$\frac{\frac{\beta_1}{b_1} a_1 |}{| \beta_1} + \frac{\frac{\beta_1 \beta_2}{b_1 b_2} a_2 |}{| \beta_2} + \frac{\frac{\beta_2 \beta_3}{b_2 b_3} a_3 |}{| \beta_3} + \frac{\frac{\beta_3 \beta_4}{b_3 b_4} a_4 |}{| \beta_4} + \cdots,$$

wo allgemein β_ν den absoluten Wert von b_ν bedeutet, lauter negative Teilzähler (vom ersten abgesehen), und die Teilnenner sind wegen der Voraussetzung $|b_\nu| = |a_\nu| + 1$ alle um 1 größer wie die absolut genommenen Teilzähler. Sein Wert kann daher mit Hilfe von Satz 8, Kap. VI sogleich angegeben werden. Er ist dann und nur dann absolut gleich 1, wenn die Reihe $\Sigma |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ divergiert, und zwar hat er dann den Wert $\frac{a_1}{b_1} \left| \frac{b_1}{a_1} \right|$. Damit ist der Satz 24 vollständig bewiesen.

II. Nach Satz 1, Kap. I genügt es für die Konvergenz auch, wenn der Kettenbruch

$$b_1 + \frac{a_2 |}{| b_2} + \frac{a_3 |}{| b_3} + \frac{a_4 |}{| b_4} + \cdots$$

konvergiert und von Null verschieden ist. Dies wird nach Satz 24 sicher dann der Fall sein, wenn

$$|b_1| \geqq 1$$
$$|b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

ist und dabei mindestens einmal Ungleichheit statthat.[1] Weitere Kriterien ergeben sich, wenn man bedenkt, daß bei Konvergenzfragen ein Kettenbruch durch jeden äquivalenten ersetzt werden darf. Wenn daher in dem Kettenbruch

$$\frac{c_1 a_1 |}{| c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2 |}{| c_2 b_2} + \frac{c_2 c_3 a_3 |}{| c_3 b_3} + \cdots$$

die c_ν so bestimmt werden können, daß

$$(5) \qquad \begin{cases} |c_1 b_1| \geqq 1 \\ |c_\nu b_\nu| \geqq |c_{\nu-1} c_\nu a_\nu| + 1 \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots) \end{cases}$$

1) Der Satz 24 gestattet zwar, diese Bedingungen noch dahin einzuschränken, daß auch überall Gleichheit zulässig ist, wenn man von einem umständlich zu formulierenden Ausnahmsfall absieht, in welchem dann unwesentliche Divergenz eintritt (*Pringsheim* 4). Doch wollen wir diesen im folgenden nicht überall mitschleppen.

wird, und zwar mindestens einmal Ungleichheit, so ist der Kettenbruch ebenfalls konvergent.

Speziell für $c_\nu = \frac{1}{a_{\nu+1}}$ $(a_{\nu+1} \neq 0)$ gehen diese Ungleichungen über in

$$|b_1| \geqq |a_2|$$

$$|b_\nu| \geqq 1 + |a_{\nu+1}| \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots);$$

also folgt

Satz 25. *Der Kettenbruch mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

ist konvergent, wenn die Ungleichungen erfüllt sind:

$$|b_1| \geqq |a_2|$$

$$|b_\nu| \geqq 1 + |a_{\nu+1}| \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots),$$

und zwar nicht sämtlich mit dem Gleichheitszeichen. (*Pringsheim* 4.)

Dieser Satz wäre im Gegensatz zum vorigen nicht mehr richtig, wenn Null als Teilzähler zugelassen wird. Zum Beispiel ist der Kettenbruch

$$\frac{a_1|}{|b_1} - \frac{b_1|}{|1} + \frac{0|}{|b_3} + \frac{a_4|}{|b_4} + \cdots,$$

auch wenn $|b_\nu| > 1 + |a_{\nu+1}|$ für $\nu \geqq 3$, stets divergent, da von der zweiten Ordnung an alle Näherungsbrüche sinnlos sind.

Für $c_\nu = \frac{p_\nu}{b_\nu}$, wo p_ν reell und positiv, gehen die Ungleichungen (5) über in

$$p_1 \geqq 1,$$

$$p_\nu \geqq p_{\nu-1} p_\nu \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| + 1, \text{ also } \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu}, \quad (\nu \geqq 2).$$

Daraus folgt

Satz 26. *Der Kettenbruch mit beliebigen (komplexen) Elementen*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

ist konvergent, wenn es eine Reihe positiver Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$ gibt derart, daß die Ungleichungen

$$p_1 \geqq 1$$

$$\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

erfüllt sind, und zwar nicht sämtlich mit dem Gleichheitszeichen. (*Pringsheim* 4.)[1])

Durch Spezialisierung der p_ν erhält man hieraus zahlreiche Konvergenzkriterien, deren bemerkenswerteste wir zusammenfassen in

Satz 27. *Zur Konvergenz des Kettenbruches*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

ist jede der vier folgenden Bedingungen für sich hinreichend:

1) $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{1}{4} \qquad (\nu \geqq 2).$ (*Pringsheim* 4.)

2) $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{\nu^2}{4\nu^2 - 1} \qquad (\nu \geqq 2).$ (*Pringsheim* 4.)

3) $2|a_2| \leqq |b_1 b_2|; \quad \left|\frac{a_{2\nu-1}}{b_{2\nu-2} b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu}}{b_{2\nu-1} b_{2\nu}}\right| \leqq \frac{1}{2} \qquad (\nu \geqq 2),$

wobei mindestens einmal Ungleichheit stattfinden muß, und außerdem die $a_2, a_4, a_6, \ldots \neq 0$ *sein müssen.* (*Pringsheim* 1, 4.)

4) $\sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq 1; \; a_\lambda \neq 0$ *für unendlich viele* λ. (*von Koch* 2, *Pringsheim* 4.)[2])

---

1) Für den Fall reeller positiver b_ν und negativer a_ν findet sich dieses sehr allgemeine Kriterium bereits bei *Mamsten* 1 und bei *Falk* 1.

2) In einer zurzeit (Juli 1912) noch nicht gedruckten Arbeit von Szász wird das in 4) enthaltene Kriterium in bemerkenswerter Weise ausgedehnt (*Szász* 1). Wenn nämlich die Reihe $\sum \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|$ konvergiert, so erschließt man unschwer aus den Euler-Mindingschen Formeln, daß die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{b_1 b_2 \cdots b_\nu}, \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{b_1 b_2 \cdots b_\nu}$$

existieren (siehe übrigens den Beweis in § 64, I). Die Konvergenz des Kettenbruches ist daher einfach damit gleichbedeutend, daß der zweite Grenzwert nicht verschwindet. Szász findet dafür durch Anwendung unendlicher Kettenbruchdeterminanten (§ 4), deren sich übrigens auch von Koch bedient, u. a. die hinreichende Bedingung

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| - \sum_{\nu=2}^{\infty} \Re\left(\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right) \leqq 2 \qquad (a_\lambda \neq 0),$$

wo mit $\Re$ der reelle Teil des betreffenden Ausdrucks bezeichnet ist.

Beweis. Die Bedingung 2) ergibt sich aus Satz 26 für $p_\nu = \frac{2\nu+1}{\nu+1}$; die Bedingung 1) für $p_\nu = 2$; doch ist 1) auch in 2) enthalten und nur wegen der größeren formalen Einfachheit erwähnt. Die Bedingung 3) erhält man für $p_{2\nu} = 2$; $p_{2\nu-1} = \left|\frac{b_{2\nu-1}\, b_{2\nu}}{2\, a_{2\nu}}\right|$. Endlich die Bedingung 4) entsteht, wenn man $\frac{1}{p_\nu} = \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} \left|\frac{a_\lambda}{b_{\lambda-1}\, b_\lambda}\right|$ wählt.

Schließlich sei noch für den Fall, daß alle Teilzähler gleich 1 sind, ein einfaches Spezialkriterium mitgeteilt:

Satz 28. *Wenn die Teilnenner des Kettenbruches*

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

den Ungleichungen genügen

$$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist er konvergent. (*Pringsheim* 1.)

Dies folgt in der Tat aus Satz 26, wenn man $p_{2\nu-1} = p_{2\nu} = |b_{2\nu}|$ setzt und bedenkt, daß durch unsere Bedingungen bereits die Ungleichung $|b_2| > 1$ mit Ausschluß der Gleichheit involviert wird.

III. Wir werden in den folgenden Kapiteln häufig auch Kriterien für gleichmäßige Konvergenz gebrauchen. Um solche zu erhalten, geben wir zuerst die

Definition. *Wenn die Elemente eines Kettenbruches Funktionen von irgend welchen (endlich oder unendlich vielen) Variabeln sind, so heißt der Kettenbruch in einem gewissen Bereich*[1]) *dieser Variabeln gleichmäßig konvergent, wenn seine Näherungsbrüche $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ in dem ganzen Bereich gleichmäßig einem Grenzwert zustreben, d. h. wenn jedem positiven ε eine Zahl n zugeordnet werden kann derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Bereich $B_\nu \neq 0$ ist, und die Ungleichung gilt:*

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda}{B_\lambda}\right| < \varepsilon .$$

Diese Definition läuft augenscheinlich darauf hinaus, daß die unendliche Reihe

$$\frac{A_n}{B_n} + \left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right) + \left(\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\right) + \cdots$$

in dem betrachteten Bereich gleichmäßig konvergiert.

---

1) Unter einem „Bereich" darf überall, wo nichts weiter bemerkt ist, eine Punktmenge im allgemeinsten Sinn des Wortes verstanden werden; sie braucht beispielsweise weder abgeschlossen, noch überall dicht zu sein.

Das wichtigste Kriterium für gleichmäßige Konvergenz ist nun

Satz 29. *Wenn die Elemente des Kettenbruches*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

Funktionen von irgend welchen Variabeln sind, so ist er gleichmäßig konvergent in jedem Bereich, in welchem die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1) $$|b_\nu| \geqq |a_\nu| + 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

2) *Die Reihe* $\sum_{\nu=1}^{\infty} (|b_1| - 1)(|b_2| - 1) \ldots (|b_\nu| - 1)$ *ist gleichmäßig divergent.*[1])

In der Tat ist der Kettenbruch wegen der Bedingung 1) nach Satz 24 sicher konvergent, und außerdem gilt die Formel (2), aus welcher weiter folgt:

$$|B_\nu| \geqq 1 + \sum_{\lambda=1}^{\nu} (|b_1| - 1)(|b_2| - 1) \ldots (|b_\lambda| - 1).$$

Wegen der Bedingung 2) gibt es daher zu jedem positiven ε eine Zahl n derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Bereich $|B_\nu| > \frac{1}{\varepsilon}$ wird. Aus der Fehlerabschätzungsformel (4) folgt dann aber

$$\left| \frac{A_\nu}{B_\nu} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda}{B_\lambda} \right| < \varepsilon \qquad \text{für } \nu \geqq n,$$

und zwar wieder im ganzen Bereich, womit die Gleichmäßigkeit der Konvergenz bewiesen ist.

Offenbar bleibt die gleichmäßige Konvergenz eines Kettenbruches bestehen, wenn man ihn durch einen äquivalenten ersetzt und noch den ersten Teilzähler mit einer Konstanten oder allgemeiner mit einer im ganzen Bereich unterhalb einer Schranke bleibenden Funktion multipliziert. Wendet man daher den vorigen Satz an auf den Kettenbruch

$$\frac{c_0 c_1 a_1|}{|c_1 b_1} + \frac{c_1 c_2 a_2|}{|c_2 b_2} + \frac{c_2 c_3 a_3|}{|c_3 b_3} + \cdots,$$

---

1) Wenn $f_1, f_2, f_3, \ldots$ Funktionen von irgend welchen Variabeln sind, so heißt die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|$ in einem gewissen Bereich gleichmäßig divergent, wenn zu jeder (beliebig großen) positiven Zahl G ein Index n gefunden werden kann derart, daß im ganzen Bereich $\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu| > G$ ist. Wie leicht zu sehen, ist die Reihe insbesondere dann gleichmäßig divergent, wenn im ganzen Bereich die Ungleichungen $|f_\nu| \geqq c_\nu \geqq 0$ gelten, wobei die c_ν Konstanten sind, für welche die Reihe Σc_ν divergiert.

wobei

$$c_0 = \frac{p_1 - 1}{C p_1}, \quad c_\nu = \frac{p_\nu}{b_\nu} \qquad (\nu \geqq 1)$$

und $p_\nu > 1$ sein soll, so erhält man den allgemeineren

Satz 30. *Wenn die Elemente des Kettenbruches*

$$\frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

Funktionen von irgendwelchen Variabeln sind, so ist der Kettenbruch in dem durch die Ungleichungen

$$\left|\frac{a_1}{b_1}\right| \leqq C, \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (\nu \geqq 2)$$

charakterisierten Bereich gleichmäßig konvergent. Dabei darf C irgendeine (beliebig große) Zahl sein, und die p_ν bedeuten irgendwelche Zahlen > 1, für welche die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_\nu - 1)$ divergiert.

Insbesondere folgt für $p_\nu = 2$, daß in dem Bereich

$$\left|\frac{a_1}{b_1}\right| \leqq C, \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \frac{1}{4} \qquad (\nu \geqq 2)$$

gleichmäßige Konvergenz statthat.

Ein bemerkenswerter Spezialfall unseres allgemeinen Kriteriums ist

Satz 31. *Sind $r_1, r_2, r_3, \ldots$ reelle Zahlen, die den Ungleichungen $0 < r_\nu < 1$ genügen, und sind $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \ldots$ Zahlen vom absoluten Betrage $\leqq 1$, so ist der Kettenbruch*

$$\frac{r_1 \vartheta_1 x|}{|1} + \frac{r_2 (1 - r_1) \vartheta_2 x|}{|1} + \frac{r_3 (1 - r_2) \vartheta_3 x|}{|1} + \frac{r_4 (1 - r_3) \vartheta_4 x|}{|1} + \cdots$$

im Bereich $|x| \leqq 1$ gleichmäßig konvergent. (*van Vleck* **2.**)

Beim Beweis müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r_1}{1 - r_1} \cdot \frac{r_2}{1 - r_2} \cdots \frac{r_\nu}{1 - r_\nu}$ divergiert. In diesem Fall setzen wir $p_\nu = \frac{1}{1 - r_\nu}$ für $\nu \geqq 1$. Dann ist

$$r_\nu (1 - r_{\nu-1}) = \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (\nu \geqq 2);$$

also für $|x| \leqq 1$ a fortiori

$$|r_\nu (1 - r_{\nu-1}) \vartheta_\nu x| \leqq \frac{p_\nu - 1}{p_{\nu-1} p_\nu} \qquad (\nu \geqq 2).$$

Außerdem ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_\nu-1)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_1}{1-r_1}\,\frac{r_2}{1-r_2}\cdots\frac{r_\nu}{1-r_\nu}$$

nach Voraussetzung divergent. Wählen wir noch $C=1$, so sind also alle Bedingungen von Satz 30 erfüllt. Wir wenden uns jetzt zum

2. Fall. Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{r_1}{1-r_1}\,\frac{r_2}{1-r_2}\cdots\frac{r_\nu}{1-r_\nu}$ konvergiert. Dann führen wir die Hilfsgrößen

$$u_\nu=\sum_{\lambda=\nu}^{\infty}\frac{r_1}{1-r_1}\,\frac{r_2}{1-r_2}\cdots\frac{r_\lambda}{1-r_\lambda}\qquad(\nu\geqq 1)$$

$$u_0=1+u_1$$

ein und setzen

$$(\alpha)\qquad p_\nu=\frac{u_\nu}{u_{\nu+1}}\,\frac{1}{1-r_\nu}\qquad(\nu\geqq 1).$$

Offenbar ist

$$u_\nu-u_{\nu+1}=\frac{r_\nu}{1-r_\nu}(u_{\nu-1}-u_\nu)\qquad(\nu\geqq 1),$$

und mit Rücksicht hierauf findet man durch eine leichte Rechnung:

$$(\beta)\qquad p_\nu-1=\frac{u_{\nu-1}}{u_{\nu+1}}\,\frac{r_\nu}{1-r_\nu}\qquad(\nu\geqq 1).$$

Daher ergibt sich einerseits

$$\frac{p_\nu-1}{p_{\nu-1}p_\nu}=r_\nu(1-r_{\nu-1})\qquad(\nu\geqq 2),$$

also wieder im Bereich $|x|\leqq 1$:

$$|r_\nu(1-r_{\nu-1})\vartheta_\nu x|\leqq\frac{p_\nu-1}{p_{\nu-1}p_\nu}\qquad(\nu\geqq 2).$$

Anderseits ist nach (β)

$$\sum_{\nu=1}^{n}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_\nu-1)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{u_0u_1}{u_\nu u_{\nu+1}}\,\frac{r_1}{1-r_1}\,\frac{r_2}{1-r_2}\cdots\frac{r_\nu}{1-r_\nu}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{u_0u_1}{u_\nu u_{\nu+1}}(u_\nu-u_{\nu+1})=u_0u_1\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{u_{\nu+1}}-\frac{1}{u_\nu}\right)=u_0u_1\left(\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_1}\right).$$

Da aber offenbar $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, so ist hiernach die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_\nu - 1)$$

divergent. Wählen wir noch $C = 1$, so sind also wieder alle Bedingungen von Satz 30 erfüllt.

§ 54. Die Konvergenzkriterien von van Vleck-Jensen.

I. Ein vom Pringsheimschen Hauptkriterium völlig verschiedenes, nicht minder wichtiges und allgemeines Konvergenzkriterium verdankt man van Vleck; der Beweis wurde von Jensen bedeutend vereinfacht. Als Grundlage dient

Satz 32. *Die Teilnenner des Kettenbruches*

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

setze man in die Form $b_\nu = |b_\nu| e^{i\vartheta_\nu}$. *Gibt es alsdann eine positive Zahl* ε *derart, daß für* $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ *durchweg*

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \vartheta_\nu \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

ist, und sind die Zahlen $b_1, b_3, b_5, \ldots$ *nicht alle gleich Null, so nähern sich die Näherungsbrüche gerader Ordnung einem Grenzwert; ebenso die ungerader Ordnung.* (*van Vleck* **1**, *Jensen* **1**.)

Zum Beweis seien wieder A_ν, B_ν die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung; es ist dann

$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1); \tag{1}$$

also, wenn man mit der zu $B_{\nu-1}$ konjugiert-komplexen Zahl $\overline{B}_{\nu-1}$ multipliziert:

$$B_\nu \overline{B}_{\nu-1} = b_\nu |B_{\nu-1}|^2 + \overline{B}_{\nu-1} B_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1). \tag{2}$$

Setzt man daher

$$b_\nu = |b_\nu| (\cos \vartheta_\nu + i \sin \vartheta_\nu) = \beta_\nu + i\gamma_\nu \qquad (\nu \geqq 1), \tag{3}$$

$$B_\nu \overline{B}_{\nu-1} = \sigma_\nu + i\tau_\nu, \quad \overline{B}_\nu B_{\nu-1} = \sigma_\nu - i\tau_\nu \qquad (\nu \geqq 0), \tag{4}$$

so folgt aus (2) durch Absonderung des reellen Teiles:

$$\sigma_\nu = \beta_\nu |B_{\nu-1}|^2 + \sigma_{\nu-1} \qquad (\nu \geqq 1), \tag{5}$$

und hieraus, da offenbar $\sigma_0 = 0$ ist:

$$\sigma_\nu = \beta_1 |B_0|^2 + \beta_2 |B_1|^2 + \cdots + \beta_\nu |B_{\nu-1}|^2. \tag{6}$$

Nun sei b_{2n+1} die erste der Zahlen $b_1, b_3, b_5, \ldots$, welche nicht verschwindet, also, da die b_ν nach Voraussetzung nicht rein imaginär sind, auch β_{2n+1} die erste nicht verschwindende der Zahlen $\beta_1, \beta_3, \beta_5, \ldots$ Dann ergibt sich leicht aus der Rekursionsformel (1):

$$B_0 = B_2 = \cdots = B_{2n} = 1; \quad B_{2n+1} = b_{2n+1}, \tag{7}$$

während die B mit kleinerem ungeradem Index verschwinden. Daraus folgt dann, daß $\beta_{2n+1}|B_{2n}|^2 \neq 0$ ist, dagegen $\beta_\nu |B_{\nu-1}|^2 = 0$ für $\nu < 2n+1$. Daher ist insbesondere auch nach (6):

$$\sigma_{2n+1} = \beta_{2n+1} |B_{2n}|^2 = \beta_{2n+1} \neq 0; \tag{8}$$

dagegen $\sigma_\nu = 0$ für $\nu < 2n+1$. Nach unseren Voraussetzungen ist nun $|\vartheta_\nu| \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$; also, wenn $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = k$ gesetzt wird:

$$\beta_\nu = |b_\nu| \cos\vartheta_\nu \geqq 0 \tag{9}$$

$$|\gamma_\nu| = |b_\nu \sin\vartheta_\nu| = \beta_\nu |\operatorname{tang}\vartheta_\nu| \leqq k\beta_\nu. \tag{10}$$

Hieraus weiter

$$|b_\nu| = |\beta_\nu + i\gamma_\nu| \leqq \beta_\nu + |\gamma_\nu| \leqq (1+k)\beta_\nu. \tag{11}$$

Da $\beta_\nu \geqq 0$ ist, folgt zunächst aus (8): $\sigma_{2n+1} > 0$; sodann ergibt sich aus (5), daß die σ_ν mit ν monoton wachsen. Es ist also

$$\sigma_\nu \geqq \sigma_{\nu-1} \geqq \sigma_{2n+1} > 0 \qquad (\nu > 2n+1). \tag{12}$$

Nach (4) ist dann für $\nu > 2n$ gewiß auch $B_{\nu-1} \neq 0$; d. h. die Näherungsbrüche sind von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung an nicht sinnlos. Man hat dann für $\nu \geqq 2n+1$ (siehe Formel (34), Kap. I):

$$\left|\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| = \left|\frac{b_{\nu+1}}{B_{\nu+1}B_{\nu-1}}\right| \leqq \frac{(1+k)\beta_{\nu+1}}{|B_{\nu+1}B_{\nu-1}|} = \frac{(1+k)\beta_{\nu+1}|B_\nu|^2}{|B_{\nu+1}\overline{B}_\nu| \cdot |B_\nu \overline{B}_{\nu-1}|}$$

$$= \frac{(1+k)(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu)}{|\sigma_{\nu+1} + i\tau_{\nu+1}| \cdot |\sigma_\nu + i\tau_\nu|} \leqq \frac{(1+k)(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu)}{\sigma_{\nu+1}\sigma_\nu} = (1+k)\left(\frac{1}{\sigma_\nu} - \frac{1}{\sigma_{\nu+1}}\right)$$

$$\leqq (1+k)\left(\frac{1}{\sigma_\nu} - \frac{1}{\sigma_{\nu+2}}\right).$$

Infolgedessen sind die Differenzen

$$\frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}} - \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} \quad \text{und} \quad \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - \frac{A_{2\nu-2}}{B_{2\nu-2}}$$

die allgemeinen Glieder von absolut konvergenten Reihen; also existieren die beiden Grenzwerte

$$(13)\qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu+1}}{B_{2\nu+1}}, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}.$$

W. z. b. w. Zugleich ergibt sich für die Fehlerabschätzung die Formel:

$$(14)\qquad \begin{cases} \left|\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_{\nu-1+2\lambda}}{B_{\nu-1+2\lambda}}\right| \leqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left|\frac{A_{\nu-1+2\lambda}}{B_{\nu-1+2\lambda}} - \frac{A_{\nu+1+2\lambda}}{B_{\nu+1+2\lambda}}\right| \\ \leqq (1+k) \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma_{\nu+2\lambda}} - \frac{1}{\sigma_{\nu+2\lambda+2}}\right) = (1+k)\left(\frac{1}{\sigma_\nu} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{\sigma_\lambda}\right) \\ \text{für } \nu \geqq 2n+1. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt noch eine untere Grenze zur Abschätzung der σ_ν berechnen. Man hat für $\nu - 2 \geqq 2n$:

$$\left|\frac{B_\nu}{B_{\nu-2}}\right| = \left|\frac{b_\nu B_{\nu-1} + B_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}\right| \leqq 1 + \left|\frac{b_\nu B_{\nu-1}}{B_{\nu-2}}\right| = 1 + \frac{|b_\nu| \cdot |B_{\nu-1}|^2}{|\sigma_{\nu-1} - i\tau_{\nu-1}|}$$

$$\leqq 1 + \frac{(1+k)\beta_\nu |B_{\nu-1}|^2}{\sigma_{\nu-1}} = 1 + \frac{1+k}{\sigma_{\nu-1}}(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) \leqq 1 + \frac{1+k}{\sigma_{2n+1}}(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1})$$

$$= 1 + \frac{1+k}{\beta_{2n+1}}(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) \leqq 1 + \frac{(1+k)^2}{|b_{2n+1}|}(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}).$$

Setzt man also zur Abkürzung $\frac{(1+k)^2}{|b_{2n+1}|} = G$, so kommt:

$$\left|\frac{B_\nu}{B_{\nu-2}}\right| \leqq 1 + G(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) \leqq e^{G(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1})} \leqq e^{G(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-2})}.$$

Wenn man hier für ν der Reihe nach die Werte ν, $\nu-2$, $\nu-4, \ldots$ bis herab zu $2n+2$ bzw. $2n+3$ einsetzt und die entstehenden Ungleichungen miteinander multipliziert, so folgt:

$$|B_\nu| \leqq \begin{cases} |B_{2n}|\, e^{G\sigma_\nu} & \text{für gerade } \nu, \\ |B_{2n+1}|\, e^{G\sigma_\nu} & \text{für ungerade } \nu, \end{cases}$$

also, da $B_{2n} = 1$, $B_{2n+1} = b_{2n+1}$ ist, in jedem Fall

$$|B_\nu| < (1 + |b_{2n+1}|)\, e^{G\sigma_\nu}.$$

Diese Formel gilt ihrer Herleitung nach für $\nu \geqq 2n+2$; sie ist aber, wie man direkt sieht, auch für $\nu = 2n+1$ richtig. Anderseits ist nun für $\nu \geqq 2n+1$

$$|B_\nu B_{\nu-1}| = |\sigma_\nu + i\tau_\nu| \geqq \sigma_\nu \geqq \sigma_{2n+1} = \beta_{2n+1} \geqq \frac{|b_{2n+1}|}{1+k};$$

also

$$|B_{\nu-1}| \geqq \frac{|b_{2n+1}|}{1+k}\frac{1}{|B_\nu|} > \frac{|b_{2n+1}|}{1+k}\frac{e^{-G\sigma_\nu}}{1+|b_{2n+1}|} \qquad (\nu \geqq 2n+1),$$

und hieraus

$$\beta_\nu |B_{\nu-1}|^2 \geqq \beta_\nu \frac{|b_{2n+1}|^2}{(1+k)^2}\frac{e^{-2G\sigma_\nu}}{(1+|b_{2n+1}|)^2} \geqq \frac{|b_\nu|}{1+k}\frac{|b_{2n+1}|^2}{(1+k)^2}\frac{e^{-2G\sigma_\nu}}{(1+|b_{2n+1}|)^2}.$$

Hier ist aber die linke Seite nach (5) gleich $\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}$, also jedenfalls $\leqq e^{\sigma_\nu} - e^{\sigma_{\nu-1}}$. Wenn daher noch die Abkürzung

$$\frac{|b_{2n+1}|^2}{(1+k)^3(1+|b_{2n+1}|)^2} = g$$

eingeführt wird, so kommt

$$e^{\sigma_\nu} - e^{\sigma_{\nu-1}} \geqq g|b_\nu| e^{-2G\sigma_\nu} \qquad (\nu \geqq 2n+1),$$

oder auch

$$e^{(2G+1)\sigma_\nu} \geqq e^{\sigma_{\nu-1}+2G\sigma_\nu} + g|b_\nu| \geqq e^{(2G+1)\sigma_{\nu-1}} + g|b_\nu|.$$

Hieraus folgt nun sofort

$$e^{(2G+1)\sigma_\nu} > g\cdot\sum_{\lambda=2n+1}^{\nu}|b_\lambda| \qquad (\nu \geqq 2n+1),$$

oder endlich, wenn man zu den Logarithmen übergeht und für G, g die bezüglichen Werte einsetzt:

$$(15)\quad \begin{cases} \sigma_\nu > \dfrac{|b_{2n+1}|}{2(1+k)^2+|b_{2n+1}|}\left\{\log\dfrac{|b_{2n+1}|^2}{(1+k)^3(1+|b_{2n+1}|)^2} + \log\sum\limits_{\lambda=2n+1}^{\nu}|b_\lambda|\right\} \\ \qquad\qquad \text{für } \nu \geqq 2n+1. \end{cases}$$

II. Nunmehr ergibt sich leicht das van Vlecksche Hauptkriterium:

Satz 33. *Unter den Voraussetzungen von Satz 32 ist der Kettenbruch konvergent oder divergent, je nachdem die Reihe $\Sigma|b_\nu|$ divergiert oder konvergiert.* (*van Vleck* 1, *Jensen* 1.)

Daß nämlich die Konvergenz der Reihe stets die Divergenz des Kettenbruches nach sich zieht, folgt schon aus Satz 5. Um einzusehen, daß auch umgekehrt die Divergenz der Reihe die Konvergenz des Kettenbruches zur Folge hat, ist nur zu zeigen, daß die beiden Grenzwerte (13) in diesem Fall einander gleich sind. Dazu genügt aber augenscheinlich der Nachweis, daß der Ausdruck $\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|$ mit wachsendem ν beliebig klein wird. Nun ist in der Tat

$$\left|\frac{A_\nu}{B_\nu} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right| = \left|\frac{1}{B_\nu B_{\nu-1}}\right| = \frac{1}{|B_\nu \bar{B}_{\nu-1}|} = \frac{1}{|\sigma_\nu + i\tau_\nu|} \leqq \frac{1}{\sigma_\nu},$$

und da die Divergenz der Reihe $\Sigma|b_\nu|$ nach (15) bewirkt, daß σ_ν mit ν über alle Grenzen wächst, so ist hiermit der Beweis erbracht.

Das in Satz 8 enthaltene Seidel-Sternsche Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Elementen ist in Satz 33 als Spezialfall enthalten und damit zum zweitenmal bewiesen.

Eine leichte Erweiterung von Satz 33 ist

Satz 34. *Wenn in dem Kettenbruch*

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

die Zahlen $b_1, b_3, b_5, \ldots$ nicht alle verschwinden, so setze man $b_\nu = |b_\nu| e^{i\vartheta_\nu}$. Wenn dann eine reelle Zahl α und eine positive Zahl η existieren derart, daß

$$\left.\begin{array}{c} \alpha \leqq \vartheta_{2\nu-1} \leqq \alpha + \pi - \eta \\ -\alpha - \pi + \eta \leqq \vartheta_{2\nu} \leqq -\alpha \end{array}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Kettenbruches darin, daß die Reihe $\Sigma|b_\nu|$ divergiert. (*van Vleck* **1**, *Jensen* **1**.)

In der Tat ist der Kettenbruch äquivalent mit

$$\frac{e^{-i\delta}|}{|b_1 e^{-i\delta}} + \frac{1|}{|b_2 e^{i\delta}} + \frac{1|}{|b_3 e^{-i\delta}} + \frac{1|}{|b_4 e^{i\delta}} + \cdots, \tag{16}$$

wobei δ beliebig. Wählt man aber $\delta = \alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{\eta}{2}$, so erfüllt der Kettenbruch (16), abgesehen vom ersten Teilzähler, der jedoch auf die Konvergenz keinen Einfluß hat, die Voraussetzungen der Sätze 32, 33, indem $\varepsilon = \frac{\eta}{2}$ zu setzen ist.

Es ist gut, sich in der komplexen Zahlenebene die Lage der b_ν zu veranschaulichen, die durch die Bedingungen des Satz 34 gefordert wird: Die b mit ungeradem Index liegen in einem beliebigen Winkelraum, der seinen Scheitel im Nullpunkt hat und kleiner als 180° ist; die b mit geradem Index liegen dann in dem Winkelraum, der zum ersten in bezug auf die reelle Achse symmetrisch ist.

III. Wir wollen jetzt auch wieder einige Kriterien für gleichmäßige Konvergenz aufstellen. Zunächst

Satz 35. *Die Teilnenner des Kettenbruches*

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

seien Funktionen von irgendwelchen Variabeln in einem gewissen Bereich,

und es werde $b_\nu = |b_\nu| e^{i\vartheta_\nu}$ *gesetzt. Wenn dann eine positive Zahl* ε *existiert derart, daß im ganzen Bereich*

$$-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqq \vartheta_\nu \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist; wenn ferner die Reihe $\Sigma |b_\nu|$ ***gleichmäßig*** *divergiert; wenn endlich von den Funktionen* $b_1, b_3, b_5, \ldots$ *wenigstens eine nicht identisch verschwindet, und dabei die erste nicht identisch verschwindende im ganzen Bereich größer als eine angebbare positive Zahl c bleibt: dann ist der Kettenbruch in diesem Bereich* ***gleichmäßig*** *konvergent.*

In der Tat ist er nach Satz 33 sicher konvergent. Die Gleichmäßigkeit ergibt sich dann leicht aus der Fehlerabschätzungsformel (14). Nach dieser ist nämlich für $\nu \geqq 2n + 1$

$$\left| \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} - \lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda}{B_\lambda} \right| \leqq (1 + k) \frac{1}{\sigma_\nu} \qquad \left(k = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right). \tag{17}$$

Anderseits ist aber im ganzen Bereich: $|b_{2n+1}| > c$; also nach (15) auch

$$\sigma_\nu > \frac{c}{2(1+k)^2 + c} \left\{ \log \frac{c^2}{(1+k)^2 (1+c)^2} + \log \sum_{\lambda=2n+1}^{\nu} |b_\lambda| \right\}.$$

Wegen der gleichmäßigen Divergenz der Reihe $\Sigma |b_\lambda|$ kann man daher zu jeder beliebig großen positiven Zahl M einen Index m so bestimmen, daß für alle $\nu > m$ im ganzen Bereich die Ungleichung $\sigma_\nu > M$ gilt. Dann folgt aber aus (17) sofort die Gleichmäßigkeit der Konvergenz.

Auch Satz 35 gestattet die gleiche Erweiterung wie Satz 33. Man erhält

Satz 36. *Die Teilnenner des Kettenbruches*

$$\frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3} + \cdots$$

seien Funktionen von irgendwelchen Variabeln in einem gewissen Bereich, und es werde $b_\nu = |b_\nu| e^{i\vartheta_\nu}$ *gesetzt. Wenn dann eine positive Zahl* η *und für jede Stelle des Bereiches eine reelle Zahl* α *existiert derart, daß*

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \leqq \vartheta_{2\nu-1} \leqq \alpha + \pi - \eta \\ -\alpha - \pi + \eta \leqq \vartheta_{2\nu} \leqq -\alpha \end{array}\right\} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist; wenn ferner die Reihe $\Sigma |b_\nu|$ ***gleichmäßig*** *divergiert; wenn endlich von den Funktionen* $b_1, b_3, b_5, \ldots$ *wenigstens eine nicht identisch verschwindet, und dabei die erste nicht identisch verschwindende im ganzen Bereich größer als eine angebbare positive Zahl c bleibt: dann ist der Kettenbruch in diesem Bereich* ***gleichmäßig*** *konvergent.*

In der Tat erfüllt der äquivalente Kettenbruch (16), wenn man zunächst den ersten Teilzähler in 1 abändert, die Voraussetzungen von Satz 35. Da aber der wahre erste Teilzähler im ganzen Bereich unter einer Schranke bleibt (er hat nämlich den absoluten Betrag 1), so kann er die Gleichmäßigkeit der Konvergenz nicht stören.

Als Anwendung beweisen wir

Satz 37. *Die Teilnenner des Kettenbruches*

$$\frac{x|}{|b_1} + \frac{x|}{|b_2} + \frac{x|}{|b_3} + \cdots$$

seien reelle nicht negative Zahlen, und insbesondere sollen die b mit ungeradem Index nicht alle verschwinden; ferner sei die Reihe Σb_ν divergent. Wenn dann $x = re^{i\varphi}$ gesetzt wird, so ist der Kettenbruch in jedem Bereich der Gestalt

$$0 < r \leqq R, \quad -\pi + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon,$$

wo $\varepsilon > 0$, gleichmäßig konvergent. (*Stieltjes* 4a.)

In der Tat ist der Kettenbruch äquivalent mit

$$(18) \qquad \frac{\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}} \Big|}{\Big| \frac{b_1}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\varphi}{2}}} + \frac{1 \Big|}{\Big| \frac{b_2}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\varphi}{2}}} + \frac{1 \Big|}{\Big| \frac{b_3}{\sqrt{r}} e^{-i\frac{\varphi}{2}}} + \cdots.$$

Da nun r in dem bezeichneten Bereich eine Schranke R nicht übersteigt, so ist die Reihe $\sum \frac{b_\nu}{\sqrt{r}}$ gleichmäßig divergent. Der Kettenbruch (18) erfüllt daher, wenn man zunächst vom ersten Teilzähler absieht, die Bedingungen von Satz 35, ist also gleichmäßig konvergent. Da aber der erste Teilzähler absolut eine Schranke $\sqrt{R}$ nicht übersteigt, so vermag er die gleichmäßige Konvergenz nicht aufzuheben.

Eine wesentliche Ergänzung zu Satz 37 ist folgender

Zusatz. *Unter den Voraussetzungen von Satz 37 sei b_{2n+1} die erste nicht verschwindende unter den Zahlen $b_1, b_3, b_5, \ldots$ Es ist dann*

$$\lim_{x=0} \left(\frac{x|}{|b_1} + \frac{x|}{|b_2} + \frac{x|}{|b_3} + \cdots \right) = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 0, \\ b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n} \text{ für } n > 0, \end{cases}$$

wobei x auf einem beliebigen Weg des bezeichneten Bereiches der Null zustrebt.

In der Tat unterscheidet sich der äquivalente Kettenbruch (18) von seinem Näherungsbruch $\frac{A_{2n}}{B_{2n}}$ nach Formel (14) höchstens um

$|\sqrt{x}|(1+k)\frac{1}{\sigma_{2n+1}}$; also, weil $\sigma_{2n+1} = \beta_{2n+1} \geqq \frac{|b_{2n+1}:\sqrt{x}|}{1+k}$ (nach den Formeln (8) und (11) angewandt auf den Kettenbruch (18)) ist, höchstens um $|x|\frac{(1+k)^2}{b_{2n+1}}$. Man hat daher

$$\lim_{x=0}\left(\frac{x|}{|b_1} + \frac{x|}{|b_2} + \frac{x|}{|b_3} + \cdots\right) = \lim_{x=0}\frac{A_{2n}}{B_{2n}},$$

sofern der rechtsstehende Grenzwert existiert. Aber es ist, wie man sogleich erkennt:

$$\frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 0, \\ b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n} \text{ für } n > 0 \end{cases}$$

ganz unabhängig von x ($\neq 0$). Damit ist der Zusatz bewiesen.

Man beachte übrigens, daß der Kettenbruch von Satz 37 durchaus nicht immer konvergiert für $x = 0$. Sein Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung ist dann nämlich, wie man ohne weiteres sieht, gleich $\frac{0}{b_1 b_2 \ldots b_\nu}$. Er wird daher dann und nur dann konvergieren, wenn alle b_ν von Null verschieden sind; dann konvergiert er also gleichmäßig im Bereich

$$0 \leqq r \leqq R, \quad -\pi + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon.$$

§ 55. Periodische Kettenbrüche.

I. Ein Kettenbruch mit beliebigen Elementen

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

heißt periodisch, wenn von einem gewissen ν-Wert an die Gleichungen $b_{\nu+k} = b_\nu$, $a_{\nu+1+k} = a_{\nu+1}$ bestehen; k ist die Gliederzahl der Periode. Speziell heißt der Kettenbruch reinperiodisch, wenn diese Gleichungen schon von $\nu = 0$ an bestehen; andernfalls heißt er gemischtperiodisch. Diese Definition deckt sich mit der in § 38 für halbregelmäßige Kettenbrüche gegebenen.

Sei nun

$$(1) \quad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots$$

ein reinperiodischer Kettenbruch mit k-gliedriger Periode, bei dem wir außerdem die Teilzähler $\neq 0$ voraussetzen wollen. Zur Untersuchung seiner Konvergenz gehen wir aus von den Formeln (24), Kap. I. Diese lauten speziell für $\lambda = k$:

$$A_{\nu+k-1} = A_{k-1}A_{\nu-1,k} + a_k A_{k-2} B_{\nu-1,k},$$
$$B_{\nu+k-1} = B_{k-1}A_{\nu-1,k} + a_k B_{k-2} B_{\nu-1,k}.$$

Wegen der Periodizität ist aber offenbar $A_{\nu-1,k} = A_{\nu-1}$; $B_{\nu-1,k} = B_{\nu-1}$. Setzt man dann noch $\nu - 1$ in die Form

$$\nu - 1 = (r-1)k + \lambda,$$

wo λ eine der Zahlen $0, 1, \ldots, k-1$ bedeutet, so kommt

$$\text{(2)} \quad \begin{cases} A_{rk+\lambda} = A_{k-1}A_{(r-1)k+\lambda} + a_k A_{k-2} B_{(r-1)k+\lambda} \\ B_{rk+\lambda} = B_{k-1}A_{(r-1)k+\lambda} + a_k B_{k-2} B_{(r-1)k+\lambda} \end{cases} \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Wenn $B_{k-1} = 0$ sein sollte, so ergibt sich aus der zweiten dieser Gleichungen, angewandt für $\lambda = k-1$, daß auch $B_{rk-1} = 0$ ist (durch Schluß von r auf $r+1$). Dann gibt es also unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche, und der Kettenbruch divergiert. Eine erste notwendige Bedingung für die Konvergenz ist daher

$$\text{(3)} \qquad B_{k-1} \neq 0;$$

wir setzen diese hinfort als erfüllt voraus. Wenn dann der Kettenbruch wirklich konvergiert, so muß sein Wert ξ_0 nach Satz 1, Kap. I der Gleichung genügen:

$$\text{(4)} \qquad \xi_0 = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|\xi_0} = \frac{\xi_0 A_{k-1} + a_k A_{k-2}}{\xi_0 B_{k-1} + a_k B_{k-2}},$$

oder, wenn man mit dem Nenner heraufmultipliziert,

$$\text{(5)} \qquad B_{k-1}\xi_0^2 + (a_k B_{k-2} - A_{k-1})\xi_0 - a_k A_{k-2} = 0.$$

Wegen (3) ist dies eine nicht identische quadratische Gleichung, deren Wurzeln wir, ob der Kettenbruch konvergiert oder nicht, mit x_1 und x_2 bezeichnen wollen. Setzt man dann

$$\text{(6)} \qquad \varrho_i = x_i B_{k-1} + a_k B_{k-2} \qquad (i = 1, 2),$$

so ist offenbar auch

$$\text{(7)} \qquad \varrho_i x_i = x_i A_{k-1} + a_k A_{k-2} \qquad (i = 1, 2).$$

Ferner ergibt sich durch eine leichte Rechnung:

$$\text{(8)} \qquad \varrho_1 + \varrho_2 = A_{k-1} + a_k B_{k-2},$$

$$\text{(9)} \qquad \varrho_1 \varrho_2 = a_k(A_{k-1}B_{k-2} - A_{k-2}B_{k-1}) = (-1)^k a_1 a_2 \ldots a_k \neq 0,$$

also gewiß $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_2 \neq 0$.

II. Wir wollen jetzt die Näherungszähler und -Nenner in independenter Form ausdrücken. Aus den Gleichungen (2) folgt, indem man die zweite mit x_1 multipliziert und von der ersten subtrahiert:

$$\begin{aligned} (10) \qquad & A_{rk+\lambda} - x_1 B_{rk+\lambda} \\ & = (A_{k-1} - x_1 B_{k-1}) A_{(r-1)k+\lambda} + (a_k A_{k-2} - x_1 a_k B_{k-2}) B_{(r-1)k+\lambda}. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach (6) und (8)

$$A_{k-1} - x_1 B_{k-1} = A_{k-1} - (\varrho_1 - a_k B_{k-2}) = \varrho_2;$$

ebenso nach (7) und (8)

$$a_k A_{k-2} - x_1 a_k B_{k-2} = \varrho_1 x_1 - x_1 A_{k-1} - x_1 a_k B_{k-2} = -x_1 \varrho_2.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (10) ein, so kommt:

$$A_{rk+\lambda} - x_1 B_{rk+\lambda} = \varrho_2 (A_{(r-1)k+\lambda} - x_1 B_{(r-1)k+\lambda}),$$

woraus sogleich folgt:

$$(11) \qquad A_{rk+\lambda} - x_1 B_{rk+\lambda} = \varrho_2^r (A_\lambda - x_1 B_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1);$$

und ganz entsprechend

$$(12) \qquad A_{rk+\lambda} - x_2 B_{rk+\lambda} = \varrho_1^r (A_\lambda - x_2 B_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Wenn $x_1 \neq x_2$, so kann man diese beiden Gleichungen nach $A_{rk+\lambda}$, $B_{rk+\lambda}$ auflösen, womit die gesuchte independente Darstellung gefunden ist.[1] Für $x_1 = x_2$ dagegen sind die Gleichungen (11), (12) miteinander identisch; man erhält dann aber leicht eine weitere Gleichung. Setzt man nämlich in (11) $r-1$ an Stelle von r, so kommt, weil jetzt auch $\varrho_2 = \varrho_1$ ist:

$$A_{(r-1)k+\lambda} = x_1 B_{(r-1)k+\lambda} + \varrho_1^{r-1} (A_\lambda - x_1 B_\lambda).$$

Führt man diesen Wert von $A_{(r-1)k+\lambda}$ in die rechte Seite der zweiten Gleichung (2) ein, so geht sie über in

$$\begin{aligned} B_{rk+\lambda} &= (x_1 B_{k-1} + a_k B_{k-2}) B_{(r-1)k+\lambda} + \varrho_1^{r-1} (A_\lambda - x_1 B_\lambda) B_{k-1} \\ &= \varrho_1 B_{(r-1)k+\lambda} + \varrho_1^{r-1} (A_\lambda - x_1 B_\lambda) B_{k-1}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, wenn man für r der Reihe nach die Werte $1, 2, \ldots r$ einsetzt, leicht die gesuchte Gleichung:

$$(11\text{a}) \qquad B_{rk+\lambda} = \varrho_1^r B_\lambda + r \varrho_1^{r-1} (A_\lambda - x_1 B_\lambda) B_{k-1} \qquad (\text{für } x_1 = x_2).$$

---

1) Sie findet sich in voller Allgemeinheit zuerst bei *Stolz* 1; etwas weniger allgemein bei *Günther* 1. Für eingliedrige Periodizität mit dem Teilzähler 1 wurde sie bereits von *Dan. Bernoulli* 1 bewiesen, später von *Clausen* 1 wiedergefunden. Für zweigliedrige Periodizität mit den Teilzählern 1 bewies sie *Kahl* 1.

Dazu fügen wir die aus (12) für $x_1 = x_2$ hervorgehende:

$$A_{rk+\lambda} - x_1 B_{rk+\lambda} = \varrho_1^r (A_\lambda - x_1 B_\lambda) \qquad (\text{für } x_1 = x_2). \tag{12a}$$

Nunmehr führen wir zuerst den Fall $x_1 \neq x_2$, also $\varrho_1 \neq \varrho_2$ zu Ende. Wenn dann der Kettenbruch konvergiert, so muß sein Wert ξ_0 entweder x_1 oder x_2 sein; wir setzen etwa $\xi_0 = x_1$. Dann folgt aus (11) und (12), indem man durch $B_{rk+\lambda}$ dividiert und dann zur Grenze $r = \infty$ übergeht:

$$0 = \lim_{r=\infty} \frac{\varrho_2^r}{B_{rk+\lambda}} (A_\lambda - x_1 B_\lambda) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots k-1), \tag{13}$$

$$x_1 - x_2 = \lim_{r=\infty} \frac{\varrho_1^r}{B_{rk+\lambda}} (A_\lambda - x_2 B_\lambda) \quad (\lambda = 0, 1, \ldots k-1). \tag{14}$$

Wegen (14) muß also insbesondere

$$A_\lambda - x_2 B_\lambda \neq 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots k-1) \tag{15}$$

sein. Von diesen notwendigen Bedingungen kann aber die für $\lambda = k-1$ unterdrückt werden, weil sie von selbst erfüllt ist; in der Tat hat man ja mit Rücksicht auf (6) und (8):

$$A_{k-1} - x_2 B_{k-1} = A_{k-1} - (\varrho_2 - a_k B_{k-2}) = \varrho_1 \neq 0.$$

Ebenso ist aber auch $A_{k-1} - x_1 B_{k-1} = \varrho_2 \neq 0$, so daß aus (13) und (14) speziell für $\lambda = k-1$ folgt:

$$\lim_{r=\infty} \frac{\varrho_2^r}{B_{rk+k-1}} = 0, \quad \lim_{r=\infty} \frac{\varrho_1^r}{B_{rk+k-1}} \neq 0;$$

also durch Division: $\lim\limits_{r=\infty} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^r = 0$. Daher muß $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ sein, oder wenn man statt der ϱ_i die x_i einführt (nach (6)):

$$|x_1 B_{k-1} + a_k B_{k-2}| > |x_2 B_{k-1} + a_k B_{k-2}|. \tag{16}$$

Dadurch ist diejenige der Wurzeln x_1, x_2 charakterisiert, welche gleich dem Kettenbruch ist. Wir wollen nun zeigen, daß die für die Konvergenz notwendigen Bedingungen (15), (16) auch hinreichen, (im Verein mit der stets vorausgesetzten Bedingung $B_{k-1} \neq 0$). In der Tat, sind sie erfüllt, so folgt aus (11) und (12):

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{A_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} - x_1 \frac{B_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} \right) = 0 \tag{17}$$

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{A_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} - x_2 \frac{B_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} \right) = A_\lambda - x_2 B_\lambda \neq 0. \tag{18}$$

Hieraus ergibt sich durch Subtraktion, daß der Grenzwert $\lim\limits_{r=\infty} \frac{B_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r}$ existiert und von Null verschieden ist. Man kann also die Gleichung (17) durch ihn dividieren und erhält dadurch:

$$\lim_{r=\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = x_1.$$

Diese Gleichung ist aber, weil λ jeden der Werte $0, 1, \ldots k-1$ bedeuten darf, gleichbedeutend mit: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = x_1$, womit die Konvergenz bewiesen ist.

Wir wenden uns jetzt dem Fall $x_1 = x_2$, also $\varrho_1 = \varrho_2$ zu. Dann treten die Gleichungen (11a), (12a) an Stelle von (11), (12). Wenn daher für einen bestimmten Wert von λ der Ausdruck $A_\lambda - x_1 B_\lambda \neq 0$ ist, so folgt aus (11a) und (12a), nachdem man durch $r\varrho_1^{r-1}$ dividiert hat:

$$\lim_{r=\infty} \frac{B_{rk+\lambda}}{r\varrho_1^{r-1}} = (A_\lambda - x_1 B_\lambda) B_{k-1} \neq 0$$

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{A_{rk+\lambda}}{r\varrho_1^{r-1}} - x_1 \frac{B_{rk+\lambda}}{r\varrho_1^{r-1}} \right) = 0.$$

Daher, indem man die zweite durch die erste Gleichung dividiert:

$$(19) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = x_1 \qquad (\text{für } A_\lambda - x_1 B_\lambda \neq 0).$$

Ist dagegen $A_\lambda - x_1 B_\lambda = 0$ für einen gewissen Wert von λ, so ist gewiß $B_\lambda \neq 0$, weil sonst B_λ und A_λ beide verschwinden müßten, was sich mit

$$A_{\lambda+1} B_\lambda - B_{\lambda+1} A_\lambda = (-1)^\lambda a_1 a_2 \ldots a_{\lambda+1} \neq 0$$

nicht verträgt. Daher folgt diesmal aus (11a) und (12a), wenn man durch $\varrho_1{}^r$ dividiert,

$$\lim_{r=\infty} \frac{B_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} = B_\lambda \neq 0$$

$$\lim_{r=\infty} \left(\frac{A_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} - x_1 \frac{B_{rk+\lambda}}{\varrho_1^r} \right) = A_\lambda - x_1 B_\lambda = 0.$$

Also wieder durch Division:

$$(20) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = x_1 \qquad (\text{für } A_\lambda - x_1 B_\lambda = 0).$$

Die Gleichungen (19) und (20) zusammengenommen besagen aber soviel wie: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = x_1$, so daß der Kettenbruch jetzt konvergiert. Zusammenfassend erhält man somit

Satz 38. *Der k-gliedrig reinperiodische Kettenbruch mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern*

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|b_0} + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots,$$

dessen Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung A_ν und B_ν seien, konvergiert dann und nur dann, wenn erstens $B_{k-1} \neq 0$ ist, und wenn zweitens die Wurzeln x_1, x_2 der quadratischen Gleichung

$$B_{k-1}x^2 + (a_k B_{k-2} - A_{k-1})x - a_k A_{k-2} = 0$$

entweder einander gleich sind oder den Bedingungen genügen:

$$|B_{k-1}x_1 + a_k B_{k-2}| > |B_{k-1}x_2 + a_k B_{k-2}|$$

$$A_\lambda - x_2 B_\lambda \neq 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-2).$$

Der Wert des Kettenbruches ist alsdann x_1. (*Stolz* **1**, *Pringsheim* **3**, *Perron* **2**.)

Erstes Beispiel. Sind x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung $x^2 - bx - a = 0$, wo $a \neq 0$, so hat der eingliedrig periodische Kettenbruch $b + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \cdots$ den Wert x_1, wenn $x_1 = x_2$ oder $|x_1| > |x_2|$ ist. Dagegen divergiert er, wenn $x_1 \neq x_2$, aber $|x_1| = |x_2|$ ist.

Zweites Beispiel. Die a_ν, b_ν seien reell; die Wurzeln x_1, x_2 aber nicht reell. Dann sind x_1, x_2 konjugiert-komplex; also ist $x_1 \neq x_2$; aber

$$|B_{k-1}x_1 + a_k B_{k-2}| = |B_{k-1}x_2 + a_k B_{k-2}|.$$

Daher divergiert der Kettenbruch, was auch a priori evident ist, da doch ein Kettenbruch mit lauter reellen Elementen unmöglich der nicht reellen Zahl x_1 gleich sein kann.

III. Interessant ist das Verhalten des Kettenbruches, wenn zwar

$$|B_{k-1}x_1 + a_k B_{k-2}| > |B_{k-1}x_2 + a_k B_{k-2}|,$$

also $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ ist, aber für mindestens einen Wert von λ:

$$A_\lambda - x_2 B_\lambda = 0.$$

Dann folgt nämlich aus (12) für diese Werte von λ:

$$A_{rk+\lambda} = x_2 B_{rk+\lambda}.$$

Da $A_{rk+\lambda}$, $B_{rk+\lambda}$ nicht beide Null sein können (weil kein Teilzähler verschwindet), so folgt hieraus: $\frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = x_2$; also gewiß auch

$$\lim_{r=\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = x_2 .$$

Für diejenigen Werte von λ dagegen, für welche $A_\lambda - x_2 B_\lambda \neq 0$ ist, also insbesondere für $\lambda = k - 1$ folgt genau wie oben

$$\lim_{r=\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = x_1 .$$

Daher erhält man

Satz 39. *Wenn die Bedingungen von Satz 38 nur insoweit erfüllt sind, daß zwar* $B_{k-1} \neq 0$, *und*

$$|B_{k-1} x_1 + a_k B_{k-2}| > |B_{k-1} x_2 + a_k B_{k-2}|$$

ist, während für gewisse Werte von λ *der Ausdruck* $A_\lambda - x_2 B_\lambda$ *verschwindet, so oszilliert der Kettenbruch in der Weise, daß*

$$\lim_{r=\infty} \frac{A_{rk+\lambda}}{B_{rk+\lambda}} = \begin{cases} x_1 \text{ für } A_\lambda - x_2 B_\lambda \neq 0, \text{ insbesondere für } \lambda = k-1 \\ x_2 \text{ für } A_\lambda - x_2 B_\lambda = 0 \end{cases}$$

ist.

Die Möglichkeit dieses Divergenzphänomens hat *Thiele* 1 als erster erkannt.

Beispiel.

$$1 + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1-\alpha|}{|1} - \frac{1|}{|1} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1-\alpha|}{|1} - \frac{1|}{|1} + \cdots .$$

Hier ist $k = 3$, $B_2 = 2 - \alpha$; daher eine erste Konvergenzbedingung $\alpha \neq 2$. Die quadratische Gleichung lautet

$$(2 - \alpha) x^2 - 3x + 1 + \alpha = 0,$$

und ihre Wurzeln sind:

$$x' = 1, \quad x'' = \frac{1+\alpha}{2-\alpha} .$$

Weiter ist dann

$$B_2 x' - B_1 = 1 - \alpha, \quad B_2 x'' - B_1 = \alpha .$$

Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ist $x' = x''$, also Konvergenz. Ist der reelle Teil von α gleich $\frac{1}{2}$, aber α selbst nicht reell, so wird

$$x' \neq x'', \quad |B_2 x' - B_1| = |B_2 x'' - B_1|,$$

also Divergenz. Ist der reelle Teil von α kleiner als $\frac{1}{2}$, so ist $|1-\alpha| > |\alpha|$, also muß $x_1 = x'$, $x_2 = x''$ gesetzt werden. Dann ist

$$A_0 - x_2 B_0 = 1 - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} = \frac{1-2\alpha}{2-\alpha} \neq 0$$

$$A_1 - x_2 B_1 = 1 + \alpha - \frac{1+\alpha}{2-\alpha} = \frac{1-\alpha^2}{2-\alpha} \begin{cases} \neq 0 \text{ für } \alpha \neq -1 \\ = 0 \text{ für } \alpha = -1. \end{cases}$$

Daher Konvergenz, nur für $\alpha = -1$ Thielesche Oszillation. Ist endlich der reelle Teil von α größer als $\frac{1}{2}$, so wird $|\alpha| > |1-\alpha|$, also muß jetzt $x_1 = x''$, $x_2 = x'$ gesetzt werden. Dann ist aber $A_0 - x_2 B_0 = 1 - 1 = 0$, also Thielesche Oszillation. Zusammenfassend ergibt sich, wenn mit $\mathfrak{R}(\alpha)$ der reelle Teil von α bezeichnet wird:

1) $\alpha = \frac{1}{2}$: Konvergenz

2) $\mathfrak{R}(\alpha) = \frac{1}{2}$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$: Divergenz

3) $\mathfrak{R}(\alpha) < \frac{1}{2}$, $\alpha \neq -1$: Konvergenz

4) $\alpha = -1$: Divergenz (Thielesche Oszillation)

5) $\mathfrak{R}(\alpha) > \frac{1}{2}$: Divergenz (Thielesche Oszillation außer für $\alpha = 2$).

In jedem Fall der Konvergenz hat der Kettenbruch den Wert 1.

IV. Wenden wir uns jetzt den gemischtperiodischen Kettenbrüchen zu, so ist deren Konvergenzentscheidung leicht auf den vorigen Fall zurückzuführen. Sei nämlich

$$(21) \quad \begin{cases} b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{h-1}|}{|b_{h-1}} + \frac{a_h|}{|b_h} + \cdots \\ \quad + \frac{a_{h+k-1}|}{|b_{h+k-1}} + \frac{a_h|}{|b_h} + \cdots + \frac{a_{h+k-1}|}{|b_{h+k-1}} + \cdots \end{cases}$$

ein gemischtperiodischer Kettenbruch mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern. Wenn er konvergiert, so müssen die beiden reinperiodischen Kettenbrüche

$$(22) \quad b_h + \frac{a_{h+1}|}{|b_{h+1}} + \cdots + \frac{a_{h+k-1}|}{|b_{h+k-1}} + \frac{a_h|}{|b_h} + \cdots,$$

$$(23) \quad b_{h+1} + \frac{a_{h+2}|}{|b_{h+2}} + \cdots + \frac{a_{h+k-1}|}{|b_{h+k-1}} + \frac{a_h|}{|b_h} + \frac{a_{h+1}|}{|b_{h+1}} + \cdots$$

nach Satz 2 noch mindestens im weiteren Sinne konvergieren. Nach Satz 3 muß dann wenigstens einer von ihnen sogar im engeren Sinne konvergieren. Wenn also die Kettenbrüche (22), (23) beide divergieren, so divergiert sicher auch (21). Wenn dagegen einer konvergiert, beispielsweise der Kettenbruch (22), so kann sein Wert ξ_k nach Satz 38 berechnet werden. Nach den Sätzen 1 und 3, Kap. I, wird dann der Kettenbruch (21) unwesentlich divergieren oder konvergieren, je nachdem der endliche Kettenbruch

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}|}{|b_{k-1}} + \frac{a_k|}{|\xi_k}$$

sinnlos ist oder nicht; und sein Wert ist im Konvergenzfall eben gleich diesem endlichen Kettenbruch.

Hiernach läßt sich auch bei gemischtperiodischen Kettenbrüchen die Konvergenzfrage in jedem Fall entscheiden, und der Wert des Kettenbruches, wenn er konvergiert, berechnen.

V. Wir geben zum Schluß noch eine kleine Anwendung der Formeln (11), (12). Nehmen wir nämlich den Kettenbruch

$$(24) \qquad 2\cos\vartheta - \frac{1|}{|2\cos\vartheta} - \frac{1|}{|2\cos\vartheta} - \frac{1|}{|2\cos\vartheta} - \cdots,$$

so ist $k = 1$, also $\varrho_\iota = x_\iota$, und die quadratische Gleichung lautet:

$$x^2 - 2\cos\vartheta \cdot x + 1 = 0;$$

also wird

$$\varrho_1 = x_1 = e^{i\vartheta}, \quad \varrho_2 = x_2 = e^{-i\vartheta}.$$

Daher nach (11) und (12) für $k = 1$, $\lambda = 0$:

$$A_r - e^{i\vartheta} B_r = e^{-ir\vartheta}(2\cos\vartheta - e^{i\vartheta}) = e^{-i(r+1)\vartheta},$$
$$A_r - e^{-i\vartheta} B_r = e^{ir\vartheta}(2\cos\vartheta - e^{-i\vartheta}) = e^{i(r+1)\vartheta}.$$

Also durch Subtraktion:

$$B_r = \frac{e^{i(r+1)\vartheta} - e^{-i(r+1)\vartheta}}{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}} = \frac{\sin(r+1)\vartheta}{\sin\vartheta}.$$

Anderseits haben wir aber am Schluß von § 3 für B_r einen Ausdruck gefunden, der in Anwendung auf den Kettenbruch (24) folgendermaßen lautet:

$$B_r = (2\cos\vartheta)^r - \binom{r-1}{1}(2\cos\vartheta)^{r-2} + \binom{r-2}{2}(2\cos\vartheta)^{r-4} - + \cdots,$$

wo die Reihe soweit fortzusetzen ist, bis sie von selbst abbricht. Durch Gleichsetzung dieser beiden für B_r gefundenen Werte entsteht die bekannte Formel

$$\frac{\sin(r+1)\vartheta}{\sin\vartheta} = (2\cos\vartheta)^r - \binom{r-1}{1}(2\cos\vartheta)^{r-2} + \binom{r-2}{2}(2\cos\vartheta)^{r-4} - \cdots,$$

die sich also auch aus der Kettenbruchlehre gewinnen läßt. Setzt man noch $r-2$ an Stelle von r und subtrahiert die enstehende Gleichung von der vorausgehenden, so entsteht die weitere bekannte Formel

$$2\cos r\vartheta = (2\cos\vartheta)^r - \frac{r}{1}(2\cos\vartheta)^{r-2} + \frac{r}{2}\binom{r-3}{1}(2\cos\vartheta)^{r-4}$$
$$- \frac{r}{3}\binom{r-4}{2}(2\cos\vartheta)^{r-6} + \cdots.$$

§ 56. Limitärperiodische Kettenbrüche.

I. Das bei Satz 38 angegebene erste Beispiel lehrt, daß der Kettenbruch

$$b + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \cdots$$

insbesondere dann konvergieren wird, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\varrho^2 - b\varrho - a = 0$ ungleichen absoluten Betrag haben. Wir wollen jetzt beweisen, daß er noch konvergent bleibt, wenn man seine Elemente in einem hinreichend kleinen Spielraum abändert, und wollen dabei auch die gleichmäßige Konvergenz ins Auge fassen.

Bedeutet ϑ eine positive Zahl kleiner als 1, so ist $1 > \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2} > \vartheta$, also gibt es eine positive Zahl Θ, welche den Ungleichungen $1 > \Theta^2 > \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}$ genügt, und zwar ist dann eo ipso $\Theta^2 > \vartheta$, also a fortiori $\Theta > \vartheta$. Dies vorausgeschickt beweisen wir

Satz 40. *Seien a, b Funktionen von irgend welchen Variabeln in einem gewissen Bereich, und sei überall $a \neq 0$. Sind dann ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung*

$$\varrho^2 - b\varrho - a = 0$$

(also $\varrho_1 \neq 0$, $\varrho_2 \neq 0$), so soll es eine Zahl $\vartheta < 1$ und eine Zahl C geben derart, daß im ganzen Bereich

$$\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| \leqq \vartheta, \quad |\varrho_1| \leqq C$$

ist. Ferner sei Θ eine den Ungleichungen

$$1 > \Theta^2 > \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}$$

genügende Zahl, so daß eo ipso auch $\Theta > \vartheta$ ist. Wenn dann die Elemente des Kettenbruches

$$\left| b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots\right.$$

Funktionen sind, die im ganzen Bereich den Ungleichungen

$$\left|\frac{a_\nu}{a} - 1\right| \leqq (1-\Theta)^3 \qquad (\nu \geqq 1),$$

$$\left|\frac{b_\nu - b}{\varrho_1}\right| \leqq (\Theta - \vartheta)(1-\Theta) \qquad (\nu \geqq 1)$$

genügen, so ist der Kettenbruch im Bereich gleichmäßig konvergent.

Beweis. Es ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 = b \tag{1}$$

$$\varrho_1 \varrho_2 = -a. \tag{2}$$

Nunmehr definieren wir gewisse Funktionen δ_ν, ε_ν durch die Rekursionsformeln

$$\delta_0 = 0, \tag{3}$$

$$\varrho_1 \varrho_2 (1 + \delta_{\nu-1})(1 + \varepsilon_\nu) = -a_\nu \qquad (\nu \geqq 1), \tag{4}$$

$$\varrho_1 (1 + \delta_\nu) + \varrho_2 (1 + \varepsilon_\nu) = b_\nu \qquad (\nu \geqq 1), \tag{5}$$

und zeigen, daß dann im ganzen Bereich

$$|\delta_\nu| < \Theta(1-\Theta) \qquad (\nu \geqq 0) \tag{6}$$

ist. In der Tat ist das ja nach Definition für $\nu = 0$ richtig. Nimmt man aber an, es gelte schon für kleinere Werte von ν, so folgt zunächst aus (4) und (2):

$$(1 + \delta_{\nu-1})(1 + \varepsilon_\nu) = \frac{a_\nu}{a}; \text{ also } \quad \varepsilon_\nu = \frac{\frac{a_\nu}{a} - 1 - \delta_{\nu-1}}{1 + \delta_{\nu-1}}.$$

Daher nach unsern Voraussetzungen:

$$|\varepsilon_\nu| \leqq \frac{\left|\frac{a_\nu}{a} - 1\right| + |\delta_{\nu-1}|}{1 - |\delta_{\nu-1}|} < \frac{(1-\Theta)^3 + \Theta(1-\Theta)}{1 - \Theta(1-\Theta)} = 1 - \Theta. \tag{7}$$

Weiter ist nach (5) und (1):

$$\delta_\nu = \frac{b_\nu - \varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_2 \varepsilon_\nu}{\varrho_1} = \frac{b_\nu - b - \varrho_2 \varepsilon_\nu}{\varrho_1},$$

also nach unsern Voraussetzungen und nach (7):

$$|\delta_\nu| \leqq \left|\frac{b_\nu - b}{\varrho_1}\right| + \left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| \cdot |\varepsilon_\nu| < (\Theta - \vartheta)(1 - \Theta) + \vartheta(1 - \Theta) = \Theta(1 - \Theta),$$

womit die Allgemeingiltigkeit von (6) und zugleich von (7) bewiesen ist.

Die Rekursionsformel für die Näherungsnenner

$$B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \qquad (\nu \geqq 1)$$

nimmt nun nach (4) und (5) die Gestalt an:

$$B_\nu - \varrho_1(1 + \delta_\nu)B_{\nu-1} = \varrho_2(1 + \varepsilon_\nu)(B_{\nu-1} - \varrho_1(1 + \delta_{\nu-1})B_{\nu-2}) \qquad (\nu \geqq 1).$$

Daraus folgt sogleich:

$$\begin{aligned} B_\nu - \varrho_1(1 + \delta_\nu)B_{\nu-1} &= \varrho_2^\nu(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\cdots(1 + \varepsilon_\nu)(B_0 - \varrho_1(1 + \delta_0)B_{-1}) \\ &= \varrho_2^\nu(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)\cdots(1 + \varepsilon_\nu), \end{aligned}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + \delta_0)B_\nu}{\varrho_1^\nu(1 + \delta_0)(1 + \delta_1)\cdots(1 + \delta_\nu)} - \frac{(1 + \delta_0)B_{\nu-1}}{\varrho_1^{\nu-1}(1 + \delta_0)(1 + \delta_1)\cdots(1 + \delta_{\nu-1})} \\ &\qquad = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^\nu \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \delta_1} \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \delta_2} \cdots \frac{1 + \varepsilon_\nu}{1 + \delta_\nu}. \end{aligned}$$

Setzt man hier für ν der Reihe nach die Werte $1, 2, \ldots, \nu$, so folgt durch Addition sogleich

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1 + \delta_1)\cdots(1 + \delta_\nu)} &= 1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \delta_1} + \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \delta_1} \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \delta_2} + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^\nu \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \delta_1} \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \delta_2} \cdots \frac{1 + \varepsilon_\nu}{1 + \delta_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Diese Darstellung[1]) der B_ν benutzen wir vor allem dazu, nachzuweisen, daß die Näherungsbrüche von einer gewissen Ordnung an nicht sinnlos sind, daß also $B_\nu \neq 0$ ist. Zu dem Zweck sei zur Abkürzung

$$(9) \qquad \frac{1 + \varepsilon_\nu}{1 + \delta_\nu} = 1 + \eta_\nu$$

gesetzt, so daß Gleichung (8), wenn man noch auf beiden Seiten die Größe $\sum_{\lambda=0}^{\nu} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^\lambda$ subtrahiert, übergeht in

$$\begin{aligned} &\frac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1 + \delta_1)\cdots(1 + \delta_\nu)} - \sum_{\lambda=0}^{\nu} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^\lambda \\ &\qquad = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^\lambda \{(1 + \eta_1)(1 + \eta_2)\cdots(1 + \eta_\lambda) - 1\}. \end{aligned}$$

---

1) In ganz analoger Weise lassen sich natürlich auch die Näherungszähler A_ν darstellen; doch benötigen wir die betreffende Formel nicht.

Da aber nach Voraussetzung $\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| \leqq \vartheta$, und da anderseits offenbar

$$|(1+\eta_1)(1+\eta_2)\cdots(1+\eta_\lambda)-1| = \left|\sum\eta_i + \sum\eta_i\eta_k + \sum\eta_i\eta_k\eta_l + \cdots\right|$$

$$\leqq \sum|\eta_i| + \sum|\eta_i\eta_k| + \sum|\eta_i\eta_k\eta_l| + \cdots = (1+|\eta_1|)(1+|\eta_2|)\cdots(1+|\eta_\lambda|)-1$$

ist, so ergibt sich aus obiger Gleichung die Abschätzungsformel:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu)} - \dfrac{1-\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1}}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\right| \\ \leqq \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu} \vartheta^\lambda\{(1+|\eta_1|)(1+|\eta_2|)\cdots(1+|\eta_\lambda|)-1\}. \end{array}\right.$$

Nun ist aber weiter nach (9):

$$1+|\eta_\nu| = 1+\left|\frac{1+\varepsilon_\nu}{1+\delta_\nu}-1\right| = 1+\left|\frac{\varepsilon_\nu-\delta_\nu}{1+\delta_\nu}\right| \leqq 1+\frac{|\varepsilon_\nu|+|\delta_\nu|}{1-|\delta_\nu|} = \frac{1+|\varepsilon_\nu|}{1-|\delta_\nu|}.$$

Daher mit Rücksicht auf (6) und (7):

$$1+|\eta_\nu| < \frac{1+(1-\Theta)}{1-\Theta(1-\Theta)} < \frac{1+\frac{1-\Theta}{\Theta}}{1-(1-\Theta)} = \frac{1}{\Theta^2},$$

und folglich:

$$(11)\qquad (1+|\eta_1|)(1+|\eta_2|)\cdots(1+|\eta_\lambda|) < \frac{1}{\Theta^{2\lambda}}.$$

Demnach ergibt sich aus (10), da wir bereits auf Seite 280 bemerkt haben, daß $\Theta^2 > \vartheta$ ist:

$$\left|\frac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu)} - \frac{1-\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1}}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\right| < \sum_{\lambda=1}^{\nu}\vartheta^\lambda\left(\frac{1}{\Theta^{2\lambda}}-1\right) < \sum_{\lambda=0}^{\infty}\vartheta^\lambda\left(\frac{1}{\Theta^{2\lambda}}-1\right)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\frac{\vartheta}{\Theta^2}\right)^\lambda - \sum_{\lambda=0}^{\infty}\vartheta^\lambda = \frac{\Theta^2}{\Theta^2-\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta},$$

und hieraus endlich auch:

$$\left|\frac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu)}\right| > \left|\frac{1-\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1}}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}\right| - \left(\frac{\Theta^2}{\Theta^2-\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta}\right)$$

$$\geqq \frac{1-\vartheta^{\nu+1}}{1+\vartheta} - \left(\frac{\Theta^2}{\Theta^2-\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta}\right).$$

Da nun aber nach Voraussetzung $\Theta^2 > \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}$ ist, so stellt der Ausdruck

$$\frac{1}{1+\vartheta} - \left(\frac{\Theta^2}{\Theta^2-\vartheta} - \frac{1}{1-\vartheta}\right) = (1+\vartheta^2)\frac{\Theta^2 - \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}}{(1-\vartheta^2)(\Theta^2-\vartheta)}$$

eine positive Zahl dar. Bezeichnen wir diese zur Abkürzung mit σ, so geht die letzte Ungleichung über in:

$$\left|\frac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu)}\right| > \sigma - \frac{\vartheta^{\nu+1}}{1+\vartheta}.$$

Hiernach muß es gewiß einen Index n geben derart, daß für $\nu \geqq n$ im ganzen Bereich die Ungleichung

$$\left|\frac{B_\nu}{\varrho_1^\nu(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu)}\right| > \frac{\sigma}{2}$$

gilt. Also ist gewiß $B_\nu \neq 0$ für $\nu \geqq n$; und indem man zum reziproken Wert übergeht, kommt (wegen $\delta_0 = 0$):

$$(12)\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\varrho_1^\nu(1+\delta_0)(1+\delta_1)\cdots(1+\delta_\nu)}{B_\nu}\right| < \dfrac{2}{\sigma}, \\[2ex] \left|\dfrac{\varrho_1^{\nu+1}(1+\delta_1)(1+\delta_2)\cdots(1+\delta_{\nu+1})}{B_{\nu+1}}\right| < \dfrac{2}{\sigma} \end{cases} \qquad (\nu \geqq n).$$

Außerdem ist aber

$$\left|\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1}\frac{1+\varepsilon_1}{1+\delta_1}\,\frac{1+\varepsilon_2}{1+\delta_2}\cdots\frac{1+\varepsilon_{\nu+1}}{1+\delta_{\nu+1}}\right| = \left|\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1}(1+\eta_1)(1+\eta_2)\cdots(1+\eta_{\nu+1})\right|$$
$$\leqq \vartheta^{\nu+1}(1+|\eta_1|)(1+|\eta_2|)\cdots(1+|\eta_{\nu+1}|);$$

also nach (11)

$$(13)\qquad \left|\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{\nu+1}\frac{1+\varepsilon_1}{1+\delta_1}\,\frac{1+\varepsilon_2}{1+\delta_2}\cdots\frac{1+\varepsilon_{\nu+1}}{1+\delta_{\nu+1}}\right| < \vartheta^{\nu+1}\frac{1}{\Theta^{2(\nu+1)}} = \left(\frac{\vartheta}{\Theta^2}\right)^{\nu+1}.$$

Bildet man das Produkt der drei Ungleichungen (12), (13), so erhält man für $\nu \geqq n$:

$$\left|\frac{(\varrho_1\varrho_2)^{\nu+1}(1+\delta_0)(1+\varepsilon_1)(1+\delta_1)(1+\varepsilon_2)\cdots(1+\delta_\nu)(1+\varepsilon_{\nu+1})}{B_\nu B_{\nu+1}}\right|$$
$$< |\varrho_1|\,\frac{4}{\sigma^2}\left(\frac{\vartheta}{\Theta^2}\right)^{\nu+1},$$

wofür man aber nach (4) und, weil im ganzen Bereich $|\varrho_1| \leqq C$ sein sollte, auch schreiben kann:

$$\left|\frac{a_1 a_2 \cdots a_{\nu+1}}{B_\nu B_{\nu+1}}\right| < \frac{4|\varrho_1|}{\sigma^2}\left(\frac{\vartheta}{\Theta^2}\right)^{\nu+1} \leqq \frac{4C}{\sigma^2}\left(\frac{\vartheta}{\Theta^2}\right)^{\nu+1}.$$

Dies gilt im ganzen Bereich für $\nu \geqq n$. Daraus ergibt sich, da $\Theta^2 > \vartheta$ ist, die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\frac{A_n}{B_n} + \sum_{\nu=n}^{\infty}\left(\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_\nu}{B_\nu}\right) = \frac{A_n}{B_n} + \sum_{\nu=n}^{\infty}\frac{(-1)^\nu a_1 a_2 \cdots a_{\nu+1}}{B_\nu B_{\nu+1}},$$

also die gleichmäßige Konvergenz des Kettenbruches. W z. b. w.

II. Wir untersuchen jetzt speziell solche Kettenbrüche, deren Teilzähler und -Nenner gewissen Grenzwerten

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a\,, \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b$$

zustreben. Solche Kettenbrüche heißen „limitärperiodisch". Für sie gelten die folgenden Konvergenztheoreme:

Satz 41. *Der limitärperiodische Kettenbruch* $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$, *bei dem*

$$a_\nu \neq 0, \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = a, \quad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = b$$

ist, konvergiert mindestens im weitern Sinne, wenn die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 *der quadratischen Gleichung* $\varrho^2 - b\varrho - a = 0$ *ungleiche absolute Beträge haben. Der Kettenbruch* $b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots$ *konvergiert dann, wenn* ν *genügend groß ist, auch im engern Sinne, und es ist*

$$\lim_{\nu=\infty}\left(b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots\right) = \varrho_1,$$

wenn ϱ_1 *die absolut größere der Wurzeln* ϱ_1, ϱ_2 *bedeutet.*

Satz 42. *Seien* $a_1, a_2, a_3, \ldots,$ *und* $b_1, b_2, b_3, \ldots,$ *zwei Serien von Funktionen von irgend welchen Variabeln in einem gewissen Bereich, welche daselbst gleichmäßig gegen zwei Grenzfunktionen* $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = a$, $\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b$ *konvergieren. Ferner existiere eine positive Zahl* $\vartheta < 1$ *und zwei positive Zahlen* c, C *derart, daß im ganzen Bereich*

$$c \leqq |\varrho_1| \leqq C, \qquad \left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| \leqq \vartheta$$

ist, wobei ϱ_1, ϱ_2 *die Wurzeln der quadratischen Gleichung* $\varrho^2 - b\varrho - a = 0$ *bedeuten.*

Dies vorausgesetzt gibt es eine Zahl n *derart, daß für* $\nu \geqq n$ *der*

Kettenbruch $b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots$ *im ganzen Bereich gleichmäßig konvergiert.*

Um zunächst Satz 42 zu beweisen, sei G_1 die Gesamtheit derjenigen Stellen des Bereiches, an denen $|a| < \frac{1}{8} c^2(1-\vartheta)^2$ ist; die Gesamtheit der übrigen Stellen sei G_2. Dann genügt es zu zeigen, daß die Aussage des Satz 42 in G_1 und in G_2 je für sich richtig ist. Nun folgt aus unsern Voraussetzungen:

$$|b| = |\varrho_1 + \varrho_2| \geqq |\varrho_1| - |\varrho_2| \geqq \varrho_1|(1-\vartheta) \geqq c(1-\vartheta),$$

also speziell in G_1:

$$\left|\frac{a}{b}\right| < \frac{1}{8}\frac{c^2(1-\vartheta)^2}{|b|} \leqq \frac{1}{8}c(1-\vartheta)$$

$$\left|\frac{a}{b^2}\right| < \frac{1}{8}\frac{c^2(1-\vartheta)^2}{|b|^2} \leqq \frac{1}{8}.$$

Da die Grenzwerte $\lim a_\nu = a$, $\lim b_\nu = b$ gleichmäßig erreicht werden sollen, so gibt es demnach einen Index n derart, daß für $\nu \geqq n$ überall in G_1 die Ungleichungen gelten:

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{b_{\nu+1}}\right| < \frac{1}{4}c(1-\vartheta), \quad \left|\frac{a_{\nu+\lambda}}{b_{\nu+\lambda-1}b_{\nu+\lambda}}\right| < \frac{1}{4} \qquad (\lambda \geqq 2).$$

Der Kettenbruch

$$b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots \tag{14}$$

erfüllt demnach für $\nu \geqq n$ in G_1 die Bedingungen des Satz 30 (mit $p_\nu = 2$).

In G_2 dagegen ist nach Voraussetzung

$$|a| \geqq \frac{1}{8}c^2(1-\vartheta)^2, \quad c \leqq |\varrho_1| \leqq C, \quad \left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right| \leqq \vartheta,$$

woraus man in Verbindung damit, daß die a_ν, b_ν gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktionen a, b konvergieren, leicht ersieht, daß der Kettenbruch (14) für große ν in G_2 die Bedingungen von Satz 40 erfüllt. Somit ist er sowohl in G_1 als in G_2 gleichmäßig konvergent. W. z. b. w.

Aus Satz 42 folgt nun unter Zuziehung des Satz 2 ohne weiteres auch Satz 41, abgesehen von der darin enthaltenen Behauptung

$$\lim_{\nu=\infty}\left(b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots\right) = \varrho_1.$$

Um auch diese zu beweisen, betrachten wir den Kettenbruch

$$g_0(x) + \frac{f_1(x)|}{|g_1(x)} + \frac{f_2(x)|}{|g_2(x)} + \cdots,$$

dessen Elemente wir in folgender Weise als Funktionen von x im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definieren: Jede von Null verschiedene Zahl x des Intervalles läßt sich auf eine Weise in die Form setzen:

$$x = \frac{\vartheta}{\lambda} + \frac{1-\vartheta}{\lambda+1},$$

wo λ eine positive ganze Zahl, und $0 < \vartheta \leqq 1$ sein soll; dann sei

$$f_\nu(x) = \vartheta a_{\nu+\lambda} + (1-\vartheta) a_{\nu+\lambda+1}; \quad g_\nu(x) = \vartheta b_{\nu+\lambda} + (1-\vartheta) b_{\nu+\lambda+1};$$

außerdem: $f_\nu(0) = a$; $g_\nu(0) = b$. Da $\lim\limits_{\lambda=\infty} a_\lambda = a$, $\lim\limits_{\lambda=\infty} b_\lambda = b$, so sind hiernach die f_ν, g_ν im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ stetige Funktionen von x. Wenn ferner $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine, und n eine so große Zahl bedeutet, daß für $\nu \geqq n$

$$|a_\nu - a| < \varepsilon, \qquad |b_\nu - b| < \varepsilon$$

ist, so wird für alle von Null verschiedenen x des Intervalles, sobald $\nu \geqq n$ ist, auch

$$|f_\nu(x) - a| = |\vartheta(a_{\nu+\lambda} - a) + (1-\vartheta)(a_{\nu+\lambda+1} - a)| < \vartheta\varepsilon + (1-\vartheta)\varepsilon = \varepsilon,$$

und erst recht $|f_\nu(0) - a| = |a - a| < \varepsilon$ sein. Daher ist im ganzen Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig

$$\lim_{\nu=\infty} f_\nu(x) = a;$$

und ebenso auch gleichmäßig

$$\lim_{\nu=\infty} g_\nu(x) = b.$$

Nach Satz 42 gibt es demnach eine Zahl n derart, daß der Kettenbruch

$$g_n(x) + \frac{f_{n+1}(x)|}{|g_{n+1}(x)} + \frac{f_{n+2}(x)|}{|g_{n+2}(x)} + \cdots$$

für $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert. Seine Näherungsbrüche sind also von einer gewissen Ordnung an für kein x sinnlos und sind, da die Elemente stetige Funktionen von x sind, ebenfalls stetig. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz ist dann nach einem bekannten Satz auch ihre Grenzfunktion stetig für $0 \leqq x \leqq 1$. Da diese also insbesondere auch an der Stelle $x = 0$ (nach rechts) stetig ist, so folgt:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(g_n\left(\frac{1}{\nu}\right)+\frac{f_{n+1}\left(\frac{1}{\nu}\right)|}{|g_{n+1}\left(\frac{1}{\nu}\right)}+\frac{f_{n+2}\left(\frac{1}{\nu}\right)|}{|g_{n+2}\left(\frac{1}{\nu}\right)}+\cdots\right)$$

$$=g_n(0)+\frac{f_{n+1}(0)|}{|g_{n+1}(0)}+\frac{f_{n+2}(0)|}{|g_{n+2}(0)}+\cdots,$$

oder mit Rücksicht auf die Definition der Funktionen f, g:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(b_{n+\nu}+\frac{a_{n+\nu+1}|}{|b_{n+\nu+1}}+\frac{a_{n+\nu+2}|}{|b_{n+\nu+2}}+\cdots\right)=b+\frac{a|}{|b}+\frac{a|}{|b}+\cdots.$$

Der rechts stehende Kettenbruch ist aber gleich ϱ_1 (siehe Satz 38, erstes Beispiel), und damit ist der Beweis von Satz 41 beendet.

III. Eine Anwendung ist

Satz 43. *Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Konstanten mit dem Grenzwert a, und x eine komplexe Variable. Wenn dann $a=0$, so gibt es zu jedem Bereich $|x|\leqq R$ eine Zahl n derart, daß für $\nu\geqq n$ der Kettenbruch*

$$\frac{a_\nu x|}{|1}+\frac{a_{\nu+1}x|}{|1}+\frac{a_{\nu+2}x|}{|1}+\cdots$$

gleichmäßig konvergiert. Wenn aber $a\neq 0$, so führe man in der komplexen Zahlenebene vom Punkt $-\frac{1}{4a}$ aus einen geradlinigen Schnitt in der dem Nullpunkt entgegengesetzten Richtung ins Unendliche. Dann gibt es für jeden Bereich $|x|\leqq R$, der außerdem diesem Schnitt nicht beliebig nahe kommt, eine Zahl n derart, daß für $\nu\geqq n$ der obige Kettenbruch wieder gleichmäßig konvergiert. (*van Vleck* **4**, *Pringsheim* **5**.)

Indem wir zum Beweis den Satz 42 anwenden, handelt es sich um die quadratische Gleichung:

$$\varrho^2-\varrho-ax=0.$$

Fig. 1.

Ist $a=0$, so sind ihre Wurzeln $\varrho_1=1$, $\varrho_2=0$, also für $|x|\leqq R$ die Bedingungen von Satz 42 erfüllt.

Für $a\neq 0$ ist in Fig. 1 ein Bereich der gedachten Art gezeichnet. Da die beiden Wurzeln

$$\varrho_1=\frac{1+\sqrt{1+4ax}}{2},\quad \varrho_2=\frac{1-\sqrt{1+4ax}}{2}$$

stetige Funktionen von x sind und bloß auf dem genannten Schnitt gleichen absoluten Betrag haben (indem nämlich der Radikand bloß auf diesem Schnitt negativ reell ist), und da in dem fraglichen Bereich überall

$$|\varrho_1| \leqq \frac{1+\sqrt{1+4|ax|}}{2} \leqq \frac{1+\sqrt{1+4|a|R}}{2},$$

$$|\varrho_1| > \frac{1}{2}(|\varrho_1| + |\varrho_2|) \geqq \frac{1}{2}|\varrho_1 + \varrho_2| = \frac{1}{2}$$

ist, so gibt es zwei positive Zahlen c, C und eine Zahl ϑ zwischen 0 und 1, für welche wieder die Bedingungen des Satz 42 erfüllt sind.

§ 57. Die Gleichung $\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$ als Folge des Rekursionssystems: $x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}$.

I. Die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung des Kettenbruchs $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots$ seien wieder A_ν, B_ν. Wenn dann gewisse Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ dem Rekursionssystem

$$(1)\qquad \begin{cases} x_0 = b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 = b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ x_2 = b_2 x_3 + a_3 x_4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

genügen, so ist, wie wir schon in § 5, I sahen,

$$(2)\qquad \begin{cases} x_0 = A_{\nu-1} x_\nu + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1} & (\nu \geqq 1), \\ x_1 = B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1} & (\nu \geqq 1). \end{cases}$$

Wenn daher für einen gewissen Wert von n speziell $a_{n+1} = 0$ ist, so folgt für $\nu = n + 1$:

$$x_0 = A_n x_{n+1}, \quad x_1 = B_n x_{n+1},$$

also auch

$$x_0 B_{n-1} - x_1 A_{n-1} = (A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n) x_{n+1} = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots a_n x_{n+1},$$

so daß x_0, x_1 gewiß nicht beide verschwinden können, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und x_{n+1} von Null verschieden sind. Daraus folgt sogleich

Satz 44. *Aus dem System von $n + 1$ Gleichungen*

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$
$$x_n = b_n x_{n+1}$$

folgt, falls $x_1 \neq 0$ ist,

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} = \frac{x_0}{x_1}.$$

Ist aber $x_1 = 0$ und $x_{n+1} \neq 0$, so ist dieser Kettenbruch sinnlos; wenn dann außerdem noch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Null verschieden sind, so kann auch x_0 nicht verschwinden.

Wenn das System (1) unendlich viele Gleichungen enthält, dabei aber niemals $a_{n+1}=0$ ist, so legt Satz 44 die Frage nahe, ob aus (1) etwa

$$\frac{x_0}{x_1}=b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots \text{ in infin.} \tag{3}$$

geschlossen werden kann. In der älteren Literatur wird dieser Schluß von (1) auf (3) geradezu als selbstverständlich angesehen, und die Gleichung (3) als genügend bewiesen erachtet, wenn gewisse Zahlen $x_2, x_3, \ldots$ in independenter Form gefunden sind, die das System (1) befriedigen. Daß aber ein solcher Schluß durchaus nicht ohne weiteres erlaubt ist, sieht man leicht ein. Denn sei (3) ein beliebiger Kettenbruch mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern, und seien x_0, x_1 zwei ganz willkürliche Zahlen, nur $x_1 \neq 0$. Dann lassen sich sukzessive die Zahlen $x_2, x_3, \ldots$ derart berechnen, daß das Rekursionssystem (1) befriedigt wird. Wäre nun (3) eine Folge von (1), so würde sich ergeben, daß der Kettenbruch jeder willkürlich vorgegebenen Zahl $\frac{x_0}{x_1}$ gleich sein müßte, was doch absurd ist.

Falls außer den a_ν auch die x_ν für $\nu \geqq 1$ von Null verschieden sind, kann man leicht eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß (3) aus (1) folgt. Es gilt nämlich

Satz 45. *Die Zahlen a_ν, b_ν, x_ν mögen dem Rekursionssystem*

$$x_\nu=b_\nu x_{\nu+1}+a_{\nu+1}x_{\nu+2} \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

genügen, und außerdem sei $a_\nu \neq 0$, $x_\nu \neq 0$ für $\nu \geqq 1$. Dies vorausgesetzt, ist die Gleichung

$$\frac{x_0}{x_1}=b_0+\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\cdots$$

dann und nur dann richtig, wenn die unendliche Reihe

$$\frac{1}{a_1x_1x_2}-\frac{1}{a_1a_2x_2x_3}+\frac{1}{a_1a_2a_3x_3x_4}-\frac{1}{a_1a_2a_3a_4x_4x_5}+-\cdots$$

in der Weise divergiert, daß die absolut genommene Summe ihrer ν ersten Glieder mit ν beliebig groß wird.

Beweis. Aus den Gleichungen (2) folgt, wenn man die erste mit $B_{\nu-1}$, die zweite mit $A_{\nu-1}$ multipliziert und sie dann voneinander subtrahiert:

$$\left\{\begin{aligned} x_0B_{\nu-1}-x_1A_{\nu-1}&=a_\nu(A_{\nu-2}B_{\nu-1}-A_{\nu-1}B_{\nu-2})x_{\nu+1}\\ &=(-1)^{\nu-1}a_1a_2\ldots a_\nu x_{\nu+1};\end{aligned}\right. \tag{4}$$

also auch

$$\frac{x_0}{x_1}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}=\frac{(-1)^{\nu-1}a_1a_2\ldots a_\nu x_{\nu+1}}{x_1B_{\nu-1}}. \tag{5}$$

Es handelt sich demnach um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1}}{B_{\nu-1}} = 0 \tag{6}$$

ist. Nun läßt sich aber die zweite der Gleichungen (2) folgendermaßen schreiben

$$\frac{(-1)^{\nu-1} B_{\nu-1}}{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1}} - \frac{(-1)^{\nu-2} B_{\nu-2}}{a_1 a_2 \ldots a_{\nu-1} x_\nu} = \frac{(-1)^{\nu-1} x_1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_\nu x_{\nu+1}};$$

setzt man hier für ν die Werte $2, 3, \ldots, \nu$, so folgt durch Addition der entstehenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(-1)^{\nu-1} B_{\nu-1}}{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1}} \\ &= x_1 \left(\frac{1}{a_1 x_1 x_2} - \frac{1}{a_1 a_2 x_2 x_3} + \cdots + (-1)^{\nu-1} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_\nu x_{\nu+1}}\right). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Die Beziehung (6) wird daher dann und nur dann statthaben, wenn der auf der rechten Seite von (7) stehende Ausdruck mit wachsendem ν seinem absoluten Werte nach beliebig groß wird, womit Satz 45 bewiesen ist.

II. Die Anwendung des Satz 45 setzt eine so genaue Kenntnis des infinitären Verhaltens der a_ν, x_ν voraus, wie man sie in den meisten Fällen nicht haben wird; auch wäre die Bedingung, daß für $\nu \geqq 1$ alle x_ν von Null verschieden sein müssen, bei Anwendungen vielfach lästig. Es ist daher wichtig, einige bequemer zu handhabende Bedingungen kennen zu lernen, die für den Schluß von (1) auf (3) wenigstens hinreichend sind. Eine Reihe solcher Kriterien fassen wir zusammen in

Satz 46. *In dem unendlichen Rekursionssystem*

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

seien alle a_ν und wenigstens ein x_ν von Null verschieden. Dann gilt gewiß die Formel

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots, \qquad \textit{falls } x_1 \neq 0$$

bzw.

$$x_0 \neq 0, \quad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = \textit{unwesentlich divergent}, \quad \textit{falls } x_1 = 0,$$

sofern wenigstens eine der folgenden vier Bedingungen erfüllt ist:

A. *Alle a_ν, b_ν, x_ν sind positiv, und der Kettenbruch konvergiert.*

B. *Für genügend große ν ist*

$$|x_\nu| \geqq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}| \qquad \textit{(Perron 3).}$$

C. *Man kennt gewisse Zahlen $y_1, y_2, \ldots$, welche ebenfalls dem Rekursionssystem $y_\nu = b_\nu y_{\nu+1} + a_{\nu+1} y_{\nu+2}$ genügen, und für die zugleich* $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{x_\nu}{y_\nu} = 0$ *ist.*

D. *Es ist* $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$, $\lim\limits_{\nu=\infty} b_\nu = b$, *und außerdem besteht, wenn die Wurzeln der Gleichung* $\varrho^2 = b\varrho + a$ *ungleiche absolute Beträge haben, und* ϱ_2 *die absolut kleinere ist, die Beziehung*

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \begin{cases} < \frac{1}{|\varrho_2|} & \textit{für } \varrho_2 \neq 0 \\ = \textit{endlich für } \varrho_2 = 0. \end{cases}$$

Wir bemerken zunächst, es ist hier im Gegensatz zu Satz 45 garnicht ausgeschlossen, daß einzelne x_ν verschwinden (außer im Fall A, wo ausdrücklich das Gegenteil verlangt ist). Jedoch können für keinen Index n die beiden Zahlen x_n, x_{n+1} zugleich verschwinden. Dann würde nämlich aus der Gleichung

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}$$

für $\nu = n-1, n-2, \ldots, 0$ der Reihe nach folgen: $x_{n-1} = 0$, $x_{n-2} = 0$, $\ldots$, $x_0 = 0$; ebenso für $\nu = n, n+1, \ldots$, weil alle $a_\nu \neq 0$ sind: $x_{n+2} = 0$, $x_{n+3} = 0, \ldots$. Es wären also alle $x_\nu = 0$, gegen die Voraussetzung. Damit ist insbesondere bereits gezeigt, daß für $x_1 = 0$ stets $x_0 \neq 0$ ist. Wir beweisen jetzt die vier Kriterien gesondert.

Beweis zu A. Wenn alle a_ν, b_ν, x_ν positiv sind, so gilt das gleiche von den A_ν, B_ν, und die aus (2) hervorgehende Gleichung

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{A_{\nu-1} x_\nu + a_\nu A_{\nu-2} x_{\nu+1}}{B_{\nu-1} x_\nu + a_\nu B_{\nu-2} x_{\nu+1}}$$

lehrt dann, daß $\frac{x_0}{x_1}$ zwischen $\frac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2}}$ und $\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}$ liegt. Der Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu}$ kann also, wenn er existiert, nicht von $\frac{x_0}{x_1}$ verschieden sein.

Beweis zu B. Wir nehmen zunächst an, die geforderten Ungleichungen

(a) $$|x_\nu| \geqq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}|$$

seien schon von $\nu = 1$ an erfüllt. Da wir bereits bemerkten, daß $x_{\nu+1}$ und $x_{\nu+2}$ nicht zugleich verschwinden können, folgt hieraus gewiß: $|x_\nu| > 0$ für $\nu \geqq 1$. Es ist nun

$$|x_\nu| = |b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}| \leqq |b_\nu x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}|.$$

Vergleicht man dies mit (a), so kommt, weil $|x_{\nu+1}| > 0$ ist:

$$|b_\nu| \geqq 1 + |a_\nu| \qquad \text{für } \nu \geqq 1.$$

Hieraus ergibt sich genau wie auf Seite 255:

$$|B_\nu| - |B_{\nu-1}| \geqq |a_1 a_2 \ldots a_\nu|;$$

also auch, wenn man für ν die Werte $1, 2, \ldots, \nu$ setzt und die entstehenden Ungleichungen addiert:

$$\text{(b)} \qquad |B_\nu| \geqq 1 + |a_1| + |a_1 a_2| + \cdots + |a_1 a_2 \ldots a_\nu|.$$

Anderseits ist nach (a)

$$|x_\nu| > (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}|;$$

also auch, wenn man $\nu = 1, 2, \ldots, \nu$ setzt und bei jeder folgenden Gleichung das Resultat in die vorausgehende einträgt:

$$\text{(c)} \qquad |x_1| > (1 + |a_1|)(1 + |a_2|) \ldots (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}|.$$

Aus (c) und (b) folgt weiter:

$$\left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1}}{x_1 B_{\nu-1}}\right| < \frac{|a_1 a_2 \ldots a_\nu|}{(1+|a_1|)(1+|a_2|)\cdots(1+|a_\nu|)\,|B_{\nu-1}|} \begin{cases} < |a_1 a_2 \ldots a_\nu| \\ < \dfrac{1}{|B_{\nu-1}|}. \end{cases}$$

Von den zwei Ausdrücken der rechten Seite nähert sich aber wegen (b) wenigstens einer mit wachsendem ν der Null; also wird

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1}}{x_1 B_{\nu-1}} = 0,$$

was aber nach (5) gleichbedeutend ist mit

$$\frac{x_0}{x_1} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Gehen wir jetzt zu dem Fall über, daß die Ungleichungen (a) erst von $\nu = n + 1$ an erfüllt sind, so ist nach dem Bewiesenen jedenfalls

$$\text{(d)} \qquad \frac{x_n}{x_{n+1}} = b_n + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \cdots.$$

Anderseits lehrt Formel (11), Kap. I:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n\ |}{\left|\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right.} = \frac{A_{n-1}\dfrac{x_n}{x_{n+1}} + a_n A_{n-2}}{B_{n-1}\dfrac{x_n}{x_{n+1}} + a_n B_{n-2}}$$

$$= \frac{A_{n-1} x_n + a_n A_{n-2} x_{n+1}}{B_{n-1} x_n + a_n B_{n-2} x_{n+1}};$$

also wegen (2), angewandt für $\nu = n$:

$$\text{(e)} \qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \cdots + \frac{a_{n-1}|}{|b_{n-1}} + \frac{a_n|}{\left|\frac{x_n}{x_{n+1}}\right.} = \begin{cases} \frac{x_0}{x_1} \text{ für } x_1 \neq 0 \\ \text{sinnlos für } x_1 = 0. \end{cases}$$

Nach den Sätzen 1 und 3, Kap. I folgt aber aus (d) und (e), weil alle $a_\nu \neq 0$ sein sollten:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = \begin{cases} \frac{x_0}{x_1} \text{ für } x_1 \neq 0 \\ \text{unwesentlich divergent für } x_1 = 0. \end{cases}$$

W. z. b. w.

Beweis zu C. Nach (4) ist

$$x_0 B_{\nu-1} - x_1 A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots a_\nu x_{\nu+1},$$

und analog erhält man dann

$$y_0 B_{\nu-1} - y_1 A_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1} a_1 a_2 \ldots a_\nu y_{\nu+1}.$$

Wegen $a_\nu \neq 0$ und $\lim \frac{x_\nu}{y_\nu} = 0$ folgt hieraus:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_0 B_{\nu-1} - x_1 A_{\nu-1}}{y_0 B_{\nu-1} - y_1 A_{\nu-1}} = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit y_0 bzw. y_1 und subtrahiert dann beiderseits x_0 bzw. x_1, so kommt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{(x_0 y_1 - x_1 y_0) A_{\nu-1}}{y_0 B_{\nu-1} - y_1 A_{\nu-1}} = -x_0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{(x_0 y_1 - x_1 y_0) B_{\nu-1}}{y_0 B_{\nu-1} - y_1 A_{\nu-1}} = -x_1.$$

Durch Division folgt hieraus, da x_0, x_1 nicht beide verschwinden können:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \frac{x_0}{x_1}, \qquad \text{falls } x_1 \neq 0;$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu-1}}{A_{\nu-1}} = \frac{x_1}{x_0} = 0, \quad \text{falls } x_1 = 0. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Beweis zu D. Nach Satz 41 ist der Kettenbruch

$$\xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}|}{|b_{\nu+1}} + \frac{a_{\nu+2}|}{|b_{\nu+2}} + \cdots$$

für genügend große ν konvergent, und außerdem ist nach dem gleichen Satz

$$\lim_{\nu=\infty} \xi_\nu = \varrho_1,$$

wenn ϱ_1 die absolut größere Wurzel der Gleichung $\varrho^2 = b\varrho + a$ bedeutet. Wegen der Voraussetzung

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \begin{cases} < \dfrac{1}{|\varrho_2|} & \text{für } \varrho_2 \neq 0 \\ = \text{endlich} & \text{für } \varrho_2 = 0 \end{cases}$$

gibt es eine positive Zahl δ derart, daß für hinreichend große ν

$$|x_\nu| < \frac{1}{(|\varrho_2| + \delta)^\nu}$$

wird. Da außerdem $\lim a_\nu = a = -\varrho_1\varrho_2$, $\lim \xi_\nu = \varrho_1$ ist, so folgt: $\lim \frac{a_\nu}{\xi_\nu} = -\varrho_2$; also für genügend große ν gewiß

$$\left|\frac{a_\nu}{\xi_\nu}\right| < |\varrho_2| + \frac{\delta}{2}.$$

Die beiden letzten Ungleichungen mögen etwa für $\nu > n$ gelten; dann folgt aus der letzten noch:

$$\left|\frac{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_\nu}{\xi_{n+1} \xi_{n+2} \cdots \xi_\nu}\right| < \left(|\varrho_2| + \frac{\delta}{2}\right)^{\nu-n}.$$

Aus den Gleichungen

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}, \qquad \xi_\nu = b_\nu + \frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} \qquad (\nu \geqq n),$$

deren letztere aus der Definition von ξ_ν mit Hilfe von Satz 1, Kap. I hervorgeht, folgt nun

$$x_\nu - \xi_\nu x_{\nu+1} = -\frac{a_{\nu+1}}{\xi_{\nu+1}} (x_{\nu+1} - \xi_{\nu+1} x_{\nu+2}) \qquad (\nu \geqq n);$$

also, wenn man für ν die Werte $n, n+1, \ldots \nu - 1$ setzt und bei jeder folgenden Gleichung das Resultat in die vorausgehende einträgt:

$$x_n - \xi_n x_{n+1} = (-1)^{\nu-n} \frac{a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_\nu}{\xi_{n+1} \xi_{n+2} \cdots \xi_\nu} (x_\nu - \xi_\nu x_{\nu+1}).$$

Schätzt man die Terme der rechten Seite mittels der gewonnenen Ungleichungen ab, so kommt:

$$|x_n - \xi_n x_{n+1}| < \left(|\varrho_2| + \frac{\delta}{2}\right)^{\nu-n} \left(\frac{1}{(|\varrho_2| + \delta)^\nu} + \frac{|\xi_\nu|}{(|\varrho_2| + \delta)^{\nu+1}}\right).$$

Hier wird nun mit wachsendem ν, weil $|\xi_\nu|$ wegen $\lim \xi_\nu = \varrho_1$ endlich bleibt, die rechte Seite beliebig klein. Da aber die linke gar nicht von ν

abhängt, so muß sie verschwinden; daraus folgt, weil x_n, x_{n+1} nicht beide Null sein können: $\xi_n = \frac{x_n}{x_{n+1}}$; oder also nach der Definition von ξ_n:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = b_n + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \cdots.$$

Hieraus schließt man aber genau wie oben beim Beweis zu B:

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots = \begin{cases} \frac{x_0}{x_1} \text{ für } x_1 \neq 0 \\ \text{unwesentlich divergent für } x_1 = 0. \end{cases}$$

Damit ist Satz 46 vollständig bewiesen.

III. Wir geben hierzu einige Beispiele.

Erstes Beispiel. Wir setzen für positive x und reelle α:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u} u^{\beta - 1}}{(1 + xu)^\alpha} du \qquad \text{für } \beta > 0, \\ \varphi(\alpha, 0) = 1. \end{cases}$$

Dann erhält man für $\beta > 0$ durch partielle Integration:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}}{(1 + xu)^\alpha} d(u^\beta)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \int\limits_0^\infty u^\beta \left(\frac{e^{-u}}{(1 + xu)^\alpha} + \frac{\alpha x e^{-u}}{(1 + xu)^{\alpha + 1}} \right) du,$$

also

$$(9) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta + 1) + \alpha x \varphi(\alpha + 1, \beta + 1).$$

Diese Formel gilt aber auch noch für $\beta = 0$; denn in der Tat ist

$$\varphi(\alpha, 1) + \alpha x \varphi(\alpha + 1, 1) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-u}}{(1 + xu)^\alpha} + \frac{\alpha x e^{-u}}{(1 + xu)^{\alpha + 1}} \right) du$$

$$= - \left[\frac{e^{-u}}{(1 + xu)^\alpha} \right]_{u=0}^\infty = 1 = \varphi(\alpha, 0).$$

Weiter hat man für $\beta > -1$ nach Definition:

$$\varphi(\alpha, \beta + 1) - \varphi(\alpha + 1, \beta + 1) = \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \int\limits_0^\infty \left(\frac{e^{-u}}{(1 + xu)^\alpha} - \frac{e^{-u}}{(1 + xu)^{\alpha + 1}} \right) u^\beta du$$

$$= \frac{x}{\Gamma(\beta + 1)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u} u^{\beta + 1}}{(1 + xu)^{\alpha + 1}} du;$$

also

$$(10)\quad \varphi(\alpha, \beta+1) = \varphi(\alpha+1, \beta+1) + (\beta+1)x\varphi(\alpha+1, \beta+2).$$

Aus (9) und (10) ergibt sich das Rekursionssystem:

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\varphi(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta+1) + \alpha x\varphi(\alpha+1, \beta+1)\\ &\varphi(\alpha, \beta+1) = \varphi(\alpha+1, \beta+1) + (\beta+1)x\varphi(\alpha+1, \beta+2)\\ &\varphi(\alpha+1, \beta+1) = \varphi(\alpha+1, \beta+2) + (\alpha+1)x\varphi(\alpha+2, \beta+2)\\ &\varphi(\alpha+1, \beta+2) = \varphi(\alpha+2, \beta+2) + (\beta+2)x\varphi(\alpha+2, \beta+3)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Da alle φ nach ihrer Definition positiv sind, so folgt hieraus nach Satz 46, Bedingung A:

$$\frac{\varphi(\alpha+n, \beta+n)}{\varphi(\alpha+n, \beta+n+1)} = 1 + \frac{(\alpha+n)x|}{|1} + \frac{(\beta+n+1)x|}{|1} + \frac{(\alpha+n+1)x|}{|1} + \frac{(\beta+n+2)x|}{|1} + \frac{(\alpha+n+2)x|}{|1} + \cdots,$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet, für die $\alpha + n > 0$ ist. Dann hat nämlich der Kettenbruch lauter positive Elemente und ist konvergent (nach Satz 10). Aus (11) folgt aber auch

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta+1)} = 1 + \frac{\alpha x|}{|1} + \frac{(\beta+1)x|}{|1} + \cdots + \frac{(\alpha+n-1)x|}{|1} + \frac{(\beta+n)x|}{\left|\dfrac{\varphi(\alpha+n, \beta+n)}{\varphi(\alpha+n, \beta+n+1)}\right.},$$

falls kein Teilzähler verschwindet; also in Verbindung mit der vorigen Gleichung, nach Satz 1, Kap. I:

$$(12)\left\{\begin{aligned} &\frac{\varphi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta+1)} = 1 + \frac{\alpha x|}{|1} + \frac{(\beta+1)x|}{|1} + \frac{(\alpha+1)x|}{|1} + \frac{(\beta+2)x|}{|1} + \cdots\\ &\qquad \text{für } \beta \geqq 0,\ x > 0,\ \alpha \text{ reell},\ \alpha \neq 0, -1, -2, \ldots \end{aligned}\right.$$

(*Nielsen* 1). Übrigens bleibt diese Formel auch für $\alpha = 0, -1, -2, \cdots$ noch richtig, sofern man dann den Kettenbruch bei dem verschwindenden Teilzähler abbricht; dann kann nämlich auf das System (11) der Satz 44 angewandt werden.

Speziell für $\beta = 0$ folgt aus (12), wenn man den reziproken Wert nimmt:

$$\varphi(\alpha, 1) = \frac{1|}{|1} + \frac{\alpha x|}{|1} + \frac{1x|}{|1} + \frac{(\alpha+1)x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{(\alpha+2)x|}{|1} + \cdots.$$

Nun ist nach Definition: $\varphi(\alpha, 1) = \int\limits_0^\infty e^{-u}(1 + xu)^{-\alpha} du$; also, wenn man die Substitution $1 + xu = xv$ macht:

$$\varphi(\alpha, 1) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{-v+\frac{1}{x}} x^{-\alpha} v^{-\alpha} dv = x^{-\alpha} e^{\frac{1}{x}} \int\limits_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{-v} v^{-\alpha} dv.$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung ein und setzt noch $x = \frac{1}{z}$, so kommt nach Division durch z die von *Legendre* 2 angegebene Formel:

$$(13)\quad \begin{cases} z^{\alpha-1} e^{z} \int\limits_{z}^{\infty} e^{-v} v^{-\alpha} dv = \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha+1|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{\alpha+2|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \cdots \\ \qquad (z > 0,\ \alpha = \text{reell}). \end{cases}$$

Speziell für $\alpha = 1$, wenn man in dem Integral die Substitution $e^{-v} = t$ macht:

$$(14)\quad -e^{z} \int\limits_0^{e^{-z}} \frac{dt}{\log t} = \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{2|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{3|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \cdots \quad (z>0)$$

(*Soldner* **1**, *Nielsen* **1**).

Ferner für $\alpha = \frac{1}{2}$, $v = t^2$, $z = \xi^2$, nach Multiplikation mit ξ^2:

$$(15)\qquad 2\xi e^{\xi^2} \int\limits_{\xi}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1|}{|1} + \frac{\frac{1}{2\xi^2}|}{|1} + \frac{\frac{2}{2\xi^2}|}{|1} + \frac{\frac{3}{2\xi^2}|}{|1} + \cdots \quad (\xi > 0)$$

(*Laplace* **1**, *Jacobi* **2**, *Seidel* **1**). Diesen Formeln kommt neben der theoretischen eine praktische Bedeutung zu, da sie zur numerischen Berechnung der Integrale, deren letzteres bekanntlich in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine Rolle spielt, sehr geeignet sind. Denn da die Kettenbrüche (14), (15) lauter positive Elemente haben, so liegt ihr Wert zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen (siehe Satz 11, oder oben den Beweis zu Satz 46, A).

Schließlich sei die durch Kontraktion (Formel 7, § 43) aus (13) hervorgehende Formel erwähnt:

$$(16)\quad \begin{cases} z^{\alpha-1} e^{z} \int\limits_{z}^{\infty} e^{-v} v^{-\alpha} dv = \frac{1|}{|z+\alpha} - \frac{1\cdot\alpha|}{|z+\alpha+2} - \frac{2(\alpha+1)|}{|z+\alpha+4} \\ \qquad - \frac{3(\alpha+2)|}{|z+\alpha+6} - \cdots \quad (z>0,\ \alpha = \text{reell}), \end{cases}$$

welche für $z = 1$ von *Tannery* **1**, für beliebige z von *Laguerre* **7** bewiesen wurde.

Zweites Beispiel. Wir setzen für beliebige γ und x:

$$(17)\quad \Psi_1(\gamma; x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)}\frac{x}{1!} + \frac{1}{\Gamma(\gamma+2)}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{\Gamma(\gamma+3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

wobei $\frac{1}{\Gamma(\varrho)} = 0$ zu setzen ist für $\varrho = 0, -1, -2, \cdots$. $\Psi_1(\gamma; x)$ ist eine ganze transzendente Funktion von x. Man verifiziert dann leicht die Formel

$$\Psi_1(\gamma; x) = \gamma\,\Psi_1(\gamma+1; x) + x\,\Psi_1(\gamma+2; x),$$

die sogleich das Rekursionssystem liefert:

$$(18)\quad \begin{cases} \Psi_1(\gamma+\nu; x) = (\gamma+\nu)\,\Psi_1(\gamma+\nu+1; x) + x\,\Psi_1(\gamma+\nu+2; x) \\ \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Wenn wir also zeigen können, daß bei konstantem $x (\neq 0)$ für genügend große ν die Ungleichung

$$(19)\quad \begin{aligned} |\Psi_1(\gamma+\nu; x)| &\geqq (1 + |x|)\,|\Psi_1(\gamma+\nu+1; x)| \\ &\quad + |x| \cdot |\Psi_1(\gamma+\nu+2; x)| > 0 \end{aligned}$$

gilt, so ergibt Satz 46, Bedingung B, die Formel:

$$(20)\quad \frac{\Psi_1(\gamma; x)}{\Psi_1(\gamma+1; x)} = \gamma + \frac{x\,|}{|\,\gamma+1} + \frac{x\,|}{|\,\gamma+2} + \frac{x\,|}{|\,\gamma+3} + \cdots \quad (x \neq 0)$$

mit der Einschränkung, daß, wenn x eine von Null verschiedene Nullstelle des Nenners ist, dann der Zähler nicht verschwindet und der Kettenbruch unwesentlich divergiert. Nun folgt aber aus (17) für $\nu > |\gamma|$:

$$\begin{aligned} |\Psi_1(\gamma+\nu; x)\,\Gamma(\gamma+\nu) - 1| &= \left|\frac{1}{\gamma+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{1}{(\gamma+\nu)(\gamma+\nu+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots\right| \\ &< \frac{1}{|\gamma+\nu|}\left(\frac{|x|}{1!} + \frac{|x|^2}{2!} + \frac{|x|^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{e^{|x|}-1}{|\gamma+\nu|}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$(21)\quad \lim_{\nu=\infty} \Psi_1(\gamma+\nu; x)\,\Gamma(\gamma+\nu) = 1;$$

also auch, indem man ν durch $\nu+1$ bzw. $\nu+2$ ersetzt und die entstehenden Gleichungen durch (21) dividiert,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\Psi_1(\gamma+\nu+1; x)}{\Psi_1(\gamma+\nu; x)} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\Psi_1(\gamma+\nu+2; x)}{\Psi_1(\gamma+\nu; x)} = 0.$$

Hieraus geht hervor, daß Ungleichung (19) für genügend große ν sicher richtig ist, womit auch Formel (20) bewiesen ist (*Bessel* **1**, *Schlömilch* **1**, *Graf* **1**, *van Vleck* **3**, *Perron* **3**). Übrigens sieht man ohne weiteres, daß (20) auch für $x = 0$ gilt, sofern dann γ keine negative ganze Zahl ist.

Es sei noch bemerkt, daß $\Psi_1(\gamma; x)$ im wesentlichen die Besselsche Funktion $J_{\gamma-1}$ ist. Zwischen beiden besteht der Zusammenhang:

$$J_{\gamma-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\gamma-1} \Psi_1\left(\gamma; -\frac{x^2}{4}\right).$$

Drittes Beispiel. Die Gleichung $\varrho^2 = b\varrho + a$ habe die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 und es sei $|\varrho_1| > |\varrho_2|$. Setzt man dann $x_\nu = \varrho_1^{-\nu}$, $y_\nu = \varrho_2^{-\nu}$, so ist

$$x_\nu = bx_{\nu+1} + ax_{\nu+2}, \quad y_\nu = by_{\nu+1} + ay_{\nu+2} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und außerdem

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_\nu}{y_\nu} = 0.$$

Nach Satz 46, Bedingung C, folgt also:

$$b + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \frac{a|}{|b} + \cdots = \frac{x_0}{x_1} = \frac{1}{\varrho_1^{-1}} = \varrho_1,$$

in Übereinstimmung mit dem ersten Beispiel zu Satz 38.

Beispiele für das Kriterium D des Satz 46 werden wir in Kap. XI kennen lernen.

Achtes Kapitel.

Kettenbrüche der Form $1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots$.

§ 58. Korrespondenz von Potenzreihe und Kettenbruch.

I. Wir untersuchen in diesem Kapitel endliche und unendliche Kettenbrüche der speziellen Form

$$(1) \qquad 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots,$$

wobei die a_ν von Null verschiedene Konstanten sein sollen, während x eine komplexe Variable bedeutet; wir nennen die a_ν die Koeffizienten des Kettenbruches. Sind $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung von (1), wobei wir die Argumente x auch manchmal unterdrücken, so ist nach den Euler-Mindingschen Formeln (§ 3):

$$A_\nu(x) = 1 + x \sum_{i}^{0,\,\nu-1} a_{i+1} + x^2 \sum_{i<k}^{0,\,\nu-2} a_{i+1} a_{k+2} + x^3 \sum_{i<k<l}^{0,\,\nu-3} a_{i+1} a_{k+2} a_{l+3} + \cdots$$

$$B_\nu(x) = 1 + x \sum_{i}^{1,\,\nu-1} a_{i+1} + x^2 \sum_{i<k}^{1,\,\nu-2} a_{i+1} a_{k+2} + x^3 \sum_{i<k<l}^{1,\,\nu-3} a_{i+1} a_{k+2} a_{l+3} + \cdots.$$

Hieraus ersieht man, daß $A_{2\nu}$, $B_{2\nu}$, $A_{2\nu-1}$, $B_{2\nu+1}$ Polynome vom höchstens ν^{ten} Grad mit dem konstanten Glied 1 sind, und zwar ist, wenn

$$(2) \qquad \begin{cases} A_{2\nu}(x) = 1 + \alpha_{\nu,1} x + \alpha_{\nu,2} x^2 + \cdots + \alpha_{\nu,\nu} x^\nu \\ B_{2\nu}(x) = 1 + \beta_{\nu,1} x + \beta_{\nu,2} x^2 + \cdots + \beta_{\nu,\nu} x^\nu \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} A_{2\nu-1}(x) = 1 + \gamma_{\nu,1} x + \gamma_{\nu,2} x^2 + \cdots + \gamma_{\nu,\nu} x^\nu \\ B_{2\nu-1}(x) = 1 + \delta_{\nu,1} x + \delta_{\nu,2} x^2 + \cdots + \delta_{\nu,\nu-1} x^{\nu-1} \end{cases}$$

gesetzt wird, speziell

$$(4) \qquad \alpha_{\nu,\nu} = a_2 a_4 \cdots a_{2\nu} \left(1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + \cdots + \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}}\right),$$

$$(5) \qquad \beta_{\nu,\nu} = a_2 a_4 \cdots a_{2\nu},$$

(6) $$\gamma_{\nu,\nu} = a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1},$$

(7) $$\delta_{\nu,\nu-1} = a_3 a_5 \cdots a_{2\nu-1}\left(1 + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_2 a_4}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu-2}}{a_3 a_5 \cdots a_{2\nu-1}}\right).$$

Daher sind $A_{2\nu-1}$ und $B_{2\nu}$ genau vom ν^{ten} Grad, während bei $A_{2\nu}$ und $B_{2\nu-1}$ der Grad sich unter Umständen erniedrigen kann. Auf alle Fälle besteht aber

Satz 1. *Ein endlicher Kettenbruch der Form* $1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_n x|}{|1}$, *wo* $a_\nu \neq 0$, *stellt eine rationale Funktion von* x *dar und ist nur in den Polen dieser Funktion sinnlos.*

Zum Beweis müssen wir nur noch zeigen, daß diejenigen Werte von x, für die der Kettenbruch sinnlos wird, d. h. die Nullstellen von $B_n(x)$, nicht auch Nullstellen von $A_n(x)$ sind, sondern also wirklich Pole der Funktion. Dies folgt aber sogleich aus der Relation

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \cdots a_n x^n;$$

denn nach dieser Formel könnte als gemeinsame Nullstelle von A_n und B_n nur der Wert $x = 0$ in Betracht kommen, welcher aber gar keine Nullstelle von B_n ist, da dieses Polynom das konstante Glied 1 hat.

Wenden wir auf den Kettenbruch (1) die Formel (33), Kap. I an, so kommt

$$\frac{A_{\nu+\lambda-1}}{B_{\nu+\lambda-1}} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\lambda x^\lambda B_{\nu-1,\lambda}}{B_{\nu+\lambda-1} B_{\lambda-1}},$$

wo nun außer $B_{\nu+\lambda-1}$ und $B_{\lambda-1}$ auch $B_{\nu-1,\lambda}$ ein Polynom von x mit dem konstanten Glied 1 ist. Wenn man daher beide Seiten dieser Formel nach Potenzen von x entwickelt, so erkennt man, daß die Entwicklung von $\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}$ mit der Entwicklung jedes folgenden Näherungsbruches bis zur Potenz $x^{\lambda-1}$ einschließlich übereinstimmt, während die Koeffizienten von x^λ verschieden ausfallen. Setzt man daher

$$\frac{A_{\lambda-1}(x)}{B_{\lambda-1}(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots c_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + d_\lambda x^\lambda + \cdots,$$

so ist für $\nu \geqq 1$ auch

$$\frac{A_{\nu+\lambda-1}(x)}{B_{\nu+\lambda-1}(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{\lambda-1} x^{\lambda-1} + c_\lambda x^\lambda + \cdots,$$

wobei aber $c_\lambda \neq d_\lambda$, und es ergibt sich, wenn man $\lambda + 1$ statt λ schreibt,

Satz 2. *Zu jedem Kettenbruch der Form* $1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots$, *wo* $a_\nu \neq 0$, *gibt es eine Potenzreihe* $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$, *die, wenn der*

Kettenbruch unendlich ist, dadurch eindeutig bestimmt ist, daß sie für jedes λ mit der Taylorschen Reihe für den Näherungsbruch λ^{ter} Ordnung $\frac{A_\lambda(x)}{B_\lambda(x)}$ bis zur Potenz x^λ einschließlich übereinstimmt; die Koeffizienten von $x^{\lambda+1}$ weichen dann notwendig voneinander ab. Wenn dagegen der Kettenbruch endlich ist und etwa n Teilbrüche hat, so besitzt die Taylorsche Reihe

$$\frac{A_n(x)}{B_n(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

die obige Eigenschaft für jedes $\lambda < n$.[1])

Wir nennen die so bestimmte Potenzreihe, die im Fall der Endlichkeit einfach die Taylorsche Reihe für die durch den Kettenbruch dargestellte rationale Funktion ist, die mit dem Kettenbruch korrespondierende Reihe (auch für $c_0 \neq 1$, vgl. Fußnote 1)). Ob sie für gewisse x konvergiert, ist vorläufig ganz gleichgültig. Wir beweisen nun

Satz 3. *Zwei endliche oder unendliche Kettenbrüche*

$$K = 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots, \quad K' = 1 + \frac{a_1' x|}{|1} + \frac{a_2' x|}{|1} + \cdots$$

haben nur dann die gleiche korrespondierende Reihe, wenn sie identisch sind.[2])

Sind sie nämlich nicht identisch, so sei λ der kleinste Index, für den $a_\lambda \neq a_\lambda'$ ist. Dann hat man, wenn die Näherungsbrüche ν^{ter} Ordnung von K und K' mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ bzw. $\frac{A_\nu'}{B_\nu'}$ bezeichnet werden,

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{\lambda-1} a_\lambda x^\lambda}{B_\lambda B_{\lambda-1}},$$

$$\frac{A_\lambda'}{B_\lambda'} - \frac{A_{\lambda-1}'}{B_{\lambda-1}'} = (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{\lambda-1} a_\lambda' x^\lambda}{B_\lambda' B_{\lambda-1}'}.$$

Hieraus findet man, da nach der Bedeutung von λ offenbar $\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = \frac{A_{\lambda-1}'}{B_{\lambda-1}'}$ ist, durch Subtraktion, daß die Taylorschen Reihen für $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ und $\frac{A_\lambda'}{B_\lambda'}$ im Koeffizienten von x^λ voneinander abweichen. Die mit K und K' korrespondierenden Reihen stimmen aber bis zu x^λ inklusive mit $\frac{A_\lambda}{B_\lambda}$ bzw. $\frac{A_\lambda'}{B_\lambda'}$ überein, weichen also ebenfalls im Koeffizienten von x^λ voneinander ab.

---

1) Offenbar könnte statt des Anfangsgliedes 1 von Kettenbruch und Reihe auch irgendeine andere Konstante c_0 stehen; doch ist es für viele Untersuchungen bequem, gerade $c_0 = 1$ zu setzen.

2) K, K' sind hier lediglich abkürzende Symbole für die betreffenden Kettenbrüche, keineswegs ihre Werte; die Kettenbrüche sind gar nicht als konvergent vorausgesetzt.

Damit ist Satz 3 bereits bewiesen, falls beide Kettenbrüche unendlich sind. Falls aber einer endlich ist, bleibt noch der Fall

$$K = 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1} x|}{|1};$$

$$K' = 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1} x|}{|1} + \frac{a'_\lambda x|}{|1} + \cdots$$

zu erledigen. Dann ist aber die mit K korrespondierende Reihe gleich $\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}$, während die mit K' korrespondierende wieder im Koeffizienten von x^λ davon abweicht; womit der Beweis von Satz 3 beendet ist. Als Spezialfall heben wir hervor

Satz 4. *Die beiden endlichen Kettenbrüche*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_n x|}{|1}; \quad 1 + \frac{a'_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a'_m x|}{|1} \qquad (a_\nu \neq 0,\ a'_\nu \neq 0)$$

stellen nur dann die gleiche rationale Funktion von x dar, wenn sie identisch sind; also $n = m$; $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2, \ldots, a_n = a'_n$.

II. Nach Satz 3 gibt es für jede Potenzreihe höchstens einen Kettenbruch, für den sie die korrespondierende Reihe ist. Diesen werden wir daher auch den mit der Reihe korrespondierenden Kettenbruch nennen. Wir nennen weiter eine Potenzreihe seminormal, wenn wirklich ein korrespondierender Kettenbruch, und zwar ein unendlicher existiert. Es gilt dann

Satz 5. *Die Potenzreihe $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ ist dann und nur dann seminormal, wenn die Determinanten*

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 c_2 \cdots & c_\nu \\ c_2 c_3 \cdots & c_{\nu+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_\nu c_{\nu+1} \cdots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix}, \quad \psi_\nu = \begin{vmatrix} c_2 c_3 \cdots & c_\nu \\ c_3 c_4 \cdots & c_{\nu+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_\nu c_{\nu+1} \cdots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, \ldots) \qquad\qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

alle von Null verschieden sind, und zwar haben dann die Koeffizienten des korrespondierenden Kettenbruches die folgenden Werte:

$$a_1 = \varphi_1; \quad a_{2\nu} = -\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu \psi_\nu}, \quad a_{2\nu+1} = -\frac{\varphi_{\nu+1}\psi_\nu}{\psi_{\nu+1}\varphi_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei $\varphi_0 = 1$, $\psi_1 = 1$ zu setzen ist. (*Heilermann* **1, 2**, *Muir* **3, 4**, *Frobenius* **1**, *Stieltjes* **4a**.)[1])

---

1) Vor Einbürgerung der Determinanten haben *Kausler* 1, 2, *Viscovatoff* 1 und *Schubert* 1 zur Berechnung der Koeffizienten a_ν brauchbare rekursorische Formeln angegeben.

Beweis. Wenn die Reihe $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ die korrespondierende des unendlichen Kettenbruches (1) sein soll, so ist

$$\frac{A_\lambda(x)}{B_\lambda(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_\lambda x^\lambda + d_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots.$$

Setzt man hier für λ die Werte 2ν und $2\nu - 1$ ein, so kommt nach (2) und (3) für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(8)\qquad \frac{1 + \alpha_{\nu,1} x + \cdots + \alpha_{\nu,\nu} x^\nu}{1 + \beta_{\nu,1} x + \cdots + \beta_{\nu,\nu} x^\nu} = 1 + c_1 x + \cdots + c_{2\nu} x^{2\nu} + c' x^{2\nu+1} + \cdots$$

$$(9)\qquad \frac{1 + \gamma_{\nu,1} x + \cdots + \gamma_{\nu,\nu} x^\nu}{1 + \delta_{\nu,1} x + \cdots + \delta_{\nu,\nu-1} x^{\nu-1}} = 1 + c_1 x + \cdots + c_{2\nu-1} x^{2\nu-1} + c'' x^{2\nu} + \cdots.$$

Wenn man nun in (8) mit dem Nenner heraufmultipliziert und die Koeffizienten von $x^{\nu+1}, x^{\nu+2}, \ldots, x^{2\nu}$ beiderseits gleichsetzt, erhält man:

$$\begin{cases} 0 = c_1 \beta_{\nu,\nu} + c_2 \beta_{\nu,\nu-1} + \cdots + c_\nu \beta_{\nu,1} + c_{\nu+1}, \\ 0 = c_2 \beta_{\nu,\nu} + c_3 \beta_{\nu,\nu-1} + \cdots + c_{\nu+1} \beta_{\nu,1} + c_{\nu+2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = c_\nu \beta_{\nu,\nu} + c_{\nu+1} \beta_{\nu,\nu-1} + \cdots + c_{2\nu-1} \beta_{\nu,1} + c_{2\nu}, \end{cases}$$

und hieraus durch Elimination von $\beta_{\nu,1}, \beta_{\nu,2}, \ldots, \beta_{\nu,\nu-1}$:

$$(10)\qquad \beta_{\nu,\nu} \varphi_\nu = (-1)^\nu \psi_{\nu+1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo φ_ν, ψ_ν die in Satz 5 angegebenen Determinanten sind. Ebenso folgt aus (9), wenn man mit dem Nenner heraufmultipliziert und dann die Koeffizienten von $x^\nu, x^{\nu+1}, \ldots, x^{2\nu-1}$ beiderseits gleichsetzt,

$$\begin{cases} \gamma_{\nu,\nu} = c_1 \delta_{\nu,\nu-1} + c_2 \delta_{\nu,\nu-2} + \cdots + c_{\nu-1} \delta_{\nu,1} + c_\nu, \\ 0 = c_2 \delta_{\nu,\nu-1} + c_3 \delta_{\nu,\nu-2} + \cdots + c_\nu \delta_{\nu,1} + c_{\nu+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 = c_\nu \delta_{\nu,\nu-1} + c_{\nu+1} \delta_{\nu,\nu-2} + \cdots + c_{2\nu-2} \delta_{\nu,1} + c_{2\nu-1}, \end{cases}$$

und hieraus durch Elimination von $\delta_{\nu,1}, \delta_{\nu,2}, \ldots, \delta_{\nu,\nu-1}$:

$$(11)\qquad \gamma_{\nu,\nu} \psi_\nu = (-1)^{\nu-1} \varphi_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit $\psi_1 = 1$. Setzt man in (10), (11) für $\beta_{\nu,\nu}, \gamma_{\nu,\nu}$ die Werte aus (5), (6) ein, so kommt

$$(12)\qquad a_2 a_4 \cdots a_{2\nu} \varphi_\nu = (-1)^\nu \psi_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$(13)\qquad a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1} \psi_\nu = (-1)^{\nu-1} \varphi_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Nun ist $\psi_1 = 1 \neq 0$. Wenn aber für einen gewissen Wert von ν feststeht, daß $\psi_\nu \neq 0$ ist, so folgt aus (13): $\varphi_\nu \neq 0$ und daher aus (12) auch: $\psi_{\nu+1} \neq 0$. Folglich müssen alle ψ_ν, φ_ν von Null verschieden sein. Ferner ergibt sich aus (12) und (13) sogleich:

$$(14) \qquad a_1 = \varphi_1; \quad a_{2\nu} = -\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu \psi_\nu}, \quad a_{2\nu+1} = -\frac{\varphi_{\nu+1}\psi_\nu}{\psi_{\nu+1}\varphi_\nu} \quad (\nu \geqq 1)$$

mit $\varphi_0 = 1$.

Daß auch umgekehrt, wenn alle φ_ν, ψ_ν von Null verschieden sind, die Reihe wirklich immer die korrespondierende eines unendlichen Kettenbruches ist, ergibt sich nun folgendermaßen: Jedenfalls kann nach dem Bewiesenen nur derjenige Kettenbruch in Frage kommen, dessen Koeffizienten gerade die Werte (14) haben, und es handelt sich daher um den Nachweis, daß die korrespondierende Reihe dieses Kettenbruches gerade die gegebene Reihe ist. Wäre es aber eine andere mit Koeffizienten c_λ', so würde man, von dieser Reihe ausgehend, ebenfalls zu den Gleichungen (14) gelangen, wobei nur alle c_λ durch c_λ' ersetzt sind. Das ist aber nicht möglich, falls wir zeigen können, daß die Gleichungen (14) bei gegebenen a_λ die c_λ eindeutig bestimmen. Nun folgt in der Tat aus $a_1 = \varphi_1 = c_1$ zunächst: $c_1 = a_1$; nimmt man dann an, $c_1, c_2, \ldots c_{2\nu-1}$ seien bereits eindeutig gefunden, so ergibt sich aus

$$-\frac{\psi_{\nu+1}\varphi_{\nu-1}}{\varphi_\nu \psi_\nu} = -a_{2\nu}$$

eindeutig $c_{2\nu}$; denn hier kommt $c_{2\nu}$ bloß in der Determinante $\psi_{\nu+1}$ vor und zwar linear mit dem von Null verschiedenen Koeffizienten ψ_ν. Sodann erhält man aus

$$\frac{\varphi_{\nu+1}\psi_\nu}{\psi_{\nu+1}\varphi_\nu} = -a_{2\nu+1}$$

auch eindeutig den Wert von $c_{2\nu+1}$. Denn $c_{2\nu+1}$ kommt hier nur in der Determinante $\varphi_{\nu+1}$ vor und zwar linear mit dem von Null verschiedenen Koeffizienten φ_ν. Die Gleichungen (14) lassen also in der Tat nur eine Auflösung nach den c_ν zu, womit der Beweis von Satz 5 beendet ist.

III. Wir bezeichnen die Korrespondenz von Reihe und Kettenbruch durch das Zeichen $\sim$; also

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots.$$

Wenn die Reihe in der Umgebung des Nullpunktes konvergiert, also daselbst eine analytische Funktion $f(x)$ darstellt, so schreiben wir auch

$$f(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots,$$

womit natürlich nicht gesagt ist, daß der Kettenbruch nun ebenfalls gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert. Man bemerke übrigens, daß, wenn der Kettenbruch unendlich ist, $f(x)$ niemals eine rationale Funktion sein kann. Dann wäre nämlich die Reihe rekurrent und folglich würden die Determinanten φ_ν, ψ_ν für genügend große ν verschwinden.

Für die Anwendungen ist noch der folgende Satz wichtig:

Satz 6. *Die Korrespondenz*

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots$$

zieht für beliebige $\varrho \neq 0$ stets die beiden folgenden nach sich:

$$1 + \varrho c_1 x + \varrho c_2 x^2 + \varrho c_3 x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{\varrho a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots,$$

$$1 + c_1 \varrho x + c_2 \varrho^2 x^2 + c_3 \varrho^3 x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{a_1 \varrho x|}{|1} + \frac{a_2 \varrho x|}{|1} + \frac{a_3 \varrho x|}{|1} + \cdots.$$

In der Tat ergibt sich die erste sogleich, wenn man die Gleichung

$$\frac{A_\lambda(x)}{B_\lambda(x)} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_\lambda x^\lambda + d_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots$$

mit ϱ multipliziert und dann die Zahl $1 - \varrho$ hinzuaddiert. Die zweite ergibt sich, wenn man in derselben Gleichung x durch ϱx ersetzt.

§ 59. Die Kettenbrüche von Gauß und Heine.

I. Der Satz 5 liefert zwar zu jeder seminormalen Potenzreihe explizit die Koeffizienten des korrespondierenden Kettenbruches; doch ist die Anwendung der betreffenden Formeln in der Praxis meist recht unbequem. Dagegen führt ein dem Euklidischen Algorithmus nachgebildetes Divisionsverfahren oft viel einfacher zum Ziel. Es sei

$$\mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots, \tag{1}$$

$$\mathfrak{P}_1(x) \sim 1 + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \frac{a_4 x|}{|1} + \cdots, \tag{2}$$

wobei $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$ lediglich abkürzende Symbole für die korrespondierenden Potenzreihen sind, die analytische Funktionen darstellen können, aber nicht müssen. Bezeichnet man mit A_ν, B_ν bzw. $A_{\nu,1}$, $B_{\nu,1}$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung des Kettenbruches (1) bzw. (2), so ist für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ formal:

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{A_\lambda}{B_\lambda} + x^{\lambda+1}\mathfrak{Q}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{P}_1 = \frac{A_{\lambda-1,1}}{B_{\lambda-1,1}} + x^\lambda \mathfrak{Q}', \tag{4}$$

20*

wo auch $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}'$ Potenzreihen sind. Anderseits lehren die Formeln (27), Kap. I bei Anwendung auf den Kettenbruch (1):

$$\frac{A_\lambda}{B_\lambda} = 1 + a_1 x \frac{B_{\lambda-1,1}}{A_{\lambda-1,1}}. \tag{5}$$

Setzt man das in (3) ein, so kommt:

$$\mathfrak{P}_0 - 1 = a_1 x \frac{B_{\lambda-1,1}}{A_{\lambda-1,1}} + x^{\lambda+1}\mathfrak{Q},$$

und daher nach Multiplikation mit (4):

$$(\mathfrak{P}_0 - 1)\mathfrak{P}_1 = a_1 x + x^{\lambda+1}\mathfrak{Q}'', \tag{6}$$

wo auch $\mathfrak{Q}''$ eine Potenzreihe ist, die aber, wie wir zeigen werden, identisch verschwindet. Die Gleichung (6) sagt nämlich aus, daß in der formal gebildeten Potenzreihe

$$(\mathfrak{P}_0 - 1)\mathfrak{P}_1 - a_1 x \tag{7}$$

die Koeffizienten von $x^0, x^1, x^2, \ldots x^\lambda$ verschwinden. Da aber λ ein ganz beliebiger Index ist, und die Reihe (7) von λ gar nicht abhängt, so ist sie identisch Null. Also ist auch formal

$$\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x}{\mathfrak{P}_1(x)}.$$

Setzt man allgemeiner

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) \sim 1 + \frac{a_{\lambda+1}x|}{|1} + \frac{a_{\lambda+2}x|}{|1} + \frac{a_{\lambda+3}x|}{|1} + \cdots, \tag{8}$$

so erhält man entsprechend das System von formalen Identitäten:

$$\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x}{\mathfrak{P}_1(x)}, \quad \mathfrak{P}_1(x) = 1 + \frac{a_2 x}{\mathfrak{P}_2(x)}, \quad \mathfrak{P}_2(x) = 1 + \frac{a_3 x}{\mathfrak{P}_3(x)}, \cdots, \tag{9}$$

welches, wenn der Kettenbruch (1) endlich ist und das letzte Glied $\frac{a_n x|}{|1}$ hat, mit der Gleichung $\mathfrak{P}_n(x) = 1$ endet. Wir zeigen nun, daß auch umgekehrt, wenn zwischen einer Serie von Potenzreihen $\mathfrak{P}_0(x)$, $\mathfrak{P}_1(x)$, $\mathfrak{P}_2(x), \ldots$ die formalen Identitäten (9) bestehen, daraus die Korrespondenz (1) gefolgert werden kann. In der Tat folgt aus (9) formal

$$\mathfrak{P}_0 = 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_{\lambda-1}x|}{|1} + \frac{a_\lambda x|}{|\mathfrak{P}_\lambda} = \frac{\mathfrak{P}_\lambda A_{\lambda-1} + a_\lambda x A_{\lambda-2}}{\mathfrak{P}_\lambda B_{\lambda-1} + a_\lambda x B_{\lambda-2}}. \tag{10}$$

Schließt das System (9) mit der Gleichung $\mathfrak{P}_n(x) = 1$, so folgt aus (10) für $\lambda = n$: $\mathfrak{P}_0 = \frac{A_n}{B_n}$, womit für diesen Fall unsere Behauptung be-

wiesen ist. Ist das System (9) aber unbegrenzt, so folgt für alle λ aus (10):

$$\mathfrak{P}_0 - \frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}} = \frac{a_\lambda x(A_{\lambda-2}B_{\lambda-1} - A_{\lambda-1}B_{\lambda-2})}{B_{\lambda-1}(\mathfrak{P}_\lambda B_{\lambda-1} + a_\lambda x B_{\lambda-2})}$$

$$= (-1)^{\lambda-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_\lambda x^\lambda}{B_{\lambda-1}(\mathfrak{P}_\lambda B_{\lambda-1} + a_\lambda x B_{\lambda-2})}.$$

Hier steht aber im Nenner der rechten Seite eine Potenzreihe mit dem konstanten Glied 1; also besagt diese Gleichung, daß die Taylorsche Reihe für $\frac{A_{\lambda-1}(x)}{B_{\lambda-1}(x)}$ bis zur $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Potenz einschließlich mit $\mathfrak{P}_0(x)$ übereinstimmt. Das heißt aber, weil λ beliebig ist, es besteht die Korrespondenz (1); ebenso allgemeiner auch (8), und wir erhalten den

Satz 7. *Aus der Korrespondenz*

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots$$

folgt die Existenz von gewissen Potenzreihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$, *für welche das System von formalen Identitäten besteht:*

$$\text{(b)} \quad \mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x}{\mathfrak{P}_1(x)}, \quad \mathfrak{P}_1(x) = 1 + \frac{a_2 x}{\mathfrak{P}_2(x)}, \quad \mathfrak{P}_2(x) = 1 + \frac{a_3 x}{\mathfrak{P}_3(x)}, \cdots;$$

dieses System ist, wenn der Kettenbruch unendlich ist, ebenfalls unbegrenzt; es schließt dagegen, wenn der Kettenbruch mit dem Glied $\frac{a_n x|}{|1}$ *abbricht, mit der Identität* $\mathfrak{P}_n(x) = 1$; *dabei ist stets*

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{P}_\lambda(x) \sim 1 + \frac{a_{\lambda+1} x|}{|1} + \frac{a_{\lambda+2} x|}{|1} + \frac{a_{\lambda+3} x|}{|1} + \cdots.$$

Umgekehrt folgt auch aus dem System (b) *stets die Korrespondenz* (a) *und allgemeiner* (c).

Insbesondere erkennen wir hieraus:

Satz 8. *Aus irgend zwei der drei Formeln*

$$\mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots,$$

$$\mathfrak{P}_1(x) \sim 1 + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \frac{a_4 x|}{|1} + \cdots,$$

$$\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{a_1 x}{\mathfrak{P}_1(x)}$$

folgt stets die dritte. Dabei ist es gleichgültig, ob die Kettenbrüche unendlich sind, oder vielmehr endlich und mit dem gleichen Glied schließend.

Sehr nützlich für die Anwendungen ist auch

Satz 9. *Wenn in der Korrespondenz*

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots,$$

der Kettenbruch mag endlich oder unendlich sein, die c_ν, a_ν Funktionen eines Parameters t sind, und wenn die Grenzwerte

$$\lim_t c_\nu = c_\nu', \quad \lim_t a_\nu = a_\nu' \neq 0$$

existieren, so ist auch

$$1 + c_1' x + c_2' x^2 + c_3' x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{a_1' x|}{|1} + \frac{a_2' x|}{|1} + \frac{a_3' x|}{|1} + \cdots.$$

Zum Beweis sei $1 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots$ die mit $1 + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots$ korrespondierende Reihe. Nach Satz 8 besteht dann die formale Identität

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots = 1 + \frac{a_1 x}{1 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots},$$

welche, indem man mit dem Nenner heraufmultipliziert, gleichbedeutend ist mit dem System von Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1, \\ c_1 d_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 d_2 + c_2 d_1 + c_3 &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Da nun $\lim_t c_1 = \lim_t a_1 = a_1' \neq 0$, so folgt hieraus sukzessive, daß auch die Grenzwerte

$$\lim_t d_1 = d_1', \quad \lim_t d_2 = d_2', \quad \lim_t d_3 = d_3', \ldots$$

existieren, und daß zugleich die formale Identität besteht:

$$1 + c_1' x + c_2' x^2 + \cdots = 1 + \frac{a_1' x}{1 + d_1' x + d_2' x^2 + \cdots}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich, wenn man wieder allgemein mit $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ die mit $1 + \frac{a_{\lambda+1} x|}{|1} + \frac{a_{\lambda+2} x|}{|1} + \cdots$ korrespondierende Reihe bezeichnet, sukzessive für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, daß die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ mit t gewissen endlichen Grenzwerten zustreben. Ist dann $\mathfrak{P}_\lambda'(x)$ diejenige Reihe, die aus $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ entsteht, wenn man bei den Koeffizienten den Grenzübergang ausführt, so bestehen auch die formalen Identitäten

$$\mathfrak{P}_0'(x) = 1 + \frac{a_1' x}{\mathfrak{P}_1'(x)}, \quad \mathfrak{P}_1'(x) = 1 + \frac{a_2' x}{\mathfrak{P}_2'(x)}, \quad \mathfrak{P}_2'(x) = 1 + \frac{a_3' x}{\mathfrak{P}_3'(x)}, \cdots.$$

Nach Satz 7 folgt aber hieraus

$$\mathfrak{P}_0'(x) \sim 1 + \frac{a_1'x|}{|1} + \frac{a_2'x|}{|1} + \frac{a_3'x|}{|1} + \cdots. \quad \text{W. z. b. w.}$$

II. Als erstes Beispiel leiten wir jetzt einen von **Gauß** gefundenen Kettenbruch her. Die hypergeometrische Reihe

$$(11)\quad \begin{cases} F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 \\ \qquad + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots, \end{cases}$$

wobei natürlich $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ sein muß[1]), befriedigt, wie man durch eine ganz einfache Rechnung bestätigt, die Identitäten

$$(12)\quad F(\alpha,\beta,\gamma;x) = F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x) - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x),$$

$$(13)\quad F(\alpha,\beta,\gamma;x) = F(\alpha+1,\beta,\gamma+1;x) - \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2;x),$$

deren zweite übrigens aus der ersten durch Vertauschung von α mit β hervorgeht. Setzt man nun

$$\frac{F(\alpha+\nu, \beta+\nu, \gamma+2\nu; x)}{F(\alpha+\nu, \beta+\nu+1, \gamma+2\nu+1; x)} = \mathfrak{P}_{2\nu}(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{F(\alpha+\nu, \beta+\nu+1, \gamma+2\nu+1; x)}{F(\alpha+\nu+1, \beta+\nu+1, \gamma+2\nu+2; x)} = \mathfrak{P}_{2\nu+1}(x) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so folgt aus (12), wenn man α, β, γ durch $\alpha+\nu, \beta+\nu, \gamma+2\nu$ ersetzt:

$$\mathfrak{P}_{2\nu}(x) = 1 + \frac{a_{2\nu+1}x}{\mathfrak{P}_{2\nu+1}(x)}, \quad \text{wobei} \quad a_{2\nu+1} = -\frac{(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)};$$

ebenso aus (13), wenn man α, β, γ durch $\alpha+\nu, \beta+\nu+1, \gamma+2\nu+1$ ersetzt:

$$\mathfrak{P}_{2\nu+1}(x) = 1 + \frac{a_{2\nu+2}x}{\mathfrak{P}_{2\nu+2}(x)}, \quad \text{wobei} \quad a_{2\nu+2} = -\frac{(\beta+\nu+1)(\gamma-\alpha+\nu+1)}{(\gamma+2\nu+1)(\gamma+2\nu+2)}.$$

Es besteht also mit diesen Werten von a_ν, $\mathfrak{P}_\nu(x)$ das System von formalen Identitäten wie in Satz 7, und daraus folgt die von *Gauß* 2 gefundene Korrespondenz: $\mathfrak{P}_0(x) =$

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \\ a_{2\nu} = -\frac{(\beta+\nu)(\gamma-\alpha+\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \quad a_{2\nu+1} = -\frac{(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}. \end{cases}$$

---

1) Ist eine der Zahlen α, β eine negative ganze Zahl $-n$ oder 0, so daß die Reihe sich auf ein Polynom n^{ten} Grades reduziert, so können für γ auch die Werte $-n, -(n+1), -(n+2), \ldots$ noch zugelassen werden.

Diese ist, falls einmal $a_{n+1} = 0$ wird, so zu verstehen, daß der Kettenbruch dann mit dem Glied $\frac{a_n x|}{|1}$ abbricht, in welchem Fall daher $\mathfrak{P}_0(x)$ eine rationale Funktion ist, und das Zeichen $\sim$ in (14) auch ohne weiteres durch $=$ ersetzt werden kann.

Speziell für $\beta = 0$ kommt, wenn man noch γ durch $\gamma - 1$ ersetzt,

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{F(\alpha, 1, \gamma; x)} \sim 1 + \dfrac{a_1 x|}{|1} + \dfrac{a_2 x|}{|1} + \dfrac{a_3 x|}{|1} + \cdots, \\ a_1 = -\dfrac{\alpha}{\gamma},\ a_{2\nu} = -\dfrac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-2)(\gamma+2\nu-1)},\ a_{2\nu+1} = -\dfrac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}. \end{cases}$$

Hier sind nach der Herleitung die Werte $\gamma - 1 = 0, -1, -2, \ldots$, also $\gamma = 1, 0, -1, -2, \ldots$ auszuschließen. Doch bemerkt man nachträglich, daß die Formel noch für $\gamma = 1$ in Kraft bleibt, indem man die Fußnote von Seite 311 berücksichtigt oder einfach durch Anwendung von Satz 9 für $t = \gamma$, $\lim \gamma = 1$.

Setzt man in (14) $\frac{x}{\alpha}$ an Stelle von x, was nach Satz 6 erlaubt ist, und geht sodann auf Grund von Satz 9 zur Grenze $\alpha = \infty$ über, so kommt

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\Phi(\beta, \gamma; x)}{\Phi(\beta+1, \gamma+1; x)} \sim 1 - \dfrac{\frac{\gamma-\beta}{\gamma(\gamma+1)}x\,|}{|\,1} + \dfrac{\frac{\beta+1}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\,|}{|\,1} \\ \qquad - \dfrac{\frac{\gamma-\beta+1}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x\,|}{|\,1} + \dfrac{\frac{\beta+2}{(\gamma+3)(\gamma+4)}x\,|}{|\,1} - \cdots, \end{cases}$$

wobei

$$(17)\quad \Phi(\beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\beta}{\gamma}\frac{x}{1} + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ist. Speziell für $\beta = 0$, wenn wieder $\gamma - 1$ statt γ geschrieben wird,

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\Phi(1, \gamma; x)} \sim 1 - \dfrac{\frac{1}{\gamma}x\,|}{|\,1} + \dfrac{\frac{1x}{\gamma(\gamma+1)}\,|}{|\,1} - \dfrac{\frac{\gamma x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\,|}{|\,1} \\ \qquad + \dfrac{\frac{2x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}\,|}{|\,1} - \dfrac{\frac{(\gamma+1)x}{(\gamma+3)(\gamma+4)}\,|}{|\,1} + \dfrac{\frac{3x}{(\gamma+4)(\gamma+5)}\,|}{|\,1} - \cdots. \end{cases}$$

Auch hier erweist sich nachträglich der Wert $\gamma = 1$ als zulässig, wodurch speziell entsteht, wenn man x durch $-x$ ersetzt (Satz 6 für $\varrho = -1$):

$$(19)\quad e^x \sim 1 + \frac{x|}{|1} - \frac{\frac{x}{1\cdot 2}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{x}{2\cdot 3}\,|}{|\,1} - \frac{\frac{x}{2\cdot 3}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{x}{2\cdot 5}\,|}{|\,1} - \frac{\frac{x}{2\cdot 5}\,|}{|\,1} + \frac{\frac{x}{2\cdot 7}\,|}{|\,1} - \cdots.$$

Setzt man in (14) $\frac{x}{\beta}$ an Stelle von x und läßt β unbegrenzt wachsen (Satz 6 und 9), so kommt

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{\Phi(\alpha,\gamma;x)}{\Phi(\alpha,\gamma+1;x)} \sim 1 + \dfrac{\frac{\alpha}{\gamma(\gamma+1)}x\,|}{|\;1} - \dfrac{\frac{\gamma-\alpha+1}{(\gamma+1)(\gamma+2)}x\,|}{|\;1} \\ \qquad + \dfrac{\frac{\alpha+1}{(\gamma+2)(\gamma+3)}x\,|}{|\;1} - \dfrac{\frac{\gamma-\alpha+2}{(\gamma+3)(\gamma+4)}x\,|}{|\;1} + \cdots, \end{cases}$$

wobei Φ wieder die obige Bedeutung hat. Setzt man hier $\alpha=\gamma-\beta$, so erhält man durch Vergleich mit (16) die Funktionalgleichung:

$$\frac{\Phi(\beta,\gamma;x)}{\Phi(\beta+1,\gamma+1;x)} = \frac{\Phi(\gamma-\beta,\gamma;-x)}{\Phi(\gamma-\beta,\gamma+1;-x)}.\ ^{1)}$$

Tritt auch in (20) $\frac{x}{\alpha}$ an Stelle von x, so kommt weiter für $\lim \alpha=\infty$:

$$(21)\quad \frac{\Psi(\gamma;x)}{\Psi(\gamma+1;x)} \sim 1 + \frac{\frac{x}{\gamma(\gamma+1)}\,|}{|\;1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\,|}{|\;1} + \frac{\frac{x}{(\gamma+2)(\gamma+3)}\,|}{|\;1} + \cdots,$$

wobei

$$(22)\quad \Psi(\gamma;x) = 1 + \frac{1}{\gamma}\frac{x}{1} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

Setzt man endlich in (14) $-\gamma x$ an Stelle von x und läßt γ unbegrenzt wachsen, so kommt

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\Omega(\alpha,\beta;x)}{\Omega(\alpha,\beta+1;x)} \sim 1 + \dfrac{\alpha x\,|}{|\;1} + \dfrac{(\beta+1)x\,|}{|\;1} + \dfrac{(\alpha+1)x\,|}{|\;1} \\ \qquad + \dfrac{(\beta+2)x\,|}{|\;1} + \dfrac{(\alpha+2)x\,|}{|\;1} + \cdots, \end{cases}$$

wobei

$$(24)\quad \begin{cases} \Omega(\alpha,\beta;x) = 1 - \alpha\beta\dfrac{x}{1} + \alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\dfrac{x^2}{2!} \\ \qquad - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)\dfrac{x^3}{3!} + \cdots. \end{cases}$$

---

1) Diese Identität zwischen vier ganzen transzendenten Funktionen läßt sich direkt nicht leicht verifizieren. Sie folgt allerdings aus der Formel

$$\Phi(\beta,\gamma;x) = e^x\,\Phi(\gamma-\beta,\gamma;-x),$$

die sich in § 81 mit Hilfe einer Differentialgleichung gelegentlich ergeben wird. Hier aber ist das Bemerkenswerte der B e w e i s, insofern wir Kettenbrüche benutzt haben, von denen wir gar nicht zu wissen brauchen, ob sie konvergieren, geschweige denn, ob sie die betreffenden Funktionen darstellen.

Insbesondere für $\beta = 0$ erhält man

$$(25)\quad \frac{1}{\Omega(\alpha, 1; x)} \sim 1 + \frac{\alpha x|}{|1} + \frac{1x|}{|1} + \frac{(\alpha+1)x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{(\alpha+2)x|}{|1} + \frac{3x|}{|1} + \cdots$$

(*Euler* **11**, *Trembley* **1**, *Soldner* **1**). Hieraus folgt noch leicht

$$(26)\quad \begin{cases} 1 + x\Omega(\alpha, 1; x) \sim 1 + \frac{x|}{|1} + \frac{\alpha x|}{|1} + \frac{1x|}{|1} + \frac{(\alpha+1)x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} \\ \qquad + \frac{(\alpha+2)x|}{|1} + \frac{3x|}{|1} + \cdots. \end{cases}$$

Ebenso wie die Korrespondenz (14) sind auch alle daraus abgeleiteten so zu verstehen, daß, wenn nach dem Bildungsgesetz einmal ein Koeffizient verschwindet, der Kettenbruch mit dem vorausgehenden Glied abbricht; in diesem Fall kann dann das Zeichen $\sim$ sogleich durch $=$ ersetzt werden.

III. Etwas allgemeiner wie der Gaußsche Kettenbruch (14) ist der von Heine. Sei

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x) = 1 + \frac{(1-e^{u\alpha})(1-e^{u\beta})}{(1-e^{u})(1-e^{u\gamma})} x \\ + \frac{(1-e^{u\alpha})(1-e^{u(\alpha+1)})(1-e^{u\beta})(1-e^{u(\beta+1)})}{(1-e^{u})(1-e^{2u})(1-e^{u\gamma})(1-e^{u(\gamma+1)})} x^2 + \cdots, \end{cases}$$

wobei, damit die rechte Seite einen Sinn hat,

$$(28)\quad \left\{ \begin{matrix} u \neq \pm \frac{2n\pi i}{\nu+1} \\ \gamma \neq -\nu \pm \frac{2n\pi i}{u} \end{matrix} \right\} \qquad (n, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sein muß; im übrigen sind α, β, γ, u beliebig. Man verifiziert nun als Analoga zu den Formeln (12), (13) leicht die Identitäten:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x) = \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1; u; x) - \frac{(1-e^{u\alpha})(1-e^{u(\gamma-\beta)})}{(1-e^{u\gamma})(1-e^{u(\gamma+1)})} e^{u\beta} x \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; u; x),$$

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x) = \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma+1; u; x) - \frac{(1-e^{u\beta})(1-e^{u(\gamma-\alpha)})}{(1-e^{u\gamma})(1-e^{u(\gamma+1)})} e^{u\alpha} x \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; u; x).$$

Hieraus ergibt sich durch ganz den gleichen Prozeß wie vorhin die Korrespondenz

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x)}{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1; u; x)} \sim 1 + \dfrac{a_1 x|}{|1} + \dfrac{a_2 x|}{|1} + \dfrac{a_3 x|}{|1} + \cdots \\ a_{2\nu} = -e^{u(\alpha+\nu-1)} \dfrac{\left(1-e^{u(\beta+\nu)}\right)\left(1-e^{u(\gamma-\alpha+\nu)}\right)}{\left(1-e^{u(\gamma+2\nu-1)}\right)\left(1-e^{u(\gamma+2\nu)}\right)}, \\ a_{2\nu+1} = -e^{u(\beta+\nu)} \dfrac{\left(1-e^{u(\alpha+\nu)}\right)\left(1-e^{u(\gamma-\beta+\nu)}\right)}{\left(1-e^{u(\gamma+2\nu)}\right)\left(1-e^{u(\gamma+2\nu+1)}\right)} \qquad (\textit{Heine } 2, 3). \end{cases}$$

Diese ist, falls einmal $a_{n+1} = 0$ wird, wieder so zu verstehen, daß der Kettenbruch dann mit dem Glied $\frac{a_n x|}{|1}$ abbricht, in welchem Fall das Zeichen $\sim$ durch $=$ ersetzt werden kann. Die Heinesche Formel enthält die Gaußsche als Grenzfall, der für $\lim u = 0$ entsteht, unter Benutzung von Satz 9.

Endlich soll noch ein letzter Kettenbruch dieser Art hergeleitet werden. Setzt man

$$(30)\quad \mathfrak{Q}_{2\nu-1}(x) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\lambda(2\nu+\lambda-2)} \frac{(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu+2})\cdots(1-q^{2\nu+2\lambda-2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2\lambda})} x^\lambda,$$

$$(31)\quad \mathfrak{Q}_{2\nu}(x) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} q^{\lambda(2\nu+\lambda)} \frac{(1-q^{2\nu})(1-q^{2\nu+2})\cdots(1-q^{2\nu+2\lambda-2})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2\lambda})} x^\lambda,$$

wobei bemerkt sei, daß die Koeffizienten nur scheinbar gebrochene, in Wahrheit aber **ganze** Funktionen von q sind, so daß kein Wert von q auszunehmen ist, so bestätigt man leicht die Formeln:

$$\mathfrak{Q}_{2\nu-1}(x) = \mathfrak{Q}_{2\nu}(x) + q^{2\nu-1}(1-q^{2\nu})x\mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x),$$
$$\mathfrak{Q}_{2\nu}(x) = \mathfrak{Q}_{2\nu+1}(x) - q^{4\nu+1}x\mathfrak{Q}_{2\nu+2}(x).$$

Also besteht, wenn man noch

$$\frac{\mathfrak{Q}_\nu(x)}{\mathfrak{Q}_{\nu+1}(x)} = \mathfrak{P}_\nu(x), \quad a_{2\nu} = q^{2\nu-1}(1-q^{2\nu}), \quad a_{2\nu+1} = -q^{4\nu+1}$$

setzt, wieder das in Satz 7 angegebene System von formalen Identitäten, und folglich erhalten wir die von *Eisenstein* 1 herrührende Korrespondenz: $\mathfrak{P}_0(x) =$

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1+qx+q^4x^2+q^9x^3+\cdots} \sim 1 - \dfrac{qx|}{|1} + \dfrac{q(1-q^2)x|}{|1} \\ - \dfrac{q^5x|}{|1} + \dfrac{q^3(1-q^4)x|}{|1} - \dfrac{q^9x|}{|1} + \dfrac{q^5(1-q^6)x|}{|1} - \dfrac{q^{13}x|}{|1} + - \cdots. \end{cases}$$

Ist q eine Einheitswurzel, so bricht der Kettenbruch ab und ist daher gleich der links stehenden Funktion von x, die in diesem Falle rational sein muß.

Heine 2 hat gefunden, daß auch die Eisensteinsche Formel wenigstens für $|q| < 1$ aus der Heineschen durch Grenzprozeß hervorgeht (wieder mit Anwendung von Satz 9). In der Tat wird, falls der reelle Teil von u negativ ist,

$$\lim_{\alpha=\infty} \lim_{\gamma=\infty} \varphi\left(-\alpha, 1, \gamma+1; u; -xe^{u\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}\right)$$
$$= 1 + qx + q^4x^2 + q^9x^3 + q^{16}x^4 + \cdots,$$

wobei $q = e^{\frac{u}{2}}$, also $|q| < 1$ ist. Ersetzt man nun in (29) α, β, x durch $-\alpha, 0, -xe^{u\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)}$ und läßt α, γ reell unbegrenzt wachsen, so entsteht wieder genau die Formel (32), womit diese für $|q| < 1$ ein zweites Mal bewiesen ist.

§ 60. Quadratwurzeln.

I. Um die korrespondierende Reihe eines k-gliedrig reinperiodischen Kettenbruches

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_k x|}{|1} + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_k x|}{|1} + \frac{a_1 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_k x|}{|1} + \cdots$$

zu berechnen, beachten wir, daß bei gleicher Bezeichnung wie im vorigen Paragraphen jetzt $\mathfrak{P}_k(x) = \mathfrak{P}_0(x)$ ist, also formal (vgl. § 59, Formel (10)):

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{\mathfrak{P}_0(x) A_{k-1}(x) + a_k x A_{k-2}(x)}{\mathfrak{P}_0(x) B_{k-1}(x) + a_k x B_{k-2}(x)}$$

oder anders geschrieben

$$B_{k-1}(x) \mathfrak{P}_0(x)^2 - (A_{k-1}(x) - a_k x B_{k-2}(x)) \mathfrak{P}_0(x) - a_k x A_{k-2}(x) = 0.$$

Die korrespondierende Reihe genügt daher einer quadratischen Gleichung. Diese ist im Bereich der rationalen Funktionen irreduzibel; denn andernfalls würde sich aus ihr $\mathfrak{P}_0(x)$ als rationale Funktion ergeben, was aber, da $\mathfrak{P}_0(x)$ die korrespondierende Reihe eines unendlichen Kettenbruches ist, nicht sein kann, wie auf Seite 307 oben bemerkt wurde. Die Auflösung ergibt:

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{A_{k-1}(x) - a_k x B_{k-2}(x) + \sqrt{(A_{k-1}(x) - a_k x B_{k-2}(x))^2 + 4 a_k x B_{k-1}(x) A_{k-2}(x)}}{2 B_{k-1}(x)}$$

$$= \frac{A_{k-1}(x) - a_k x B_{k-2}(x) + \sqrt{(A_{k-1}(x) + a_k x B_{k-2}(x))^2 - (-1)^k 4 a_1 a_2 \ldots a_k x^k}}{2 B_{k-1}(x)},$$

wo also der Radikand nicht das Quadrat einer rationalen Funktion sein kann. Da $A_{k-1}(x)$, $B_{k-1}(x)$, $\mathfrak{P}_0(x)$ das konstante Glied 1 haben müssen,

so ist das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu nehmen, daß ihr konstantes Glied gleich $+1$ ist.

Untersuchen wir allgemeiner den gemischtperiodischen Kettenbruch

$$1+\frac{a_1 x|}{|1}+\cdots+\frac{a_h x|}{|1}+\frac{a_{h+1} x|}{|1}+\cdots+\frac{a_{h+k} x|}{|1}+\frac{a_{h+1} x|}{|1}+\cdots+\frac{a_{h+k} x|}{|1}+\cdots,$$

so ist zunächst $\mathfrak{P}_h(x)$ die korrespondierende Reihe des reinperiodischen Kettenbruches

$$1+\frac{a_{h+1} x|}{|1}+\cdots+\frac{a_{h+k} x|}{|1}+\frac{a_{h+1} x|}{|1}+\cdots+\frac{a_{h+k} x|}{|1}+\cdots,$$

genügt also einer irreduzibeln quadratischen Gleichung. Sodann ergibt sich $\mathfrak{P}_0(x)$ aus der Formel (vgl. § 59, Formel (10))

$$\mathfrak{P}_0(x)=\frac{A_{h-1}(x)\mathfrak{P}_h(x)+a_h x A_{h-2}(x)}{B_{h-1}(x)\mathfrak{P}_h(x)+a_h x B_{h-2}(x)},$$

woraus man für $\mathfrak{P}_0(x)$ ebenfalls eine irreduzible quadratische Gleichung findet.[1]) In jedem Fall genügt also die korrespondierende Reihe eines periodischen Kettenbruches einer im Bereich der rationalen Funktionen irreduzibeln quadratischen Gleichung. Dieser Satz läßt sich aber keineswegs umkehren, wie man in Analogie zu dem Lagrangeschen Satz 2, Kap. III vielleicht erwarten könnte; die einfachsten Beispiele werden das bald zeigen; vgl. die Schlußworte dieses Paragraphen.

II. Sei $D(x)$ ein Polynom mit dem konstanten Glied 1, aber nicht das Quadrat eines Polynoms. Ferner sei $\mathfrak{P}_0(x)=\sqrt{D(x)}$ die mit dem konstanten Glied $+1$ beginnende Taylorsche Reihe für die Quadratwurzel; sie sei seminormal, und $1+\frac{a_1 x|}{|1}+\frac{a_2 x|}{|1}+\cdots$ der korrespondierende Kettenbruch. Um seine Koeffizienten zu berechnen, suchen wir zuerst die Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ zu ermitteln. Es ist, wenn man wieder die Argumente x unterdrückt, für $\lambda \geqq 1$:

$$\sqrt{D}=\mathfrak{P}_0=\frac{\mathfrak{P}_\lambda A_{\lambda-1}+a_\lambda x A_{\lambda-2}}{\mathfrak{P}_\lambda B_{\lambda-1}+a_\lambda x B_{\lambda-2}},$$

also durch Auflösung nach $\mathfrak{P}_\lambda$:

$$\mathfrak{P}_\lambda=-a_\lambda x\frac{B_{\lambda-2}\sqrt{D}-A_{\lambda-2}}{B_{\lambda-1}\sqrt{D}-A_{\lambda-1}},$$

oder, indem man Zähler und Nenner mit $B_{\lambda-1}\sqrt{D}+A_{\lambda-1}$ multipliziert,

$$\text{(1)}\quad \mathfrak{P}_\lambda=-a_\lambda x\frac{B_{\lambda-2}B_{\lambda-1}D-A_{\lambda-2}A_{\lambda-1}+(A_{\lambda-1}B_{\lambda-2}-A_{\lambda-2}B_{\lambda-1})\sqrt{D}}{B_{\lambda-1}^2 D-A_{\lambda-1}^2}.$$

1) Wir überlassen es dem Leser, diese wirklich aufzustellen.

Nun ist aber

(2) $$-a_\lambda x(A_{\lambda-1}B_{\lambda-2}-A_{\lambda-2}B_{\lambda-1})=(-1)^{\lambda-1}a_1a_2\ldots a_\lambda x^\lambda.$$

Schreibt man ferner

$$B_{\lambda-1}^2D-A_{\lambda-1}^2=(B_{\lambda-1}\sqrt{D}-A_{\lambda-1})(B_{\lambda-1}\sqrt{D}+A_{\lambda-1}),$$

so beginnt die Taylorsche Reihe für den ersten Faktor der rechten Seite genau mit der Potenz x^λ, weil ja $\frac{A_{\lambda-1}}{B_{\lambda-1}}$ der Näherungsbruch $(\lambda-1)^{\text{ter}}$ Ordnung des mit $\sqrt{D}$ korrespondierenden Kettenbruches ist; die des zweiten Faktors aber mit x^0. Also können wir setzen:

(3) $$B_{\lambda-1}^2D-A_{\lambda-1}^2=(-1)^{\lambda-1}a_1a_2\ldots a_\lambda x^\lambda Q_\lambda,$$

wo Q_λ ein Polynom ist, dessen konstantes Glied nicht verschwindet. Endlich ist identisch

$$B_{\lambda-2}B_{\lambda-1}D-A_{\lambda-2}A_{\lambda-1}$$
$$=B_{\lambda-2}\sqrt{D}(B_{\lambda-1}\sqrt{D}-A_{\lambda-1})+A_{\lambda-1}(B_{\lambda-2}\sqrt{D}-A_{\lambda-2}).$$

Da die Taylorschen Reihen für die beiden Terme der rechten Seite genau mit den Potenzen x^λ bzw. $x^{\lambda-1}$ beginnen, so kommt noch

(4) $$-a_\lambda x(B_{\lambda-2}B_{\lambda-1}D-A_{\lambda-2}A_{\lambda-1})=(-1)^{\lambda-1}a_1a_2\ldots a_\lambda x^\lambda P_\lambda,$$

wo auch P_λ ein Polynom mit einem von Null verschiedenen konstanten Glied ist. Hiernach nimmt Formel (1) die einfachere Gestalt an:

(5) $$\mathfrak{P}_\lambda(x)=\frac{\sqrt{D(x)}+P_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)};$$

diese Gleichung, die damit zunächst für $\lambda\geqq 1$ bewiesen ist, gilt auch noch für $\lambda=0$, wenn wir

(6) $$P_0(x)=0,\ Q_0(x)=1$$

setzen. Ist n der Grad des Polynoms $D(x)$, so ist der Grad des Polynoms auf der linken Seite von (4), wie die Formeln (2), (3) des § 58 lehren, höchstens gleich $\lambda-1+n$; also wird

(7) $$P_\lambda(x) \text{ höchstens vom Grad } n-1.$$

Der Grad des Polynoms auf der linken Seite von (3) ist für $\lambda=2\nu+1$ genau gleich $2\nu+n$; für $\lambda=2\nu$ dagegen genau 2ν, falls $n=1$ oder $n=2$, aber höchstens $2\nu-2+n$, falls $n>2$. Es wird demnach

(8) $$Q_{2\nu+1}(x) \text{ genau vom Grad } n-1,$$

(9) $$Q_{2\nu}(x)\begin{cases}\text{konstant für } n=1 \text{ und } n=2\\ \text{höchstens vom Grad } n-2 \text{ für } n>2.\end{cases}$$

Nun ist aber

$$(10)\qquad \mathfrak{P}_\lambda(x) = 1 + \frac{a_{\lambda+1}\,x}{\mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

also nach (5)

$$(11)\qquad \frac{\sqrt{D(x)} + P_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)} = 1 + \frac{a_{\lambda+1}\,x\,Q_{\lambda+1}(x)}{\sqrt{D(x)} + P_{\lambda+1}(x)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wenn man hier mit dem Nenner heraufmultipliziert, läßt sich die entsprechende Gleichung, weil $D(x)$ nicht das Quadrat einer rationalen Funktion ist, spalten in die zwei folgenden:

$$(12)\qquad D(x) + P_\lambda(x) P_{\lambda+1}(x) = Q_\lambda(x) P_{\lambda+1}(x) + a_{\lambda+1}\,x\,Q_\lambda(x)\,Q_{\lambda+1}(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(13)\qquad P_\lambda(x) + P_{\lambda+1}(x) = Q_\lambda(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Indem man (13) mit $P_{\lambda+1}(x)$ multipliziert und dann von (12) subtrahiert, entsteht noch:

$$(14)\qquad D(x) - P_{\lambda+1}(x)^2 = a_{\lambda+1}\,x\,Q_\lambda(x)\,Q_{\lambda+1}(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus (5) und (13) folgt für $x = 0$:

$$1 + P_\lambda(0) = Q_\lambda(0) = P_\lambda(0) + P_{\lambda+1}(0).$$

Also ist $P_{\lambda+1}(0) = 1$ für $\lambda \geqq 0$; d. h. $P_\lambda(x)$ hat für $\lambda \geqq 1$ das konstante Glied 1. Wegen (13) hat dann $Q_\lambda(x)$ für $\lambda \geqq 1$ das konstante Glied 2. Nunmehr reichen die Gleichungen (13), (14) vollkommen aus, um die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sukzessive zu berechnen. Denn da nach (6) $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$ ist, so ergibt sich aus (13) für $\lambda = 0$: $P_1(x) = 1$. Sodann wird aus (14) für $\lambda = 0$, weil $Q_1(x)$ das konstante Glied 2 haben muß, a_1 und $Q_1(x)$ bestimmt. Nachdem man nun $P_1(x)$ und $Q_1(x)$ kennt, findet man aus (13) für $\lambda = 1$ auch $P_2(x)$; sodann aus (14) für $\lambda = 1$ eindeutig a_2 und $Q_2(x)$, weil ja das konstante Glied von $Q_2(x)$ gleich 2 sein muß. So fährt man fort; gelangt man im Verlauf dieses Prozesses zu einem Widerspruch, indem einmal $D(x) - P_{\lambda+1}(x)^2$ den Faktor x^2 enthält, also Gleichung (14) nicht erfüllt werden kann, so zeigt dieser Umstand an, daß kein korrespondierender Kettenbruch existiert, daß die Reihe also nicht seminormal ist. Gelangt man aber nicht zu einem solchen Widerspruch, so ist die Reihe $\sqrt{D(x)}$ seminormal, und das beschriebene Verfahren liefert den korrespondierenden Kettenbruch. Denn in der Tat ziehen die Gleichungen (13) und (14) ja (11), also auch (10) nach sich, so daß nach Satz 7 wirklich

$$\mathfrak{P}_0(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|\,1} + \frac{a_2 x|}{|\,1} + \cdots$$

wird.

An Stelle der Gleichung (14) kann für $\lambda \geqq 1$ auch eine andere benutzt werden. Setzt man nämlich für $P_{\lambda+1}(x)$ den Wert aus (13) in (14) ein, so kommt, wenn man noch durch $Q_\lambda(x)$ dividiert:

$$\frac{D(x) - P_\lambda(x)^2}{Q_\lambda(x)} + 2P_\lambda(x) - Q_\lambda(x) = a_{\lambda+1} x Q_{\lambda+1}(x).$$

Der links stehende Quotient ist aber, wenn $\lambda \geqq 1$, nach (14) gleich $a_\lambda x Q_{\lambda-1}(x)$; also kommt schließlich nach Division durch x:

$$\text{(14a)} \qquad a_\lambda Q_{\lambda-1}(x) + \frac{2P_\lambda(x) - Q_\lambda(x)}{x} = a_{\lambda+1} Q_{\lambda+1}(x) \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Das ist die gewünschte Gleichung; sie zeigt, daß die sukzessive berechneten $Q_{\lambda+1}(x)$ wirklich ganze Funktionen sind, was in (14) noch verdeckt ist. Trotzdem erweist sich übrigens die Gleichung (14) vielfach bequemer wie (14a).

III. Wir behandeln nun zwei Beispiele.

Beispiel 1. $D = 1 + 4ax$. Hier ist $n = 1$; nach dem, was wir über den Grad der Polynome $P_\lambda(x)$, $Q_\lambda(x)$ feststellten (siehe oben (7), (8), (9)) und was wir über die konstanten Glieder wissen, muß hier

$$P_0(x) = 0, \; Q_0(x) = 1; \qquad P_\lambda(x) = 1, \; Q_\lambda(x) = 2 \quad (\lambda \geqq 1)$$

sein. In der Tat sind dadurch die Gleichungen (13) identisch erfüllt, und aus (14) folgt:

$$1 + 4ax - 1 = a_1 x \cdot 1 \cdot 2,$$

$$1 + 4ax - 1 = a_{\lambda+1} x \cdot 2 \cdot 2 \qquad (\text{für } \lambda \geqq 1),$$

somit $a_1 = 2a$; $a_{\lambda+1} = a$ für $\lambda \geqq 1$. Daher

$$\text{(15)} \qquad \sqrt{1 + 4ax} \sim 1 + \frac{2ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \frac{ax|}{|1} + \cdots.$$

Der Kettenbruch ist also periodisch, und nach der zu Beginn dieses Paragraphen erörterten Methode bestätigt man in der Tat sofort, daß für diesen Kettenbruch die korrespondierende Reihe gleich $\sqrt{1 + 4ax}$ ist.

Beispiel 2. $D = 1 + 2ax + bx^2$. Wir dürfen $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 - b \neq 0$ voraussetzen. Denn für $a^2 - b = 0$ wäre D ein Quadrat; für $b = 0$ hätten wir den vorigen Fall; endlich für $a = 0$ kommt $\sqrt{D} = 1 + \frac{b}{2} x^2 + \cdots$, also verschwindet der Koeffizient von x, so daß nach Satz 5 die Reihe gewiß nicht seminormal sein kann, weil $\varphi_1 = c_1 = 0$ ist.

Es ist hier $n = 2$, so daß die P_λ nach (7) höchstens vom ersten Grad werden; wir setzen demgemäß

$$P_{2\nu-1}(x) = 1 + r_\nu x, \quad P_{2\nu}(x) = 1 + s_\nu x \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei wegen $P_1(x)=1$ gewiß $r_1=0$ sein muß. Dann folgt aus (13):

$$Q_{2\nu-1}(x)=2+(r_\nu+s_\nu)x, \quad Q_{2\nu}(x)=2+(s_\nu+r_{\nu+1})x \quad (\nu=1,2,3,\ldots);$$

da aber nach (9) $Q_{2\nu}(x)$ konstant ist, so kommt $s_\nu=-r_{\nu+1}$. Nun ist noch die Gleichung (14) zu befriedigen; diese liefert für $\lambda=0$, $2\nu-1$, 2ν:

$$\text{(a)}\quad 1+2ax+bx^2-(1+r_1x)^2=a_1x\cdot 1\cdot[2+(r_1-r_2)x],$$

$$\text{(b)}\quad 1+2ax+bx^2-(1-r_{\nu+1}x)^2=a_{2\nu}x[2+(r_\nu-r_{\nu+1})x]\cdot 2 \quad (\nu\geqq 1),$$

$$\text{(c)}\quad 1+2ax+bx^2-(1+r_{\nu+1}x)^2=a_{2\nu+1}x\cdot 2\cdot[2+(r_{\nu+1}-r_{\nu+2})x] \quad (\nu\geqq 1).$$

Aus (a) folgt, weil $r_1=0$ ist: $a=a_1$, $b=-a_1r_2$; also

$$\text{(d)}\qquad a_1=a, \quad r_2=\frac{-b}{a}.$$

Sodann erhält man aus (b):

$$\text{(e)}\qquad a+r_{\nu+1}=2a_{2\nu}; \qquad b-r_{\nu+1}^2=2a_{2\nu}(r_\nu-r_{\nu+1}) \qquad (\nu\geqq 1)$$

und aus (c):

$$\text{(f)}\quad a-r_{\nu+1}=2a_{2\nu+1}; \quad b-r_{\nu+1}^2=2a_{2\nu+1}(r_{\nu+1}-r_{\nu+2}) \quad (\nu\geqq 1).$$

Aus den Gleichungen (e) erhält man durch Elimination von $a_{2\nu}$:

$$b-r_{\nu+1}^2=(a+r_{\nu+1})(r_\nu-r_{\nu+1}),$$

oder anders geschrieben:

$$\text{(g)}\qquad r_{\nu+1}(a-r_\nu)=ar_\nu-b.$$

Wenn in dieser Rekursionsformel zur Berechnung von $r_{\nu+1}$ einmal die linke Seite verschwindet, also $r_\nu=a$ ist, so wird die rechte Seite gleich $a^2-b\neq 0$; dieser Widerspruch zeigt an, daß kein korrespondierender Kettenbruch existiert. Wenn dagegen stets $r_\nu\neq a$ wird, so folgt aus (g):

$$\text{(h)}\qquad r_{\nu+1}=\frac{ar_\nu-b}{a-r_\nu}, \quad \text{oder} \quad \frac{r_{\nu+1}}{\sqrt{-b}}=\frac{\dfrac{r_\nu}{\sqrt{-b}}+\dfrac{\sqrt{-b}}{a}}{1-\dfrac{r_\nu}{\sqrt{-b}}\,\dfrac{\sqrt{-b}}{a}}.$$

Diese Rekursionsgleichung ist leicht aufzulösen; da nämlich $a^2-b\neq 0$, so ist $\frac{\sqrt{-b}}{a}\neq\pm\sqrt{-1}$, also kann man $\frac{\sqrt{-b}}{a}=\operatorname{tang}\alpha$ setzen, wo α eine geeignete (komplexe) Zahl ist. Dann folgt aus (d): $\frac{r_2}{\sqrt{-b}}=\operatorname{tang}\alpha$, und aus (h) ergibt sich durch den Schluß von ν auf $\nu+1$:

$$\text{(i)}\qquad \frac{r_{\nu+1}}{\sqrt{-b}}=\operatorname{tang}\nu\alpha.$$

Hieraus ersieht man, daß der oben erwähnte Fall, in dem kein korrespondierender Kettenbruch vorhanden ist, dann vorliegt, wenn α die Form $\frac{2n+1}{\nu}\frac{\pi}{2}$ hat, wo n und ν ganze Zahlen sind. In jedem andern Fall existiert der korrespondierende Kettenbruch, und aus der ersten der Gleichungen (e) erhält man, wenn man für $r_{\nu+1}$ den gefundenen Wert einsetzt:

$$\text{(k)}\quad a_{2\nu} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{-b}}{2}\operatorname{tang}\nu\alpha = \frac{a}{2}(1 + \operatorname{tang}\alpha\cdot\operatorname{tang}\nu\alpha) = \frac{a}{2}\frac{\cos(\nu-1)\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\nu\alpha};$$

ebenso aus der ersten der Gleichungen (f):

$$\text{(l)}\qquad a_{2\nu+1} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{-b}}{2}\operatorname{tang}\nu\alpha = \frac{a}{2}(1 - \operatorname{tang}\alpha\cdot\operatorname{tang}\nu\alpha) = \frac{a}{2}\frac{\cos(\nu+1)\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\nu\alpha}$$

für $\nu \geqq 1$, während a_1 aus (d) bekannt ist. Die zweite Gleichung (e) und die zweite Gleichung (f) sind dann von selbst erfüllt.

Wählt man der Einfachheit halber $a = 2\cos\alpha$, also $b = -4\sin^2\alpha$, so erhält man hiermit die Formel:

$$\text{(16)}\quad \begin{cases} \sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha} \sim 1 + \dfrac{2\cos\alpha\cdot x|}{|1} + \dfrac{\frac{1}{\cos\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}x|}{|1} \\ \quad + \dfrac{\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 4\alpha}{\cos 3\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 3\alpha}{\cos 4\alpha}x|}{|1} + \cdots. \end{cases}$$

Sie gilt für alle reellen und komplexen α, außer für $\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2m}$, wo m, n ganze Zahlen sind. Der Wert $b = 0$, also $\alpha = 0$ oder π war zwar seither auch ausgeschlossen; für diesen geht aber Formel (16) in (15) über (mit $a = \pm 1$), bleibt also richtig. Wie man leicht erkennt, wird der Kettenbruch dann und nur dann periodisch, wenn α von der Form $\frac{n\pi}{2m+1}$ ist, wo n, m ganze Zahlen sind.

§ 61. Der assoziierte Kettenbruch.

I. Mit dem bis jetzt in diesem Kapitel untersuchten [illegible]typus sind nahe verwandt die Kettenbrüche der Form

$$\text{(1)}\qquad 1 + \frac{k_1 x|}{|1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2|}{|1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2|}{|1 + l_3 x} + \frac{k_4 x^2|}{|1 + l_4 [illegible]}$$

von denen wir der Einfachheit halber nur di[illegible] wollen. Die Zahlen k_ν, l_ν heißen die Koef[illegible] mit $K_\nu(x)$, $L_\nu(x)$ die Näherungszähler un[illegible] (1), so erkennt man sogleich (am einfac[illegible]

auf $\nu + 1$), daß $K_\nu(x)$, $L_\nu(x)$ Polynome ν^{ten} Grades (höchstens) von x sind mit dem konstanten Glied 1. Es gilt ferner

Satz 10. *Jedem unendlichen Kettenbruch der Form*

$$1 + \frac{k_1 x \mid}{\mid 1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2 \mid}{\mid 1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2 \mid}{\mid 1 + l_3 x} + \frac{k_4 x^2 \mid}{\mid 1 + l_4 x} + \cdots \qquad (k_\nu \neq 0)$$

ist eindeutig eine Potenzreihe $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ dadurch zugeordnet, daß für alle λ die Taylorsche Reihe für den Näherungsbruch λ^{ter} Ordnung bis zum Glied $c_{2\lambda} x^{2\lambda}$ einschließlich mit ihr übereinstimmt. Zwei solche Kettenbrüche sind nur dann der nämlichen Potenzreihe in dieser Weise zugeordnet, wenn sie identisch sind.

Beweis. Es ist für $\lambda \geqq 0$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)} - \dfrac{K_\lambda(x)}{L_\lambda(x)} = (-1)^\lambda \dfrac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1} x^{2\lambda+1}}{L_{\lambda+1}(x) L_\lambda(x)} \\ = (-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1} x^{2\lambda+1} + \alpha_2 x^{2\lambda+2} + \alpha_3 x^{2\lambda+3} + \cdots. \end{cases}$$

Daher stimmt die Taylorsche Reihe für $\frac{K_\lambda(x)}{L_\lambda(x)}$ bis zur Potenz $x^{2\lambda}$ einschließlich mit der für $\frac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)}$ und folglich auch mit der für jeden späteren Näherungsbruch überein, womit zunächst der erste Teil von Satz 10 bewiesen ist. Wenn nun der Kettenbruch

$$(3) \qquad 1 + \frac{k_1' x \mid}{\mid 1 + l_1' x} + \frac{k_2' x^2 \mid}{\mid 1 + l_2' x} + \frac{k_3' x^2 \mid}{\mid 1 + l_3' x} + \frac{k_4' x^2 \mid}{\mid 1 + l_4' x} + \cdots$$

nicht mit (1) identisch ist, so sei $\lambda\,(\geqq 0)$ der kleinste Index, für den nicht gleichzeitig $k_{\lambda+1} = k'_{\lambda+1}$, $l_{\lambda+1} = l'_{\lambda+1}$ ist. Sind $K_\nu'(x)$, $L_\nu'(x)$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung des Kettenbruches (3), so hat man neben (2) die analoge Gleichung

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{K'_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x)} - \dfrac{K'_\lambda(x)}{L'_\lambda(x)} = (-1)^\lambda \dfrac{k_1 \ldots k_\lambda k'_{\lambda+1} x^{2\lambda+1}}{L'_{\lambda+1}(x) L'_\lambda(x)} \\ = (-1)^\lambda \ldots {}_{1} x^{2\lambda+1} + \alpha_2' x^{2\lambda+2} + \alpha_3' x^{2\lambda+3} + \cdots. \end{cases}$$



[illegible] sich durch Subtraktion von (2)
[illegible] Taylorschen Reihen für $\frac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)}$
[illegible] $x^{2\lambda+1}$ voneinander abweichen. Wenn
[illegible] $+ l'_{\lambda+1}$ sein, und da jetzt offenbar

Hieraus ersieht man, daß der oben erwähnte Fall, in dem kein korrespondierender Kettenbruch vorhanden ist, dann vorliegt, wenn α die Form $\frac{2n+1}{\nu}\frac{\pi}{2}$ hat, wo n und ν ganze Zahlen sind. In jedem andern Fall existiert der korrespondierende Kettenbruch, und aus der ersten der Gleichungen (e) erhält man, wenn man für $r_{\nu+1}$ den gefundenen Wert einsetzt:

$$\text{(k)}\quad a_{2\nu} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{-b}}{2}\operatorname{tang}\nu\alpha = \frac{a}{2}(1+\operatorname{tang}\alpha\cdot\operatorname{tang}\nu\alpha) = \frac{a}{2}\frac{\cos(\nu-1)\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\nu\alpha};$$

ebenso aus der ersten der Gleichungen (f):

$$\text{(l)}\qquad a_{2\nu+1} = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{-b}}{2}\operatorname{tang}\nu\alpha = \frac{a}{2}(1-\operatorname{tang}\alpha\cdot\operatorname{tang}\nu\alpha) = \frac{a}{2}\frac{\cos(\nu+1)\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\nu\alpha}$$

für $\nu \geqq 1$, während a_1 aus (d) bekannt ist. Die zweite Gleichung (e) und die zweite Gleichung (f) sind dann von selbst erfüllt.

Wählt man der Einfachheit halber $a = 2\cos\alpha$, also $b = -4\sin^2\alpha$, so erhält man hiermit die Formel:

$$(16)\quad \begin{cases} \sqrt{1+4x\cos\alpha-4x^2\sin^2\alpha} \sim 1 + \dfrac{2\cos\alpha\cdot x|}{|1} + \dfrac{\frac{1}{\cos\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}x|}{|1} \\ \quad + \dfrac{\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 4\alpha}{\cos 3\alpha}x|}{|1} + \dfrac{\frac{\cos 3\alpha}{\cos 4\alpha}x|}{|1} + \cdots. \end{cases}$$

Sie gilt für alle reellen und komplexen α, außer für $\alpha = \frac{(2n+1)\pi}{2m}$, wo m, n ganze Zahlen sind. Der Wert $b = 0$, also $\alpha = 0$ oder π war zwar seither auch ausgeschlossen; für diesen geht aber Formel (16) in (15) über (mit $a = \pm 1$), bleibt also richtig. Wie man leicht erkennt, wird der Kettenbruch dann und nur dann periodisch, wenn α von der Form $\frac{n\pi}{2m+1}$ ist, wo n, m ganze Zahlen sind.

§ 61. Der assoziierte Kettenbruch.

I. Mit dem bis jetzt in diesem Kapitel untersuchten Kettenbruchtypus sind nahe verwandt die Kettenbrüche der Form

$$(1)\qquad 1 + \frac{k_1 x|}{|1+l_1 x} + \frac{k_2 x^2|}{|1+l_2 x} + \frac{k_3 x^2|}{|1+l_3 x} + \frac{k_4 x^2|}{|1+l_4 x} + \cdots \quad (k_\nu \neq 0),$$

von denen wir der Einfachheit halber nur die unendlichen betrachten wollen. Die Zahlen k_ν, l_ν heißen die Koeffizienten. Bezeichnet man mit $K_\nu(x)$, $L_\nu(x)$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung von (1), so erkennt man sogleich (am einfachsten durch den Schluß von ν

auf $\nu + 1$), daß $K_\nu(x)$, $L_\nu(x)$ Polynome ν^{ten} Grades (höchstens) von x sind mit dem konstanten Glied 1. Es gilt ferner

Satz 10. *Jedem unendlichen Kettenbruch der Form*

$$1 + \frac{k_1 x \,|}{|\, 1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2 \,|}{|\, 1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2 \,|}{|\, 1 + l_3 x} + \frac{k_4 x^2 \,|}{|\, 1 + l_4 x} + \cdots \qquad (k_\nu \neq 0)$$

ist eindeutig eine Potenzreihe $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ *dadurch zugeordnet, daß für alle* λ *die Taylorsche Reihe für den Näherungsbruch* λ^{ter} *Ordnung bis zum Glied* $c_{2\lambda} x^{2\lambda}$ *einschließlich mit ihr übereinstimmt. Zwei solche Kettenbrüche sind nur dann der nämlichen Potenzreihe in dieser Weise zugeordnet, wenn sie identisch sind.*

Beweis. Es ist für $\lambda \geqq 0$:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)} - \dfrac{K_\lambda(x)}{L_\lambda(x)} = (-1)^\lambda \dfrac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1} x^{2\lambda+1}}{L_{\lambda+1}(x) L_\lambda(x)} \\ \quad = (-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1} x^{2\lambda+1} + \alpha_2 x^{2\lambda+2} + \alpha_3 x^{2\lambda+3} + \cdots. \end{cases}$$

Daher stimmt die Taylorsche Reihe für $\dfrac{K_\lambda(x)}{L_\lambda(x)}$ bis zur Potenz $x^{2\lambda}$ einschließlich mit der für $\dfrac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)}$ und folglich auch mit der für jeden späteren Näherungsbruch überein, womit zunächst der erste Teil von Satz 10 bewiesen ist. Wenn nun der Kettenbruch

$$(3) \qquad 1 + \frac{k_1' x \,|}{|\, 1 + l_1' x} + \frac{k_2' x^2 \,|}{|\, 1 + l_2' x} + \frac{k_3' x^2 \,|}{|\, 1 + l_3' x} + \frac{k_4' x^2 \,|}{|\, 1 + l_4' x} + \cdots$$

nicht mit (1) identisch ist, so sei λ ($\geqq 0$) der kleinste Index, für den nicht gleichzeitig $k_{\lambda+1} = k'_{\lambda+1}$, $l_{\lambda+1} = l'_{\lambda+1}$ ist. Sind $K_\nu'(x)$, $L_\nu'(x)$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung des Kettenbruches (3), so hat man neben (2) die analoge Gleichung

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{K'_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x)} - \dfrac{K'_\lambda(x)}{L'_\lambda(x)} = (-1)^\lambda \dfrac{k_1 \ldots k_\lambda k'_{\lambda+1} x^{2\lambda+1}}{L'_{\lambda+1}(x) L'_\lambda(x)} \\ \quad = (-1)^\lambda k_1 \ldots k_\lambda k'_{\lambda+1} x^{2\lambda+1} + \alpha_2' x^{2\lambda+2} + \alpha_3' x^{2\lambda+3} + \cdots. \end{cases}$$

Da offenbar $\dfrac{K_\lambda(x)}{L_\lambda(x)} = \dfrac{K'_\lambda(x)}{L'_\lambda(x)}$, so ergibt sich durch Subtraktion von (2) und (4), falls $k_{\lambda+1} \neq k'_{\lambda+1}$ ist, daß die Taylorschen Reihen für $\dfrac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)}$ und $\dfrac{K'_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x)}$ im Koeffizienten von $x^{2\lambda+1}$ voneinander abweichen. Wenn aber $k_{\lambda+1} = k'_{\lambda+1}$ ist, so muß $l_{\lambda+1} \neq l'_{\lambda+1}$ sein, und da jetzt offenbar

$$\left.\begin{aligned} L_{\lambda+1}(x) &= (1 + l_{\lambda+1} x) L_\lambda(x) + k_{\lambda+1} x^2 L_{\lambda-1}(x) \\ L'_{\lambda+1}(x) &= (1 + l'_{\lambda+1} x) L_\lambda(x) + k_{\lambda+1} x^2 L_{\lambda-1}(x), \end{aligned}\right\}^{1)}$$

so unterscheiden sich die Polynome $L_{\lambda+1}(x)$ und $L'_{\lambda+1}(x)$ schon im Koeffizienten von x. Durch Subtraktion von (2) und (4) kommt daher diesmal:

$$\begin{aligned} \frac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)} - \frac{K'_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x)} &= (-1)^\lambda \frac{k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1} x^{2\lambda+1}}{L_\lambda(x)} \cdot \frac{L'_{\lambda+1}(x) - L_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x) L_{\lambda+1}(x)} \\ &= j_2 x^{2\lambda+2} + j_3 x^{2\lambda+3} + \cdots \qquad (j_2 \neq 0), \end{aligned}$$

so daß also die Taylorschen Reihen für $\frac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)}$ und $\frac{K'_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x)}$ im Koeffizienten von $x^{2\lambda+2}$ voneinander abweichen. Da aber die zu den Kettenbrüchen (1) und (3) gehörigen Potenzreihen mit $\frac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)}$ bzw. $\frac{K'_{\lambda+1}(x)}{L'_{\lambda+1}(x)}$ bis zur Potenz $x^{2\lambda+2}$ einschließlich übereinstimmen, so folgt in beiden Fällen, daß diese Potenzreihen nicht identisch sind, womit auch der zweite Teil von Satz 10 bewiesen ist.

Wir nennen Potenzreihe und Kettenbruch, die sich nach Satz 10 eindeutig entsprechen, „miteinander assoziiert."

II. Während nach dem Bewiesenen zu jedem Kettenbruch der Form (1) eine assoziierte Potenzreihe existiert, findet nicht das Umgekehrte statt. Vielmehr gilt der

Satz 11. *Die Potenzreihe* $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ *hat dann und nur dann einen assoziierten Kettenbruch*

$$1 + \frac{k_1 x \mid}{\mid 1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2 \mid}{\mid 1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2 \mid}{\mid 1 + l_3 x} + \frac{k_4 x^2 \mid}{\mid 1 + l_4 x} + \cdots,$$

wenn die Determinanten

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_\nu \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix} \qquad (\nu \geqq 1)$$

alle von Null verschieden sind; und zwar ist dann, wenn

$$\chi_1 = c_2, \quad \chi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{\nu-1} & c_{\nu+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_\nu & c_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu-2} & c_{2\nu} \end{vmatrix} \text{ für } \nu \geqq 2$$

---

1) Falls $\lambda = 0$ ist, sollte in diesen Formeln das letzte Glied nur den Faktor x, nicht x^2 haben. Gleichwohl sind die Textformeln auch in diesem Fall richtig, da ja $L_{-1}(x) = 0$ zu setzen ist (Formel (8), Kap. I).

gesetzt wird:

$$k_1 = \varphi_1, \quad l_1 = -\frac{\chi_1}{\varphi_1},$$

$$k_\nu = -\frac{\varphi_\nu \varphi_{\nu-2}}{\varphi_{\nu-1}^2}, \quad l_\nu = \frac{\chi_{\nu-1}}{\varphi_{\nu-1}} - \frac{\chi_\nu}{\varphi_\nu} \text{ für } \nu \geqq 2 \qquad (\varphi_0 = 1).$$

Beweis. Es ist für $\lambda \geqq 0$

$$\frac{K_\lambda(x)}{L_\lambda(x)} = 1 + c_1 x + \cdots + c_{2\lambda} x^{2\lambda} + d_{\lambda,1} x^{2\lambda+1} + \cdots \tag{5}$$

$$\frac{K_{\lambda+1}(x)}{L_{\lambda+1}(x)} = 1 + c_1 x + \cdots + c_{2\lambda} x^{2\lambda} + c_{2\lambda+1} x^{2\lambda+1} + \cdots. \tag{6}$$

Daher durch Subtraktion mit Rücksicht auf (2):

$$d_{\lambda,1} - c_{2\lambda+1} = (-1)^{\lambda+1} k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}. \tag{7}$$

Setzt man nun für $\lambda \geqq 1$

$$L_\lambda(x) = 1 + g_{\lambda,1} x + g_{\lambda,2} x^2 + \cdots + g_{\lambda,\lambda} x^\lambda, \tag{8}$$

so folgt aus (5), indem man mit $L_\lambda(x)$ multipliziert, und dann die Koeffizienten von $x^{\lambda+1}, x^{\lambda+2}, \ldots x^{2\lambda+1}$ beiderseits vergleicht:

$$\begin{cases} 0 = g_{\lambda,\lambda} c_1 + g_{\lambda,\lambda-1} c_2 + \cdots + g_{\lambda,1} c_\lambda + c_{\lambda+1} \\ 0 = g_{\lambda,\lambda} c_2 + g_{\lambda,\lambda-1} c_3 + \cdots + g_{\lambda,1} c_{\lambda+1} + c_{\lambda+2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = g_{\lambda,\lambda} c_\lambda + g_{\lambda,\lambda-1} c_{\lambda+1} + \cdots + g_{\lambda,1} c_{2\lambda-1} + c_{2\lambda} \\ 0 = g_{\lambda,\lambda} c_{\lambda+1} + g_{\lambda,\lambda-1} c_{\lambda+2} + \cdots + g_{\lambda,1} c_{2\lambda} + d_{\lambda,1}. \end{cases} \tag{9}$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Größen $g_{\lambda,1}, g_{\lambda,2}, \ldots, g_{\lambda,\lambda}$ und setzt dann für $d_{\lambda,1}$ den Wert aus (7) ein, so findet man

$$\varphi_{\lambda+1} + (-1)^{\lambda+1} k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1} \varphi_\lambda = 0, \tag{10}$$

eine Gleichung, die offenbar auch für $\lambda = 0$ noch gilt, wenn man $\varphi_0 = 1$ setzt. Daraus folgt sogleich wegen $k_\nu \neq 0$, $\varphi_0 \neq 0$, daß alle $\varphi_\lambda \neq 0$ sein müssen, und außerdem ergibt sich

$$k_1 = \varphi_1, \quad k_{\lambda+1} = -\frac{\varphi_{\lambda+1}\varphi_{\lambda-1}}{\varphi_\lambda^2} \text{ für } \lambda \geqq 1. \tag{11}$$

Nun erhält man aus der Rekursionsformel

$$L_\lambda(x) = (1 + l_\lambda x) L_{\lambda-1}(x) + k_\lambda x^2 L_{\lambda-2}(x),$$

wenn man beiderseits die Koeffizienten von x gleichsetzt:

$$g_{1,1} = l_1, \quad g_{\lambda,1} = g_{\lambda-1,1} + l_\lambda \text{ für } \lambda \geqq 2. \tag{12}$$

Indem man aber die λ ersten der Gleichungen (9) nach $g_{\lambda,1}$ auflöst, findet man:

$$g_{\lambda,1} = -\frac{\chi_\lambda}{\varphi_\lambda},$$

wo χ_λ die in Satz 11 angegebene Bedeutung hat; also wegen (12):

$$(13) \qquad l_1 = -\frac{\chi_1}{\varphi_1}, \quad l_\lambda = \frac{\chi_{\lambda-1}}{\varphi_{\lambda-1}} - \frac{\chi_\lambda}{\varphi_\lambda} \quad \text{für } \lambda \geqq 2.$$

Damit ist zunächst bewiesen, daß, wenn die Reihe einen assoziierten Kettenbruch hat, dann alle φ_ν von Null verschieden sind, und daß die Koeffizienten die in Satz 11 angegebenen Werte haben. Um zu zeigen, daß auch umgekehrt, wenn alle $\varphi_\nu \neq 0$ sind, die Reihe immer einen assoziierten Kettenbruch hat, bemerke man, daß jedenfalls nur derjenige Kettenbruch in Frage kommen kann, dessen Koeffizienten die in (11) und (13) angegebenen Werte haben. Genau wie bei der analogen Frage Seite 306 hat man daher nur zu beweisen, daß diese Gleichungen bei gegebenen k_ν, l_ν die c_ν eindeutig bestimmen. Nun ist in der Tat nach (11): $c_1 = \varphi_1 = k_1$ eindeutig. Nimmt man aber an, $c_1, c_2, \ldots, c_{2\lambda-1}$ seien bereits eindeutig gefunden, so ergibt sich aus (13) eindeutig $c_{2\lambda}$; denn $c_{2\lambda}$ tritt dort linear auf und hat den von Null verschiedenen Koeffizienten $-\frac{\varphi_{\lambda-1}}{\varphi_\lambda}$. Sodann erhält man $c_{2\lambda+1}$ eindeutig aus (11); denn dort tritt $c_{2\lambda+1}$ linear auf und hat ebenfalls den von Null verschiedenen Koeffizienten $-\frac{\varphi_{\lambda-1}}{\varphi_\lambda}$. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Aus Satz 11 folgt insbesondere, daß die mit einem unendlichen Kettenbruch assoziierte Potenzreihe keine rationale Funktion von x sein kann, weil dann die Determinanten φ_ν für genügend große ν verschwinden müßten. Wir beweisen weiter

Satz 12. *Besteht die formale Identität*

$$\begin{aligned}\sum_{i,k}^{0,\infty} c_{i+k+1} X_i Y_k = {} & \varepsilon_0 (X_0 + \gamma_0 X_1 + \gamma_0' X_2 + \cdots)(Y_0 + \gamma_0 Y_1 + \gamma_0' Y_2 + \cdots) \\ & + \varepsilon_1 (X_1 + \gamma_1 X_2 + \gamma_1' X_3 + \cdots)(Y_1 + \gamma_1 Y_2 + \gamma_1' Y_3 + \cdots) \\ & + \varepsilon_2 (X_2 + \gamma_2 X_3 + \gamma_2' X_4 + \cdots)(Y_2 + \gamma_2 Y_3 + \gamma_2' Y_4 + \cdots) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

und sind dabei alle ε_ν von Null verschieden, so hat die unendliche Reihe $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ den assoziierten Kettenbruch

$$1 + \frac{\varepsilon_0 x}{|1 - \gamma_0 x} - \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} x^2}{|1 + (\gamma_0 - \gamma_1) x} - \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} x^2}{|1 + (\gamma_1 - \gamma_2) x} - \cdots. \qquad (\textit{Stieltjes } 2.)$$

Setzt man nämlich alle X_i, Y_i gleich Null außer

$$X_0, X_1, \dots X_\nu$$
$$Y_0, Y_1, \dots Y_\nu,$$

so besagt die vorausgesetzte formale Identität, daß die bilineare Form

$$\varepsilon_0 U_0 V_0 + \varepsilon_1 U_1 V_1 + \cdots + \varepsilon_\nu U_\nu V_\nu \tag{14}$$

durch die Substitutionen

$$\begin{cases} U_0 = X_0 + \gamma_0 X_1 + \gamma_0' X_2 + \cdots + \gamma_0^{(\nu-1)} X_\nu \\ U_1 = \qquad\quad X_1 + \gamma_1 X_2 + \cdots + \gamma_1^{(\nu-2)} X_\nu \\ \dots\dots\dots\dots \\ U_\nu = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X_\nu \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 = Y_0 + \gamma_0 Y_1 + \gamma_0' Y_2 + \cdots + \gamma_0^{(\nu-1)} Y_\nu \\ V_1 = \qquad\quad Y_1 + \gamma_1 Y_2 + \cdots + \gamma_1^{(\nu-2)} Y_\nu \\ \dots\dots\dots\dots \\ V_\nu = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad Y_\nu \end{cases}$$

übergeht in

$$\sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} c_{i+k+1} X_i Y_k. \tag{15}$$

Da die beiden Substitutionen unimodular sind, müssen die Bilinearformen (14) und (15) gleiche Diskriminante haben; also folgt

$$\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots c_{\nu+1} \\ c_2 & c_3 & \dots c_{\nu+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} & \dots c_{2\nu+1} \end{vmatrix} = \varphi_{\nu+1}; \tag{16}$$

daher:

$$\varepsilon_0 = \varphi_1, \quad \varepsilon_\nu = \frac{\varphi_{\nu+1}}{\varphi_\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geqq 1. \tag{17}$$

Setzt man dagegen alle X_i, Y_i gleich Null außer

$$X_0, X_1, \dots X_{\nu-1}, X_\nu$$
$$Y_0, Y_1, \dots Y_{\nu-1}, Y_{\nu+1},$$

so besagt die formale Identität, daß die Bilinearform

$$\varepsilon_0 U_0 V_0 + \varepsilon_1 U_1 V_1 + \cdots + \varepsilon_\nu U_\nu V_\nu \tag{18}$$

durch die Substitutionen

$$\begin{cases} U_0 &= X_0 + \gamma_0 X_1 + \cdots + \gamma_0^{(\nu-2)} X_{\nu-1} + \gamma_0^{(\nu-1)} X_\nu \\ U_1 &= \quad\quad X_1 + \cdots + \gamma_1^{(\nu-3)} X_{\nu-1} + \gamma_1^{(\nu-2)} X_\nu \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ U_{\nu-1} &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad X_{\nu-1} + \gamma_{\nu-1} X_\nu \\ U_\nu &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad X_\nu \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 &= Y_0 + \gamma_0 Y_1 + \cdots + \gamma_0^{(\nu-2)} Y_{\nu-1} + \gamma_0^{(\nu)} Y_{\nu+1} \\ V_1 &= \quad\quad Y_1 + \cdots + \gamma_1^{(\nu-3)} Y_{\nu-1} + \gamma_1^{(\nu-1)} Y_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ V_{\nu-1} &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad Y_{\nu-1} + \gamma'_{\nu-1} Y_{\nu+1} \\ V_\nu &= \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \gamma_\nu Y_{\nu+1} \end{cases}$$

übergeht in

$$\sum_i \sum_k c_{i+k+1} X_i Y_k \qquad \binom{i=0,1,\ldots \nu-1,\nu}{k=0,1,\ldots \nu-1,\nu+1}. \tag{19}$$

Von den beiden Substitutionen hat die erste die Determinante 1, die zweite aber die Determinante γ_ν. Daher ist die Diskriminante von (19) gleich der mit γ_ν multiplizierten Diskriminante von (18), also:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots c_\nu & c_{\nu+2} \\ c_2 & c_3 & \ldots c_{\nu+1} & c_{\nu+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} & \cdots c_{2\nu} & c_{2\nu+2} \end{vmatrix} = \gamma_\nu \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\nu = \gamma_\nu \varphi_{\nu+1} \quad \text{(nach (16))}. \tag{20}$$

Setzt man die Werte aus (17) und (20) in Satz 11 ein, so geht nun genau Satz 12 hervor.

III. Man kann der Identität des Satz 12 noch eine etwas bequemere Gestalt geben. Setzt man nämlich

$$\mathfrak{P}(x) = c_1 + c_2 \frac{x}{1!} + c_3 \frac{x^2}{2!} + c_4 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} + \gamma_\nu \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \gamma_\nu' \frac{x^{\nu+2}}{(\nu+2)!} + \gamma_\nu'' \frac{x^{\nu+3}}{(\nu+3)!} + \cdots \quad (\nu = 0,1,2,\ldots),$$

wobei es wieder auf Konvergenz gar nicht ankommt, sondern nur auf die formalen Gesetze, so geht besagte Identität für $X_i = \frac{x^i}{i!}$, $Y_i = \frac{y^i}{i!}$ über in

$$\mathfrak{P}(x+y) = \varepsilon_0 \mathfrak{P}_0(x)\mathfrak{P}_0(y) + \varepsilon_1 \mathfrak{P}_1(x)\mathfrak{P}_1(y) + \varepsilon_2 \mathfrak{P}_2(x)\mathfrak{P}_2(y) + \cdots.$$

Diese formale Identität ist der von Satz 12 offenbar völlig gleichwertig. Nun ist aber wiederum formal

$$x\int_0^\infty \mathfrak{P}(xt)e^{-t}dt = xc_1\int_0^\infty e^{-t}dt + \frac{xc_2}{1!}\int_0^\infty xte^{-t}dt + \frac{xc_3}{2!}\int_0^\infty x^2t^2e^{-t}dt + \cdots$$
$$= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots,$$

und man erhält somit

Satz 13. *Genügt eine Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x)$ *dem formalen Gesetz*

$$\mathfrak{P}(x+y) = \varepsilon_0\mathfrak{P}_0(x)\mathfrak{P}_0(y) + \varepsilon_1\mathfrak{P}_1(x)\mathfrak{P}_1(y) + \varepsilon_2\mathfrak{P}_2(x)\mathfrak{P}_2(y) + \cdots,$$

wobei allgemein $\varepsilon_\nu \neq 0$, *und*

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\nu!} + \gamma_\nu\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \gamma_\nu'\frac{x^{\nu+2}}{(\nu+2)!} + \cdots$$

ist, so wird der Kettenbruch

$$1 + \frac{\varepsilon_0 x}{1-\gamma_0 x} - \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}x^2}{1+(\gamma_0-\gamma_1)x} - \frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}x^2}{1+(\gamma_1-\gamma_2)x} - \cdots$$

assoziiert mit der formal gebildeten Potenzreihe $1 + x\int_0^\infty \mathfrak{P}(xt)e^{-t}dt$. (*Rogers* **1**).

Beispiel. Nach dem Additionstheorem der Funktion $\operatorname{cn} x$ (cosin amplitude) ist

$$\operatorname{cn}(x+y) = \frac{\operatorname{cn}x\operatorname{cn}y - \operatorname{dn}x\operatorname{dn}y\operatorname{sn}x\operatorname{sn}y}{1-k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2y} = \operatorname{cn}x\operatorname{cn}y - \operatorname{dn}x\operatorname{dn}y\operatorname{sn}x\operatorname{sn}y$$
$$+k^2\operatorname{cn}x\operatorname{cn}y\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2y - k^2\operatorname{dn}x\operatorname{dn}y\operatorname{sn}^3x\operatorname{sn}^3y + k^4\operatorname{cn}x\operatorname{cn}y\operatorname{sn}^4x\operatorname{sn}^4y - \cdots.$$

Dies ist eine Identität von der in Satz 13 verlangten Art, und zwar wird hier

$$\sqrt{\varepsilon_{2\nu}}\,\mathfrak{P}_{2\nu}(x) = \sqrt{k^{2\nu}}\operatorname{cn}x\operatorname{sn}^{2\nu}x = \sqrt{k^{2\nu}}\,x^{2\nu}(1+\alpha x^2+\cdots),$$
$$\sqrt{\varepsilon_{2\nu+1}}\;\mathfrak{P}_{2\nu+1}(x) = \sqrt{-k^{2\nu}}\operatorname{dn}x\operatorname{sn}^{2\nu+1}x = \sqrt{-k^{2\nu}}\,x^{2\nu+1}(1+\beta x^2+\cdots)$$

woraus folgt:

$$\varepsilon_{2\nu} = k^{2\nu}[(2\nu)!]^2, \quad \varepsilon_{2\nu+1} = -k^{2\nu}[(2\nu+1)!]^2, \quad \gamma_\nu = 0.$$

Nach Satz 13 ist daher die formale Potenzreihe

$$1 + x\int_0^\infty \operatorname{cn}(xt)e^{-t}dt \tag{21}$$

assoziiert mit dem Kettenbruch

$$1 + \frac{x|}{|1} + \frac{1^2x^2|}{|1} + \frac{2^2k^2x^2|}{|1} + \frac{3^2x^2|}{|1} + \frac{4^2k^2x^2|}{|1} + \frac{5^2x^2|}{|1} + \cdots. \tag{22}$$

Mit Hilfe der bekannten Formel[1])

$$\text{(23)} \qquad \operatorname{cn} x = \frac{2\pi}{kK} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu+\frac{1}{2}}}{1+q^{2\nu+1}} \cos \frac{(2\nu+1)\pi x}{2K}$$

wird der Ausdruck (21) auch gleich

$$\text{(24)} \qquad 1 + \frac{2\pi}{kK} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu+\frac{1}{2}}}{1+q^{2\nu+1}} \frac{x}{1+\left(\frac{(2\nu+1)\pi x}{2K}\right)^2}.\,^{2)}$$

IV. Hat der mit der Reihe

$$\text{(25)} \qquad 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

assoziierte Kettenbruch die Form

$$\text{(26)} \qquad 1 + \frac{k_1 x |}{| 1} + \frac{k_2 x^2 |}{| 1} + \frac{k_3 x^2 |}{| 1} + \frac{k_4 x^2 |}{| 1} + \cdots,$$

sind also alle $l_\nu = 0$, so stimmt der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung von (26) bis zur Potenz $x^{2\nu}$ mit der Reihe (25) überein. Läßt man beiderseits 1 weg und multipliziert mit x, so ergibt sich, daß der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung von

$$\text{(27)} \qquad \frac{k_1 x^2 |}{| 1} + \frac{k_2 x^2 |}{| 1} + \frac{k_3 x^2 |}{| 1} + \cdots$$

bis zur Potenz $x^{2\nu+1}$ mit $c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + \cdots$ übereinstimmt. Da aber in den Näherungsbrüchen von (27) offenbar keine ungeraden Exponenten vorkommen, so folgt: $c_2 = 0$, $c_4 = 0$, usw. Setzt man nun x an Stelle von x^2, so stimmt der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung von $\frac{k_1 x |}{| 1} + \frac{k_2 x |}{| 1} + \cdots$ bis zur Potenz x^ν mit $c_1 x + c_3 x^2 + c_5 x^3 + \cdots$ überein. Man erhält somit, wenn man beiderseits noch 1 addiert,

$$1 + c_1 x + c_3 x^2 + c_5 x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{k_1 x |}{| 1} + \frac{k_2 x |}{| 1} + \frac{k_3 x |}{| 1} + \cdots.$$

---

1) Siehe z. B. Jacobi: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, § 39 = Gesammelte Werke, I, pag. 157. Oder: H. Durège: Theorie der elliptischen Funktionen, 1. Aufl. S. 226, 4. Aufl. S. 253.

2) Auch dies ist hier nur formal zu verstehen und hat lediglich die Bedeutung, daß in (23), nachdem man die einzelnen Reihenglieder nach Potenzen von x entwickelt hat, jede Potenz x^ν ersetzt werden soll durch $\nu!\,x^{\nu+1}$; denn so entsteht ja $x\int_0^\infty \mathfrak{P}(xt)e^{-t}dt$ formal aus $\mathfrak{P}(x)$. Übrigens erkennt man sehr leicht, daß für reelle x die Reihe (23), wenn man xt statt x setzt und mit e^{-t} multipliziert, gliedweise integriert werden darf, so daß die Ausdrücke (21) und (24) wirklich einen Sinn haben und einander gleich sind. Dies wird später von Bedeutung sein, siehe § 68, III. Allein vorläufig kommt es darauf nicht an, sondern nur auf das Formale.

Wendet man dies z. B. auf den Kettenbruch (22) an, dessen assoziierte Reihe (21) oder (24) war, so ergibt sich die Formel:

$$(28)\begin{cases} 1+\frac{x|}{|1}+\frac{1^2x|}{|1}+\frac{2^2k^2x|}{|1}+\frac{3^2x|}{|1}+\frac{4^2k^2x|}{|1}+\frac{5^2x|}{|1}+\cdots \\ \sim 1+x\int\limits_0^\infty \operatorname{cn}(t\sqrt{x})e^{-t}dt=1+\frac{2\pi}{kK}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{q^{\nu+\frac{1}{2}}}{1+q^{2\nu+1}}\frac{x}{1+\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{2K}\right)^2 x}. \end{cases}$$

§ 62. Zusammenhang zwischen dem korrespondierenden und assoziierten Kettenbruch. — Einige Transformationen des korrespondierenden Kettenbruches.

I. Durch Vergleich der Sätze 5 und 11 erkennt man, daß jede Potenzreihe, die seminormal ist, auch einen assoziierten Kettenbruch hat, aber nicht umgekehrt. Man kann nun leicht die Koeffizienten des assoziierten aus denen des korrespondierenden Kettenbruches herleiten, ohne auf die Potenzreihe zurückzugehen. Zu dem Zweck seien die beiden unendlichen Kettenbrüche

$$(1)\qquad 1+\frac{a_1x|}{|1}+\frac{a_2x|}{|1}+\frac{a_3x|}{|1}+\cdots,$$

$$(2)\qquad 1+\frac{k_1x\ |}{|1+l_1x}+\frac{k_2x^2\ |}{|1+l_2x}+\frac{k_3x^2\ |}{|1+l_3x}+\cdots$$

mit ein und derselben Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ korrespondierend bzw. assoziiert. Aus dem Kettenbruch (1) geht durch Kontraktion (Formel 7, § 43) der folgende hervor:

$$(3)\ 1+\frac{a_1x\ |}{|1+a_2x}-\frac{a_2a_3x^2\ |}{|1+(a_3+a_4)x}-\frac{a_4a_5x^2\ |}{|1+(a_5+a_6)x}-\frac{a_6a_7x^2\ |}{|1+(a_7+a_8)x}-\cdots;$$

und zwar ist der Näherungsbruch λ^{ter} Ordnung von (3) zugleich Näherungsbruch $(2\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung von (1); seine Taylorsche Reihe stimmt also mit $\mathfrak{P}(x)$ bis zur Potenz $x^{2\lambda}$ überein. Das besagt aber, daß der Kettenbruch (3) mit $\mathfrak{P}(x)$ assoziiert, also mit (2) identisch ist. Zwischen den Koeffizienten des korrespondierenden und des assoziierten Kettenbruches besteht daher der folgende Zusammenhang (*Heilermann* 3):

$$(4)\qquad \begin{cases} k_1=a_1,\quad l_1=a_2, \\ k_{\nu+1}=-a_{2\nu}a_{2\nu+1},\quad l_{\nu+1}=a_{2\nu+1}+a_{2\nu+2} \qquad (\nu\geqq 1). \end{cases}$$

Damit die mit dem Kettenbruch (2) assoziierte Potenzreihe auch einen korrespondierenden Kettenbruch hat, ist demnach notwendig und hinreichend, daß die Gleichungen (4) eine Auflösung nach a_ν zulassen. Nun ist aber, wie man leicht sieht, ihre allgemeine Auflösung die folgende:

$$(5)\begin{cases} a_1 = k_1, & a_{2\nu+1} = -\frac{k_{\nu+1}|}{|l_\nu} + \frac{k_\nu|}{|l_{\nu-1}} + \frac{k_{\nu-1}|}{|l_{\nu-2}} + \cdots + \frac{k_2|}{|l_1} \quad (\nu \geqq 1), \\ a_2 = l_1, & a_{2\nu+2} = l_{\nu+1} + \frac{k_{\nu+1}|}{|l_\nu} + \frac{k_\nu|}{|l_{\nu-1}} + \frac{k_{\nu-1}|}{|l_{\nu-2}} + \cdots + \frac{k_2|}{|l_1} \quad (\nu \geqq 1), \end{cases}$$

und der korrespondierende Kettenbruch wird dann und nur dann existieren, wenn unter den Kettenbrüchen (5) kein sinnloser ist.

II. Wir geben hierzu einige Anwendungen.

A. Wenn der zu $\mathfrak{P}(x)$ korrespondierende Kettenbruch bekannt ist, soll der zu $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ korrespondierende gefunden werden.

Ist wieder $\frac{A_\nu(x)}{B_\nu(x)}$ der Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung von (1), so hat der Kettenbruch

$$0 + \frac{1|}{|1} + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots$$

die Näherungsbrüche $\frac{0}{1}, \frac{B_0}{A_0}, \frac{B_1}{A_1}, \frac{B_2}{A_2}, \cdots$. Aus ihm entsteht durch Kontraktion (§ 43, Formel (8)) der Kettenbruch

$$(6) \qquad 1 - \frac{a_1 x|}{|1 + (a_1 + a_2)x} - \frac{a_2 a_3 x^2|}{|1 + (a_3 + a_4)x} - \frac{a_4 a_5 x^2|}{|1 + (a_5 + a_6)x} - \cdots$$

mit den Näherungsbrüchen $\frac{B_0}{A_0}, \frac{B_2}{A_2}, \frac{B_4}{A_4}, \cdots$. Da aber in der Reihe $\mathfrak{P}_0(x) - \frac{A_{2\lambda}(x)}{B_{2\lambda}(x)}$ die Potenzen von x bis zur $2\lambda^{\text{ten}}$ einschließlich herausfallen, so fallen sie in

$$\frac{1}{\mathfrak{P}_0(x)} - \frac{B_{2\lambda}(x)}{A_{2\lambda}(x)} = -\frac{B_{2\lambda}(x)}{\mathfrak{P}_0(x) A_{2\lambda}(x)} \left(\mathfrak{P}_0(x) - \frac{A_{2\lambda}(x)}{B_{2\lambda}(x)}\right)$$

ebenfalls heraus, und folglich ist der Kettenbruch (6) der mit $\frac{1}{\mathfrak{P}_0(x)}$ assoziierte, woraus mit Hilfe der Formeln (4) oder (5) sogleich der korrespondierende gefunden wird. Es ergibt sich so (*Rogers* **1**):

Satz 14. *Aus der Korrespondenz*

$$\mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \textit{ in infin.}$$

erhält man die Koeffizienten für den mit $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ korrespondierenden Kettenbruch

$$\frac{1}{\mathfrak{P}(x)} \sim 1 + \frac{e_1 x|}{|1} + \frac{e_2 x|}{|1} + \frac{e_3 x|}{|1} + \cdots$$

durch das Gleichungssystem:

$$e_1 = -a_1; \quad e_2 = a_1 + a_2$$

$$e_{2\nu} e_{2\nu+1} = a_{2\nu} a_{2\nu+1}; \quad e_{2\nu+1} + e_{2\nu+2} = a_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} \quad (\nu \geqq 1).$$

Erstes Beispiel. Wendet man diesen Satz auf die Gaußsche Formel (15) des § 59 an, so erhält man die Formel von *Stern* **1**:

$$(7)\begin{cases} F(\alpha, 1, \gamma; x) \sim 1 + \frac{e_1 x \mid}{\mid 1} + \frac{e_2 x \mid}{\mid 1} + \frac{e_3 x \mid}{\mid 1} + \cdots \text{ in infin.} \\ e_1 = \frac{\alpha}{\gamma}, \; e_{2\nu} = -\frac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-2)(\gamma+2\nu-1)}, \; e_{2\nu+1} = -\frac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}. \end{cases}$$

Denn diese Werte für e_ν erfüllen die Gleichungen des Satz 14, wie man sofort verifiziert. Ebenso erhält man aus der Formel (18) des § 59:

$$(8)\begin{cases} \Phi(1, \gamma; x) \sim 1 + \frac{\frac{1}{\gamma}x \mid}{\mid 1} - \frac{\frac{\gamma x}{\gamma(\gamma+1)} \mid}{\mid 1} + \frac{\frac{1 x}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \mid}{\mid 1} \\ - \frac{\frac{(\gamma+1)x}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \mid}{\mid 1} + \frac{\frac{2x}{(\gamma+3)(\gamma+4)} \mid}{\mid 1} - \frac{\frac{(\gamma+2)x}{(\gamma+4)(\gamma+5)} \mid}{\mid 1} + \cdots. \end{cases}$$

Endlich aus Formel (32) des § 59:

$$(9)\begin{cases} 1 + qx + q^4x^2 + q^9x^3 + \cdots \sim 1 + \frac{qx \mid}{\mid 1} - \frac{q^3x \mid}{\mid 1} + \frac{q^2(1-q^2)x \mid}{\mid 1} \\ - \frac{q^7x \mid}{\mid 1} + \frac{q^5(1-q^4)x \mid}{\mid 1} - \frac{q^{11}x \mid}{\mid 1} + \frac{q^7(1-q^6)x \mid}{\mid 1} - \cdots \text{ in infin.} \end{cases}$$

In ähnlicher Weise lassen sich noch andere Formeln des § 59 umformen.

Zweites Beispiel. Wann ist $\mathfrak{P}(-x) = \frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$?

Es muß $e_\nu = -a_\nu$ sein, so daß die Gleichungen von Satz 14 übergehen in:

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}, \quad a_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} = 0.$$

Daher:

Satz 15. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die mit einem unendlichen Kettenbruch korrespondierende Reihe der formalen Funktionalgleichung* $\mathfrak{P}(x)\mathfrak{P}(-x) = 1$ *genügt, besteht darin, daß der Kettenbruch die Form hat:*

$$1 + \frac{a_1 x \mid}{\mid 1} - \frac{\frac{a_1}{2} x \mid}{\mid 1} + \frac{a_3 x \mid}{\mid 1} - \frac{a_3 x \mid}{\mid 1} + \frac{a_5 x \mid}{\mid 1} - \frac{a_5 x \mid}{\mid 1} + \frac{a_7 x \mid}{\mid 1} - \frac{a_7 x \mid}{\mid 1} + - \cdots.$$

Der mit e^x korrespondierende Kettenbruch Seite 312 bestätigt diese Regel. Übrigens sieht man leicht, daß auch die endlichen Kettenbrüche der Form

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} - \frac{\frac{a_1}{2} x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} - \frac{a_3 x|}{|1} + - \cdots + \frac{a_{2\nu-1} x|}{|1} - \frac{a_{2\nu-1} x|}{|1}$$

der obigen Funktionalgleichung genügen, indem hier $A_{2\nu}(-x) = B_{2\nu}(x)$ ist. Wir werden diese Tatsache indessen nicht gebrauchen und überlassen den Beweis, der am besten durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ zu führen ist, dem Leser.

Die Formeln von Satz 14 gestatten eine bemerkenswerte Auflösung. Setzt man nämlich

$$(10) \quad 1 = \gamma_0; \; 1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4} + \cdots + \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}} = \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist identisch

$$a_{2\nu+1}(\gamma_\nu - \gamma_{\nu-1}) = a_{2\nu+2}(\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu),$$

also

$$(11) \qquad a_{2\nu+1}\gamma_{\nu-1} + a_{2\nu+2}\gamma_{\nu+1} = (a_{2\nu+1} + a_{2\nu+2})\gamma_\nu.$$

Die Auflösung der Gleichungen von Satz 14 ergibt sich dann in der Form

$$(12) \qquad e_1 = -a_1, \quad e_{2\nu} = a_{2\nu}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_{\nu-1}}, \quad e_{2\nu+1} = a_{2\nu+1}\frac{\gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu} \quad (\nu \geqq 1).$$

Denn in der Tat ist dies für e_1 und e_2 richtig, und im übrigen folgt aus (12)

$$e_{2\nu}e_{2\nu+1} = a_{2\nu}a_{2\nu+1}$$

$$e_{2\nu+1} + e_{2\nu+2} = \frac{a_{2\nu+1}\gamma_{\nu-1} + a_{2\nu+2}\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu} = a_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} \quad \text{(nach (11))},$$

wie es nach Satz 14 sein soll. Man ersieht hieraus, daß die Reihe $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ dann und nur dann einen korrespondierenden Kettenbruch hat (semi-normal ist), wenn alle γ_ν von Null verschieden sind.

Die Formeln (12) werden noch bequemer, wenn die Kettenbrüche durch äquivalente mit lauter Teilzählern x ersetzt werden:

$$(13) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}(x) \sim 1 + \dfrac{a_1 x|}{|1} + \dfrac{a_2 x|}{|1} + \cdots \equiv 1 + \dfrac{x|}{|b_1} + \dfrac{x|}{|b_2} + \cdots, \\ \dfrac{1}{\mathfrak{P}(x)} \sim 1 + \dfrac{e_1 x|}{|1} + \dfrac{e_2 x|}{|1} + \cdots \equiv 1 + \dfrac{x|}{|f_1} + \dfrac{x|}{|f_2} + \cdots. \end{cases}$$

Hier ist genau wie in § 42, II, C:

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}}, \quad b_{2\nu+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu+1}},$$

$$f_1 = \frac{1}{e_1}, \quad f_{2\nu} = \frac{e_1 e_3 \cdots e_{2\nu-1}}{e_2 e_4 \cdots e_{2\nu}}, \quad f_{2\nu+1} = \frac{e_2 e_4 \cdots e_{2\nu}}{e_1 e_3 \cdots e_{2\nu+1}}.$$

Daher wird $\gamma_\nu = 1 + b_2 + b_4 + \cdots + b_{2\nu}$, und die Formeln (12) liefern:

$$(14)\begin{cases} f_1 = -b_1, \quad f_2 = \dfrac{-b_2}{1+b_2}, \\ f_{2\nu+1} = -b_{2\nu+1}(1+b_2+b_4+\cdots+b_{2\nu})^2 \qquad (\nu \geqq 1), \\ f_{2\nu} = \dfrac{-b_{2\nu}}{(1+b_2+b_4+\cdots+b_{2\nu-2})(1+b_2+b_4+\cdots+b_{2\nu})} \quad (\nu \geqq 2). \end{cases}$$

Diese Form der Lösung stammt von *Stieltjes* 5.

B. Aus dem mit $\mathfrak{P}(x)$ korrespondierenden Kettenbruch soll der mit $\mathfrak{P}(x) + Cx$ korrespondierende gefunden werden, wo C eine Konstante. Man setze

$$\mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots, \quad \mathfrak{P}(x) + Cx \sim 1 + \frac{g_1 x|}{|1} + \frac{g_2 x|}{|1} + \cdots$$

und bezeichne mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ die Näherungsbrüche des ersten, mit $\frac{G_\nu}{H_\nu}$ die des zweiten Kettenbruches. Durch Kontraktion (§ 43, Formel (8)) erhält man hieraus die Kettenbrüche

$$1 + a_1 x - \frac{a_1 a_2 x^2|}{|1+(a_2+a_3)x} - \frac{a_3 a_4 x^2|}{|1+(a_4+a_5)x} - \cdots,$$

$$1 + g_1 x - \frac{g_1 g_2 x^2|}{|1+(g_2+g_3)x} - \frac{g_3 g_4 x^2|}{|1+(g_4+g_5)x} - \cdots$$

mit den Näherungsbrüchen $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_3}{B_3}, \frac{A_5}{B_5}, \ldots$ bzw. $\frac{G_1}{H_1}, \frac{G_3}{H_3}, \frac{G_5}{H_5}, \ldots$. Betrachtet man daher die beiden Kettenbrüche

$$(15) \quad 1 - \frac{a_1 a_2 x|}{|1+(a_2+a_3)x} - \frac{a_3 a_4 x^2|}{|1+(a_4+a_5)x} - \frac{a_5 a_6 x^2|}{|1+(a_6+a_7)x} - \cdots,$$

$$(16) \quad 1 - \frac{g_1 g_2 x|}{|1+(g_2+g_3)x} - \frac{g_3 g_4 x^2|}{|1+(g_4+g_5)x} - \frac{g_5 g_6 x^2|}{|1+(g_6+g_7)x} - \cdots,$$

so sieht man leicht, daß der erste mit

$$(17) \qquad 1 + \frac{\mathfrak{P}(x) - 1 - a_1 x}{x},$$

der zweite entsprechend mit

$$(18) \qquad 1 + \frac{\mathfrak{P}(x) + Cx - 1 - g_1 x}{x}$$

assoziiert ist. Die Reihen (17), (18) müssen demnach das konstante Glied 1 haben, woraus zunächst folgt: $g_1 = a_1 + C$; dann sind aber beide Reihen identisch; daher auch die assoziierten Kettenbrüche (15) und (16). Man erhält somit

Satz 16. *Aus der Korrespondenz*

$$\mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots \textit{ in infin.}$$

findet man die Koeffizienten des mit $\mathfrak{P}(x) + Cx$ *korrespondierenden Kettenbruches*

$$\mathfrak{P}(x) + Cx \sim 1 + \frac{g_1 x|}{|1} + \frac{g_2 x|}{|1} + \cdots$$

durch das Gleichungssystem

$$g_1 = a_1 + C$$

$$g_{2\nu-1} g_{2\nu} = a_{2\nu-1} a_{2\nu}, \quad g_{2\nu} + g_{2\nu+1} = a_{2\nu} + a_{2\nu+1} \quad (\nu \geqq 1).$$

Erstes Beispiel. Die mit dem periodischen Kettenbruch

$$1 + \frac{2e^{i\alpha}x|}{|1} + \frac{e^{-i\alpha}x|}{|1} + \frac{e^{i\alpha}x|}{|1} + \frac{e^{-i\alpha}x|}{|1} + \frac{e^{i\alpha}x|}{|1} + \cdots \quad (i = \sqrt{-1})$$

korrespondierende Reihe läßt sich nach den Erörterungen zu Beginn des § 60 leicht berechnen. Man findet sie gleich

$$\sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha} + 2ix\sin\alpha.$$

Hieraus kann mit Hilfe von Satz 16 der mit $\sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha}$ korrespondierende Kettenbruch hergeleitet werden. Man gelangt so von neuem zu der Formel (16) des § 60.

Zweites Beispiel. Soll $\mathfrak{P}(x) - a_1 x$ keine ungeraden Potenzen von x enthalten, so muß $\mathfrak{P}(x) - a_1 x = \mathfrak{P}(-x) + a_1 x$ sein; also

$$\mathfrak{P}(x) - 2a_1 x = \mathfrak{P}(-x).$$

Man erhält daher, indem man $C = -2a_1$ wählt: $g_\nu = -a_\nu$. Also nach Satz 16:

$$a_{2\nu} + a_{2\nu+1} = 0.$$

Somit ergibt sich

Satz 17. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die mit einem unendlichen Kettenbruch korrespondierende Potenzreihe keine ungeraden Potenzen außer der ersten enthält, besteht darin, daß der Kettenbruch die Form hat*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} - \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_4 x|}{|1} - \frac{a_4 x|}{|1} + \frac{a_6 x|}{|1} - \frac{a_6 x|}{|1} + - \cdots.$$

Zum Beispiel liefert die Formel (16) des § 59 für $\gamma = 2\beta + 1$:

$$\frac{\Phi(\beta, 2\beta+1; x)}{\Phi(\beta+1, 2\beta+2; x)} \sim 1 - \frac{\frac{x}{4\beta+2}\Big|}{|1} + \frac{\frac{x}{4\beta+6}\Big|}{|1} - \frac{\frac{x}{4\beta+6}\Big|}{|1}$$

$$+ \frac{\frac{x}{4\beta+10}\Big|}{|1} - \frac{\frac{x}{4\beta+10}\Big|}{|1} + - \cdots,$$

woraus sich ergibt, daß die Funktion von x

$$\frac{\Phi(\beta, 2\beta+1; x)}{\Phi(\beta+1, 2\beta+2; x)} + \frac{x}{4\beta+2}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{\Phi(\beta, 2\beta; x)}{\Phi(\beta+1, 2\beta+2; x)}$$

eine gerade Funktion ist. Direkt ist das wohl nicht so leicht zu verifizieren; allerdings folgt es auch daraus, daß $\Phi(\beta, 2\beta; x)e^{-\frac{x}{2}}$ eine gerade Funktion von x ist, wie sich aus der Fußnote Seite 313 für $\gamma = 2\beta$ ergibt.

Auch die Formeln des Satz 16 gestatten eine ähnliche Auflösung wie die von Satz 14. Setzt man

$$(19) \quad 1 = \delta_0, \quad 1 + C\left(\frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1 a_3} + \cdots + \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu-2}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}\right) = \delta_\nu \quad (\nu \geqq 1),$$

so ist identisch

$$a_{2\nu}(\delta_\nu - \delta_{\nu-1}) = a_{2\nu+1}(\delta_{\nu+1} - \delta_\nu),$$

also

$$(20) \qquad a_{2\nu}\delta_{\nu-1} + a_{2\nu+1}\delta_{\nu+1} = (a_{2\nu} + a_{2\nu+1})\delta_\nu.$$

Die Gleichungen von Satz 16 lassen sich dann auflösen in der Form

$$(21) \qquad g_{2\nu-1} = a_{2\nu-1}\frac{\delta_\nu}{\delta_{\nu-1}}, \quad g_{2\nu} = a_{2\nu}\frac{\delta_{\nu-1}}{\delta_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Denn dies stimmt in der Tat für g_1, und im übrigen folgt aus (21):

$$g_{2\nu-1}g_{2\nu} = a_{2\nu-1}a_{2\nu},$$

$$g_{2\nu} + g_{2\nu+1} = \frac{a_{2\nu}\delta_{\nu-1} + a_{2\nu+1}\delta_{\nu+1}}{\delta_\nu} = a_{2\nu} + a_{2\nu+1} \quad \text{(nach (20))},$$

wie es nach Satz 16 sein soll. Die Reihe $\mathfrak{P}(x) + Cx$ ist also dann und nur dann seminormal, wenn die Zahlen δ_ν alle von Null verschieden sind.

Auch hier werden die Formeln (21) noch bequemer, wenn man die äquivalenten Kettenbrüche

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots \equiv 1 + \frac{x|}{|b_1} + \frac{x|}{|b_2} + \cdots, \\ \mathfrak{P}(x) + Cx \sim 1 + \frac{g_1 x|}{|1} + \frac{g_2 x|}{|1} + \cdots \equiv 1 + \frac{x|}{|h_1} + \frac{x|}{|h_2} + \cdots \end{cases}$$

einführt. Es ist dann $\delta_\nu = 1 + C(b_1 + b_3 + \cdots + b_{2\nu-1})$, und aus (21) folgt:

$$(23)\quad \begin{cases} h_1 = \dfrac{b_1}{1+Cb_1}, \quad h_{2\nu} = b_{2\nu}[1 + C(b_1 + b_3 + \cdots + b_{2\nu-1})]^2 \\ h_{2\nu+1} = \dfrac{b_{2\nu+1}}{[1+C(b_1+b_3+\cdots+b_{2\nu-1})][1+C(b_1+b_3+\cdots+b_{2\nu+1})]} \\ (\nu \geqq 1). \end{cases}$$

Auch diese Formeln hat wieder *Stieltjes* 5 gefunden.

C. Aus dem mit $\mathfrak{P}(x)$ korrespondierenden Kettenbruch soll der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)$ korrespondierende gefunden werden, wo C eine Konstante.

Man setze

$$\mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots, \quad \mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right) \sim 1 + \frac{i_1 x|}{|1} + \frac{i_2 x|}{|1} + \cdots;$$

dann sind nach den Erörterungen zu Beginn dieses Paragraphen die mit $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)$ assoziierten Kettenbrüche bzw. die folgenden:

$$(24)\qquad 1 + \frac{a_1 x\ |}{|1+a_2 x} - \frac{a_2 a_3 x^2\ |}{|1+(a_3+a_4)x} - \frac{a_4 a_5 x^2\ |}{|1+(a_5+a_6)x} - \cdots,$$

$$(25)\qquad 1 + \frac{i_1 x\ |}{|1+i_2 x} - \frac{i_2 i_3 x^2\ |}{|1+(i_3+i_4)x} - \frac{i_4 i_5 x^2\ |}{|1+(i_5+i_6)x} - \cdots.$$

Nun ist formal

$$\mathfrak{P}(x) - \frac{A_{2\lambda}(x)}{B_{2\lambda}(x)} = \alpha_1 x^{2\lambda+1} + \alpha_2 x^{2\lambda+2} + \alpha_3 x^{2\lambda+3} + \cdots,$$

und folglich auch

$$(26)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}\left(\dfrac{x}{1+Cx}\right) - \dfrac{A_{2\lambda}\left(\dfrac{x}{1+Cx}\right)}{B_{2\lambda}\left(\dfrac{x}{1+Cx}\right)} \\ \quad = \alpha_1\left(\dfrac{x}{1+Cx}\right)^{2\lambda+1} + \alpha_2\left(\dfrac{x}{1+Cx}\right)^{2\lambda+2} + \alpha_3\left(\dfrac{x}{1+Cx}\right)^{2\lambda+3} + \cdots \\ \quad = \beta_1 x^{2\lambda+1} + \beta_2 x^{2\lambda+2} + \beta_3 x^{2\lambda+3} + \cdots. \end{cases}$$

Da der Kettenbruch (24) die Näherungsbrüche $\frac{A_{2\lambda}(x)}{B_{2\lambda}(x)}$ hat, so erhält man den Kettenbruch mit den Näherungsbrüchen $\frac{A_{2\lambda}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)}{B_{2\lambda}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)}$ dadurch, daß man in (24) x durch $\frac{x}{1+Cx}$ ersetzt. Der so entstehende Kettenbruch ist aber äquivalent mit

$$(27)\quad 1 + \frac{a_1 x\ |}{|1+Cx+a_2 x} - \frac{a_2 a_3 x^2\ |}{|1+Cx+(a_3+a_4)x} - \frac{a_4 a_5 x^2\ |}{|1+Cx+(a_5+a_6)x} - \cdots.$$

Also ist auch für den Kettenbruch (27) der Näherungsbruch λ^{ter} Ordnung gleich $\dfrac{A_{2\lambda}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)}{B_{2\lambda}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)}$; seine Taylorsche Reihe stimmt daher nach (26) bis zur Potenz $x^{2\lambda}$ einschließlich mit $\mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)$ überein. Das besagt aber, der Kettenbruch (27) ist der mit $\mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)$ assoziierte und daher mit (25) identisch. Somit ergibt sich

Satz 18. *Aus der Korrespondenz*

$$\mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \textit{ in infin.}$$

erhält man die Koeffizienten des mit $\mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right)$ *korrespondierenden Kettenbruches*

$$\mathfrak{P}\left(\frac{x}{1+Cx}\right) \sim 1 + \frac{i_1 x|}{|1} + \frac{i_2 x|}{|1} + \frac{i_3 x|}{|1} + \cdots$$

durch das Gleichungssystem

$$i_1 = a_1, \quad i_2 = a_2 + C$$

$$i_{2\nu} i_{2\nu+1} = a_{2\nu} a_{2\nu+1}, \quad i_{2\nu+1} + i_{2\nu+2} = a_{2\nu+1} + a_{2\nu+2} + C \quad (\nu \geqq 1).$$

Die Auflösung dieser Formeln ist wieder einfach; es ergibt sich nämlich (*Stieltjes* **4b**):

$$(28) \quad \begin{cases} i_{2\nu} = C \dfrac{B_{2\nu}\left(\frac{1}{C}\right)}{B_{2\nu-2}\left(\frac{1}{C}\right)} & (\nu \geqq 1), \\[2ex] i_1 = a_1, \quad i_{2\nu+1} = \dfrac{a_{2\nu} a_{2\nu+1}}{C} \dfrac{B_{2\nu-2}\left(\frac{1}{C}\right)}{B_{2\nu}\left(\frac{1}{C}\right)} & (\nu \geqq 1). \end{cases}$$

Denn hieraus folgt in der Tat: $i_2 = C + a_2$; ferner

$$i_{2\nu} i_{2\nu+1} = a_{2\nu} a_{2\nu+1},$$

$$i_{2\nu+1} + i_{2\nu+2} = \frac{a_{2\nu} a_{2\nu+1} B_{2\nu-2}\left(\frac{1}{C}\right) + C^2 B_{2\nu+2}\left(\frac{1}{C}\right)}{C B_{2\nu}\left(\frac{1}{C}\right)}$$

$$= \frac{C^2\left(1 + \frac{a_{2\nu+1}}{C} + \frac{a_{2\nu+2}}{C}\right) B_{2\nu}\left(\frac{1}{C}\right)}{C B_{2\nu}\left(\frac{1}{C}\right)} = C + a_{2\nu+1} + a_{2\nu+2},$$

wie es nach Satz 18 sein soll.

§ 63. Konvergenz und Divergenz.

I. Man ist versucht zu glauben, daß die Konvergenz von Kettenbruch und korrespondierender Reihe sich gegenseitig bedingen. Daß dem gleichwohl nicht so ist, lehrt

Satz 19. *Bezüglich der Konvergenz und Divergenz eines Kettenbruches der Form* $1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots$ *und seiner korrespondierenden Reihe können für einzelne Werte von* x *vier Fälle wirklich eintreten, nämlich:*

1. *Kettenbruch und Reihe konvergieren beide;*
2. *Kettenbruch und Reihe divergieren beide;*
3. *Der Kettenbruch konvergiert, die Reihe divergiert;*
4. *Der Kettenbruch divergiert, die Reihe konvergiert.*

Zum Beweis betrachten wir den dreigliedrig reinperiodischen Kettenbruch

$$1 + \frac{2x|}{|1} + \frac{x|}{|1} - \frac{3x|}{|1} + \frac{2x|}{|1} + \frac{x|}{|1} - \frac{3x|}{|1} + \cdots,$$

bei dem alle vier Fälle zugleich realisiert sind. Seine korrespondierende Reihe genügt nämlich der quadratischen Gleichung

$$\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \frac{2x|}{|1} + \frac{x|}{|1} - \frac{3x\ |}{|\ \mathfrak{P}_0(x)},$$

und hieraus findet man

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{1 + 6x + \sqrt{1 - 24x^3}}{2(1+x)} = 1 + 2x - 2x^2 - \cdots.$$

Sie konvergiert also, wenn wir nur reelle Werte von x ins Auge fassen, für $-\frac{1}{\sqrt[3]{24}} \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{24}}$, und divergiert, wenn x außerhalb dieses Intervalles liegt. Bei dem Kettenbruch dagegen ist die Konvergenz für $x = 0$ evident; für $x \neq 0$ aber zeigt Satz 38, Kap. VII, daß er gegen den Wert

$$\frac{1 + 6x + \sqrt{1 - 24x^3}}{2(1+x)}$$

konvergiert, wenn $x \neq -1$, und dabei entweder die Quadratwurzel verschwindet, oder die folgenden drei Bedingungen zugleich erfüllt sind:

(a) $$|1 + \sqrt{1 - 24x^3}| > |1 - \sqrt{1 - 24x^3}|$$

(b) $$\frac{1 + 6x - \sqrt{1 - 24x^3}}{2(1+x)} \neq 1$$

(c) $$\frac{1 + 6x - \sqrt{1 - 24x^3}}{2(1+x)} \neq 1 + 2x.$$

In allen andern Fällen divergiert der Kettenbruch. Die Bedingungen (b) und (c) lassen sich einfacher schreiben:

(b) $$\sqrt{1-24x^3} \neq 4x-1$$

(c) $$\sqrt{1-24x^3} \neq -1-4x^2.$$

Es ergibt sich also, daß der Kettenbruch für alle negativen x konvergiert außer für $x=-1$. Für $x>\frac{1}{\sqrt[3]{24}}$ divergiert er, weil die Bedingung (a) nicht erfüllt ist. Für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{24}}$ endlich findet Konvergenz statt, abgesehen von dem Wert $x=\frac{1}{3}$. Bei diesem ist nämlich für das durch (a) geforderte Vorzeichen der Quadratwurzel die Bedingung (b) nicht erfüllt. Es ergibt sich demnach folgendes Bild:

$x<-1$: Kettenbruch konvergiert, Reihe divergiert,

$x=-1$: Kettenbruch divergiert, Reihe divergiert,

$-1<x<-\frac{1}{\sqrt[3]{24}}$: Kettenbruch konvergiert, Reihe divergiert,

$-\frac{1}{\sqrt[3]{24}} \leqq x < \frac{1}{3}$: Kettenbruch konvergiert, Reihe konvergiert,

$x=\frac{1}{3}$: Kettenbruch divergiert, Reihe konvergiert,

$\frac{1}{3}<x \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{24}}$: Kettenbruch konvergiert, Reihe konvergiert,

$x>\frac{1}{\sqrt[3]{24}}$: Kettenbruch divergiert, Reihe divergiert.

Hier treten also in der Tat alle vier Fälle ein. Wenn Kettenbruch und Reihe beide konvergieren, so zeigen übrigens die angegebenen Ausdrücke, daß sie gegen den selben Wert konvergieren. Ob sich das stets so verhält, oder ob auch das Gegenteil eintreten kann, ist eine offene Frage.

Interessant ist, daß selbst, wenn die Reihe den Konvergenzradius Null hat, der Kettenbruch gleichwohl konvergieren kann. Zum Beispiel ist der Kettenbruch

$$1+\frac{x\,|}{|\,1}+\frac{1x\,|}{|\,1}+\frac{1x\,|}{|\,1}+\frac{2x\,|}{|\,1}+\frac{2x\,|}{|\,1}+\frac{3x\,|}{|\,1}+\frac{3x\,|}{|\,1}+\frac{4x\,|}{|\,1}+\frac{4x\,|}{|\,1}+\cdots$$

äquivalent mit

$$1+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{1}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{1}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{1}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{2}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{1}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{3}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{1}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{4}}+\frac{x\,|}{|\,\frac{1}{1}}+\cdots,$$

also nach Satz 37, Kap. VII gleichmäßig konvergent in jedem endlichen Bereich, der der negativ reellen Achse nicht beliebig nahe kommt. Die korrespondierende Reihe dagegen ist, wie man aus § 59, Formel (26) für $\alpha = 1$ entnimmt, die folgende:

$$1 + x\,\Omega(1, 1; x) = 1 + x - 1!\,x^2 + 2!\,x^3 - 3!\,x^4 + 4!\,x^5 - \cdots,$$

hat also den Konvergenzradius Null. Mit dieser Erscheinung werden wir uns im nächsten Kapitel eingehend zu beschäftigen haben.

II. Von größter Wichtigkeit ist nun

Satz 20. *Konvergiert der unendliche Kettenbruch*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0)$$

bzw.

$$1 + \frac{k_1 x\ |}{|1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2\ |}{|1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2\ |}{|1 + l_3 x} + \cdots \qquad (k_\nu \neq 0)$$

gleichmäßig in einem abgeschlossenen zusammenhängenden Bereich T, der den Nullpunkt im Innern enthält, so stellt er eine im Innern von T reguläre analytische, aber niemals rationale Funktion dar, die außerdem im Innern eines jeden in T gelegenen Kreises K mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt auch gleich der korrespondierenden bzw. assoziierten Reihe ist. (*Pringsheim* **5**.)

Das folgt leicht aus einem bekannten Satz von Weierstraß.[1]) Wir beweisen etwa den Fall des korrespondierenden Kettenbruches; für den assoziierten ist die Methode ganz entsprechend. Wenn wieder A_ν, B_ν die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung sind, so gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz einen Index n derart, daß für $\nu \geqq n$ im Bereich T überall $B_\nu \neq 0$ ist, und der Wert des Kettenbruches wird dann in T dargestellt durch die gleichmäßig konvergente Reihe

$$\frac{A_n}{B_n} + \left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right) + \left(\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\right) + \cdots,$$

deren einzelne Glieder in T reguläre rationale Funktionen sind.

Nach Weierstraß ist daher der Kettenbruch selbst im Innern von T regulär. Nun sei wieder $1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ die korrespondierende Reihe; dann sind im Innern eines jeden ganz in T gelegenen Kreises K, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist, die Funktionen $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ für $\nu \geqq n$ regulär, also die Taylorschen Reihen

1) Zur Funktionenlehre. Monatsber. der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1880.

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_\nu x^\nu + \gamma_{\nu,1} x^{\nu+1} + \gamma_{\nu,2} x^{\nu+2} + \cdots \quad (\nu \geqq n)$$

konvergent. Daher ist im Kreis K:

$$\frac{A_n}{B_n} = 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \gamma_{n,1} x^{n+1} + \gamma_{n,2} x^{n+2} + \cdots$$

$$\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n} = (c_{n+1} - \gamma_{n,1}) x^{n+1} + (\gamma_{n+1,1} - \gamma_{n,2}) x^{n+2} + \cdots$$

$$\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} = (c_{n+2} - \gamma_{n+1,1}) x^{n+2} + \cdots.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt aber hieraus nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz:

$$\frac{A_n}{B_n} + \left(\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}} - \frac{A_n}{B_n}\right) + \left(\frac{A_{n+2}}{B_{n+2}} - \frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\right) + \cdots$$
$$= 1 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \cdots;$$

also ist in der Tat der Kettenbruch gleich der korrespondierenden Reihe. Nun bleibt noch zu zeigen, daß der Kettenbruch keine rationale Funktion sein kann. Aber in diesem Fall müßte ja nach dem Bewiesenen auch die korrespondierende Reihe eine rationale Funktion darstellen, was jedoch, wie Seite 307 oben bemerkt wurde, nicht möglich ist.

Weiter beweisen wir noch

Satz 21. *Wenn die beiden unendlichen Kettenbrüche*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots, \quad 1 + \frac{a_1' x|}{|1} + \frac{a_2' x|}{|1} + \cdots \quad (a_\nu \neq 0,\ a_\nu' \neq 0)$$

in der Umgebuug des Nullpunktes gleichmäßig konvergieren, so sind die durch sie dargestellten analytischen Funktionen nur dann identisch, wenn die Kettenbrüche identisch sind.

Nach Satz 20 müssen nämlich die korrespondierenden Reihen die gleichen sein, nach Satz 3 also auch die Kettenbrüche.

§ 64. Beispiele. — Die Kettenbrüche von Gauß und Heine.

I. Wir beweisen zunächst ein paar allgemeine Sätze.

Satz 22. *Wenn die Koeffizienten des unendlichen Kettenbruches*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \quad (a_\nu \neq 0)$$

den Ungleichungen $|a_\nu| \leqq g$ *genügen, so stellt er im Kreis* $|x| < \frac{1}{4g}$ *eine*

reguläre analytische, aber nicht rationale Funktion dar, welche daselbst auch gleich der korrespondierenden Reihe ist. (*van Vleck* 2, *Pringsheim* 5.)

In der Tat, nach Satz 30, Kap. VII (mit $p_\nu = 2$) ist der Kettenbruch für $|x| \leqq \frac{1}{4g}$ gleichmäßig konvergent, woraus nach Satz 20 die Behauptung folgt. Beispiele hierfür liefern die periodischen Kettenbrüche.

Satz 23. *Wenn* $\limsup\limits_{\nu=\infty} |a_\nu| \leqq g$, *so ist der Kettenbruch*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0)$$

im Bereich $|x| < \frac{1}{4g}$ *eine bis auf etwaige Pole reguläre analytische, aber nicht rationale Funktion, wobei in den Polen unwesentliche Divergenz stattfindet. In der Umgebung des Nullpunktes ist der Kettenbruch auch gleich der korrespondierenden Reihe.* (*van Vleck* 2, *Pringsheim* 5.)

Beweis. Sei g' eine Zahl, die (beliebig wenig) größer ist als g; es genügt dann zu zeigen, daß der Kettenbruch für $|x| < \frac{1}{4g'}$ die besagten Eigenschaften hat. Da nun $\limsup\limits_{\nu=\infty} |a_\nu| \leqq g$, so gibt es eine Zahl n derart, daß $|a_\nu| \leqq g'$ für $\nu > n$ ist. Nach Satz 22 ist daher der Kettenbruch

$$(1) \qquad 1 + \frac{a_{n+1} x|}{|1} + \frac{a_{n+2} x|}{|1} + \frac{a_{n+3} x|}{|1} + \cdots$$

für $|x| < \frac{1}{4g'}$ regulär und gleich seiner korrespondierenden Reihe $\mathfrak{P}_n(x)$. Bezeichnet man also wieder mit $A_\nu(x)$, $B_\nu(x)$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung des gegebenen Kettenbruches, so sind in dem Ausdruck

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{P}_n(x) A_{n-1}(x) + a_n x A_{n-2}(x)}{\mathfrak{P}_n(x) B_{n-1}(x) + a_n x B_{n-2}(x)}$$

Zähler und Nenner im Bereich $|x| < \frac{1}{4g'}$ reguläre analytische Funktionen. Dabei kann die Nennerfunktion nicht identisch verschwinden, weil sie für $x = 0$ den Wert 1 hat. Folglich ist der Nenner allenfalls an einzelnen Stellen des Bereiches $|x| < \frac{1}{4g'}$ gleich Null, und an diesen Stellen ist der Zähler von (2) sicher von Null verschieden, weil sonst $A_{n-1}B_{n-2} - A_{n-2}B_{n-1} = \pm a_1 a_2 \ldots a_{n-1} x^{n-1}$ verschwinden müßte, während doch $x = 0$ keine Nullstelle des Nenners ist. Der Ausdruck (2) ist daher für $|x| < \frac{1}{4g'}$ eine bis auf etwaige Pole reguläre Funktion $F(x)$, wobei die Pole sich mit den Nullstellen des Nenners decken.

Anderseits ist aber der Ausdruck (2) auch gleich dem endlichen Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots + \frac{a_{n-1} x|}{|1} + \frac{a_n x|}{|\mathfrak{P}_n(x)},$$

also in der Umgebung des Nullpunktes auch gleich $\mathfrak{P}_0(x)$. Unter Anwendung der Sätze 1 und 3, Kap. I folgt hieraus, daß auch der unendliche Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots$$

für $|x| < \frac{1}{4g}$, die Funktion $F(x)$ darstellt, wobei in den Polen unwesentliche Divergenz statthat. Für kleine $|x|$ ist $F(x) = \mathfrak{P}_0(x)$, und natürlich kann $\mathfrak{P}_0(x)$ wieder nicht rational sein. Damit ist Satz 23 bewiesen. Ein Spezialfall ist

Satz 24. *Wenn* $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, *so ist der Kettenbruch*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0)$$

eine meromorphe, aber nicht rationale Funktion[1]*), wobei nur in den etwaigen Polen unwesentliche Divergenz stattfindet. In der Umgebung des Nullpunktes ist diese Funktion auch gleich der korrespondierenden Reihe.*

In der Tat braucht man nur in Satz 23 für g eine beliebig kleine Zahl zu wählen, um Satz 24 zu erhalten. — Insbesondere wird der Kettenbruch dann bis auf Pole regulär sein, wenn die Reihe $\Sigma |a_\nu|$ konvergiert. Es verdient bemerkt zu werden, daß in diesem Fall sogar die Näherungszähler und -Nenner je für sich gegen zwei ganze Funktionen konvergieren: $\lim_{\nu=\infty} A_\nu(x) = \mathsf{A}(x)$, $\lim_{\nu=\infty} B_\nu(x) = \mathsf{B}(x)$ (*von Koch* 2, *Maillet* 2). Um das etwa für die A_ν zu beweisen, beachte man, daß A_ν nur solche Glieder enthält, die auch in dem Produkt

$$(1 + a_1 x)(1 + a_2 x) \ldots (1 + a_\nu x)$$

auftreten (nach der Euler-Mindingschen Formel, § 3). Für $|x| \leqq R$, wo R beliebig groß, ist also

$$|A_\nu(x)| \leqq (1 + |a_1| R)(1 + |a_2| R) \ldots (1 + |a_\nu| R),$$

$$< \prod_{\lambda=1}^{\infty} (1 + |a_\lambda| R) = C,$$

1) „Meromorph" heißt „im Endlichen überall eindeutig und bis auf etwaige Pole regulär". Eine meromorphe, aber nicht rationale Funktion hat für $x = \infty$ eine (einzige) wesentlich singuläre Stelle.

weil ja die Konvergenz der Reihe $\Sigma|a_\lambda|$ bekanntlich die des Produktes nach sich zieht. Aus der Rekursionsformel $A_\nu = A_{\nu-1} + a_\nu x A_{\nu-2}$ folgt dann:

$$|A_\nu(x) - A_{\nu-1}(x)| = |a_\nu x A_{\nu-2}(x)| \leq |a_\nu| RC,$$

so daß die Reihe

$$A_0(x) + (A_1(x) - A_0(x)) + (A_2(x) - A_1(x)) + (A_3(x) - A_2(x)) + \cdots$$

für $|x| \leq R$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Sie ist also für $|x| \leq R$ eine reguläre analytische Funktion; da R beliebig groß, heißt das aber eine ganze Funktion.[1]) W. z. b. w.

Etwas allgemeiner wie Satz 24 ist

Satz 25. *Wenn die Koeffizienten des Kettenbruches*

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \qquad (a_\nu \neq 0)$$

---

1) *Maillet* 2 hat noch bemerkt, daß $\mathsf{A}(x)$, $\mathsf{B}(x)$ keine gemeinsame Nullstelle haben. In der Tat, setzt man

$$\lim_{\nu=\infty} A_{\nu,\lambda}(x) = \mathsf{A}_\lambda(x) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

da diese Grenzwerte ja offenbar auch existieren müssen, so ist $\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}_0(x)$, und die Formel (25), Kap. I lehrt für $\lambda = 0$, $\lim \nu = \infty$: $\mathsf{B}(x) = \mathsf{A}_1(x)$. Die durch einen Druckfehler entstellte Formel (29), Kap. I muß richtig lauten: $A_{\nu+1,\lambda-1} = b_{\lambda-1} A_{\nu,\lambda} + a_\lambda A_{\nu-1,\lambda+1}$ und nimmt bei Anwendung auf unseren Kettenbruch die Form an:

$$A_{\nu+1,\lambda-1}(x) = A_{\nu,\lambda}(x) + a_\lambda x A_{\nu-1,\lambda+1}(x),$$

woraus für $\lim \nu = \infty$ folgt:

$$\text{(a)} \qquad \mathsf{A}_{\lambda-1}(x) = \mathsf{A}_\lambda(x) + a_\lambda x \mathsf{A}_{\lambda-1}(x) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wäre nun für einen bestimmten Wert von x zugleich

$$\mathsf{A}(x) = \mathsf{A}_0(x) = 0, \quad \mathsf{B}(x) = \mathsf{A}_1(x) = 0,$$

so müßte gewiß $x \neq 0$ sein, weil offenbar $\mathsf{A}(0) = 1$ ist. Daher wäre nach (a) auch $\mathsf{A}_\lambda(x) = 0$ für alle λ (Schluß von λ auf $\lambda + 1$). Aber da augenscheinlich $A_{\nu,\lambda}(x)$ nur Glieder enthält, die in dem Produkt

$$(1 + a_{\lambda+1}x)(1 + a_{\lambda+2}x) \cdots (1 + a_{\lambda+\nu}x)$$

vorkommen, und dabei insbesondere das Glied 1, so ist

$$|A_{\nu,\lambda}(x) - 1| \leq (1 + |a_{\lambda+1}x|)(1 + |a_{\lambda+2}x|) \cdots (1 + |a_{\lambda+\nu}x|) - 1.$$

Also auch, indem man zur Grenze $\nu = \infty$ übergeht:

$$\text{(b)} \qquad |\mathsf{A}_\lambda(x) - 1| \leq \prod_{\mu=\lambda}^{\infty} (1 + |a_{\mu+1}x|) - 1,$$

da das Produkt wegen der Konvergenz der Reihe $\Sigma|a_\nu|$ ebenfalls konvergiert. Weil aber die rechte Seite von (b) mit wachsendem λ offenbar beliebig klein wird, so ist gewiß $\mathsf{A}_\lambda(x) \neq 0$ für hinreichend große λ, im Widerspruch mit dem zuvor Festgestellten. $\mathsf{A}(x)$ und $\mathsf{B}(x)$ haben somit keine gemeinsame Nullstelle

einen Grenzwert $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a \neq 0$ *haben, so sei* T *ein den Nullpunkt im Innern enthaltender zusammenhängender abgeschlossener Bereich, der außerdem mit einem vom Punkt* $-\frac{1}{4a}$ *in der dem Nullpunkt entgegengesetzten Richtung ins Unendliche geführten geradlinigen Schnitt keinen Punkt gemein hat.*

Im Innern[1]) *von* T *ist dann der Kettenbruch eine bis auf etwaige Pole reguläre analytische, aber nicht rationale Funktion, die in der Umgebung des Nullpunktes auch gleich der korrespondierenden Reihe ist. In den Polen ist der Kettenbruch unwesentlich divergent (van Vleck* **4**, *Pringsheim* **5**).

Beweis. Nach Satz 43, Kap. VII gibt es eine Zahl n, für welche der Kettenbruch (1) im Bereich T gleichmäßig konvergiert. Nach Satz 20 ist er also eine im Innern von T reguläre analytische Funktion, und außerdem in der Umgebung des Nullpunktes gleich seiner korrespondierenden Reihe $\mathfrak{P}_n(x)$. Wir wollen deshalb diese Funktion im Innern von T überall mit $\mathfrak{P}_n(x)$ bezeichnen. Dann ist von hier an der weitere Beweis wörtlich der gleiche wie bei Satz 23, wobei nur an Stelle des dortigen Bereiches $|x| < \frac{1}{4g}$, hier das Innere von T zu treten hat.

II. Wir wenden diese Sätze nun auf die Korrespondenzformeln des § 59 an. In der dortigen Formel (14) haben die Koeffizienten a_ν den Grenzwert $-\frac{1}{4}$. Daher ist bei Anwendung des Satz 25 der Schnitt vom Punkt $+1$ nach $+\infty$ zu führen. Indem man zum reziproken Wert übergeht, ergibt sich also für alle x, die nicht dem Schnitte angehören, die Formel:

$$(3)\begin{cases} \dfrac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)}{F(\alpha,\beta,\gamma;x)} = \dfrac{1|}{|1} + \dfrac{a_1 x|}{|1} + \dfrac{a_2 x|}{|1} + \cdots \quad (\text{vgl. § 59, Formel (11)}), \\ a_{2\nu} = -\dfrac{(\beta+\nu)(\gamma-\alpha+\nu)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \quad a_{2\nu+1} = -\dfrac{(\alpha+\nu)(\gamma-\beta+\nu)}{(\gamma+2\nu)(\gamma+2\nu+1)}, \end{cases}$$

wobei unter dem Quotienten links außerhalb des Konvergenzkreises diejenige analytische Fortsetzung zu verstehen ist, die man ohne Überschreitung des Schnittes erhält; in den Polen findet unwesentliche Divergenz statt (*Thomé* **2**, *van Vleck* **3**, *Pringsheim* **5**). Daraus ergibt sich also insbesondere, daß der Quotient $\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;x)}{F(\alpha,\beta,\gamma;x)}$ sich in der zerschnittenen Ebene wirklich eindeutig analytisch fortsetzen läßt und bis auf Pole regulär ist. Für Zähler und Nenner allein dagegen läßt sich nichts schließen; doch ist ja aus der Theorie der hypergeometrischen Reihe bekannt, daß sie daselbst überall regulär sind.

1) Übrigens auch auf der Grenze, weil sich ja stets ein ebensolcher Bereich angeben läßt, der T ganz im Innern enthält.

Die Formel (3) gilt übrigens auch, wenn einmal $a_{n+1} = 0$ wird; nur muß man dann den Kettenbruch mit dem Glied $\frac{a_n x|}{|1}$ abbrechen, wie bereits Seite 312 oben bemerkt wurde. In diesem Fall ist der Kettenbruch eine rationale Funktion und in den Polen ist er sinnlos.

Ebenso folgt aus § 59, Formel (15):

$$(4)\begin{cases} F(\alpha,1,\gamma;x) = \frac{1|}{|1} + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots \text{ (vgl. § 59, Formel (11))}, \\ a_1 = -\frac{\alpha}{\gamma},\quad a_{2\nu} = -\frac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-2)(\gamma+2\nu-1)},\quad a_{2\nu+1} = -\frac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \end{cases}$$

wobei der Schnitt wieder von $+1$ nach $+\infty$ geht (*Thomé* **1**), und aus § 62, Formel (7):

$$(4a)\begin{cases} F(\alpha,1,\gamma;x) = 1 + \frac{e_1 x|}{|1} + \frac{e_2 x|}{|1} + \frac{e_3 x|}{|1} + \cdots \quad \text{(vgl. § 59, Formel (11))}, \\ e_1 = \frac{\alpha}{\gamma},\quad e_{2\nu} = -\frac{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-2)(\gamma+2\nu-1)},\quad e_{2\nu+1} = -\frac{\nu(\gamma-\alpha+\nu-1)}{(\gamma+2\nu-1)(\gamma+2\nu)}, \end{cases}$$

wo der Schnitt ebenfalls von $+1$ nach $+\infty$ geht.

In den Formeln (3) und (4) sind eine Reihe bemerkenswerter Spezialformeln enthalten, die wir noch angeben wollen.

A. Es ist für $|x| < 1$

$$(1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1}x + \frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots = F(-\mu, 1, 1; -x);$$

daher folgt aus (4), wenn $1, -\mu, -x$ an Stelle von γ, α, x tritt:

$$(1+x)^\mu = \frac{1|}{|1} - \frac{\mu x|}{|1} + \frac{\frac{1(1+\mu)}{1\cdot 2}x\Big|}{|1} + \frac{\frac{1(1-\mu)}{2\cdot 3}x\Big|}{|1} + \frac{\frac{2(2+\mu)}{3\cdot 4}x\Big|}{|1} + \frac{\frac{2(2-\mu)}{4\cdot 5}x\Big|}{|1} + \cdots,$$

oder, indem man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt:

$$(5)\quad (1+x)^\mu = \frac{1|}{|1} - \frac{\mu x|}{|1} + \frac{1(1+\mu)x|}{|2} + \frac{1(1-\mu)x|}{|3} + \frac{2(2+\mu)x|}{|4} + \frac{2(2-\mu)x|}{|5} + \cdots.$$

Schreibt man hier $-\mu$ an Stelle von μ und nimmt den reziproken Wert, so kommt noch (was auch direkt aus (4a) folgt):

$$(6)\quad (1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu x|}{|1} + \frac{1(1-\mu)x|}{|2} + \frac{1(1+\mu)x|}{|3} + \frac{2(2-\mu)x|}{|4} + \frac{2(2+\mu)x|}{|5} + \cdots.$$

Der Schnitt geht bei den Formeln (5) und (6) von -1 nach $-\infty$.

B. Es ist für $|x| < 1$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \cdots = xF(1,1,2;-x);$$

daher folgt aus (4), wenn man α, γ, x durch $1, 2, -x$ ersetzt (und auch gleich wieder einen äquivalenten Kettenbruch nimmt):

$$(7)\quad \log(1+x) = \frac{x|}{|1} + \frac{1^2x|}{|2} + \frac{1^2x|}{|3} + \frac{2^2x|}{|4} + \frac{2^2x|}{|5} + \frac{3^2x|}{|6} + \frac{3^2x|}{|7} + \cdots;$$

auch hier geht der Schnitt von -1 nach $-\infty$.

C. Etwas allgemeiner ist für $|x| < 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^n} = x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + - \cdots = xF\left(\frac{1}{n}, 1, 1+\frac{1}{n}; -x^n\right).$$

Setzt man in (4) also $\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, -x^n$ an Stelle von α, γ, x, so kommt:

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^n} = \frac{x|}{|1} + \frac{1^2x^n|}{|n+1} + \frac{n^2x^n|}{|2n+1} + \frac{(n+1)^2x^n|}{|3n+1} + \frac{(2n)^2x^n|}{|4n+1} \\ \displaystyle\qquad + \frac{(2n+1)^2x^n|}{|5n+1} + \frac{(3n)^2x^n|}{|6n+1} + \frac{(3n+1)^2x^n|}{|7n+1} + \cdots. \end{cases}$$

Hier sind aber, weil x durch $-x^n$ ersetzt wurde, n Schnitte von ϑ_k nach $\vartheta_k\infty$ zu führen, wo $\vartheta_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; der Integrationsweg darf diese Schnitte nicht überschreiten.

D. Für $|x| < 1$ ist

$$(1+x)^\mu + (1-x)^\mu = 2\left[1 + \binom{\mu}{2}x^2 + \binom{\mu}{4}x^4 + \cdots\right] = 2F\left(\frac{1-\mu}{2}, \frac{-\mu}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right),$$

$$(1+x)^\mu - (1-x)^\mu = 2\left[\binom{\mu}{1}x + \binom{\mu}{3}x^3 + \cdots\right] = 2\mu x F\left(\frac{1-\mu}{2}, \frac{2-\mu}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right);$$

daher folgt aus Formel (3), wenn man α, β, γ, x durch $\frac{1-\mu}{2}, \frac{-\mu}{2}, \frac{1}{2}, x^2$ ersetzt:

$$(9)\quad \frac{(1+x)^\mu - (1-x)^\mu}{(1+x)^\mu + (1-x)^\mu} = \frac{\mu x|}{|1} + \frac{(\mu^2-1)x^2|}{|3} + \frac{(\mu^2-4)x^2|}{|5} + \frac{(\mu^2-9)x^2|}{|7} + \cdots,$$

wobei Schnitte von $+1$ nach $+\infty$ und von -1 nach $-\infty$ zu führen sind. Setzt man $x = \frac{1}{z}$ und nimmt den reziproken Wert, so kommt

$$\mu\frac{(z+1)^\mu + (z-1)^\mu}{(z+1)^\mu - (z-1)^\mu} = z + \frac{\mu^2-1|}{|3z} + \frac{\mu^2-4|}{|5z} + \frac{\mu^2-9|}{|7z} + \frac{\mu^2-16|}{|9z} + \cdots.$$

Subtrahiert man hiervon μ und geht dann abermals zum reziproken Wert über, so erhält man den Kettenbruch von *Laguerre* **5**:

$$(10)\quad \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu} = 1 + \frac{2\mu\,|}{|z-\mu} + \frac{\mu^2-1\,|}{|\;3z} + \frac{\mu^2-4\,|}{|\;5z} + \frac{\mu^2-9\,|}{|\;7z} + \frac{\mu^2-16\,|}{|\;9z} + \cdots,$$

wo nun ein Schnitt von -1 nach $+1$ zu führen ist.

Dabei ist für $|z|>1$:

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu} = e^{\mu \log \frac{z+1}{z-1}} = e^{2\mu\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{5z^5}+\cdots\right)},$$

also, wenn iz, $i\mu$ an Stelle von z, μ tritt $(i=\sqrt{-1})$:

$$\left(\frac{iz+1}{iz-1}\right)^{i\mu} = e^{2\mu\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3z^3}+\frac{1}{5z^5}-\frac{1}{7z^7}+\cdots\right)} = e^{2\mu \operatorname{arctang} \frac{1}{z}},$$

so daß aus (10) folgt:

$$(11)\quad e^{2\mu \operatorname{arctang}\frac{1}{z}} = 1 + \frac{2\mu\,|}{|z-\mu} + \frac{\mu^2+1\,|}{|\;3z} + \frac{\mu^2+4\,|}{|\;5z} + \frac{\mu^2+9\,|}{|\;7z} + \frac{\mu^2+16\,|}{|\;9z} + \cdots,$$

wobei ein Schnitt vom Punkt $-i$ nach $+i$ zu führen ist. Für $\mu=\frac{1}{2}$ stammt diese Formel ebenfalls von *Laguerre* **1**.

Durch die Substitution $x = i \operatorname{tang} \varphi$ $(i=\sqrt{-1})$ wird die von $+1$ bis $+\infty$ und von -1 bis $-\infty$ aufgeschnittene x-Ebene abgebildet auf einen Streifen S der φ-Ebene, der begrenzt ist von zwei Parallelen zur imaginären Achse durch die Punkte $\pm\frac{\pi}{2}$. Außerdem ist für reelle φ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{(1+i\operatorname{tang}\varphi)^{\mu}-(1-i\operatorname{tang}\varphi)^{\mu}}{(1+i\operatorname{tang}\varphi)^{\mu}+(1-i\operatorname{tang}\varphi)^{\mu}} = \frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\mu}-(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\mu}}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\mu}+(\cos\varphi-i\sin\varphi)^{\mu}}$$

$$= \frac{2i\sin\mu\varphi}{2\cos\mu\varphi} = i\operatorname{tang}\mu\varphi;$$

also nach (9), wenn man $x=i\operatorname{tang}\varphi$ einsetzt, zunächst für $-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}$:

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}\mu\varphi = \frac{\mu\operatorname{tang}\varphi\,|}{|\;1} &- \frac{(\mu^2-1)\operatorname{tang}^2\varphi\,|}{|\;3} - \frac{(\mu^2-4)\operatorname{tang}^2\varphi\,|}{|\;5} \\ &- \frac{(\mu^2-9)\operatorname{tang}^2\varphi\,|}{|\;7} - \frac{(\mu^2-16)\operatorname{tang}^2\varphi\,|}{|\;9} - \cdots. \end{aligned}\right.$$

Diese Formel muß aber im Innern des Streifens S überall gültig sein; denn ihre beiden Seiten sind daselbst bis auf Pole regulär und stimmen für $-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ mit einander überein.

Ist μ eine positive ganze Zahl n, so verschwindet ein Teilzähler von (12); der Kettenbruch ist also durch einen endlichen zu ersetzen, und es kommt:

$$(13)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} n\varphi = \frac{n \operatorname{tang}\varphi|}{|1} - \frac{(n^2-1)\operatorname{tang}^2\varphi|}{|3} - \frac{(n^2-4)\operatorname{tang}^2\varphi|}{|5} - \cdots \\ \qquad - \frac{(n^2-(n-1)^2)\operatorname{tang}^2\varphi|}{|2n-1}, \end{cases}$$

wobei in den Polen von $\operatorname{tang} n\varphi$ der Kettenbruch sinnlos ist.

E. Es ist für $|x|<1$:

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) = 2xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; x^2\right).$$

Daher aus (4), wenn α, γ, x durch $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2$ ersetzt wird:

$$(14)\qquad \log\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x|}{|1} - \frac{1x^2|}{|3} - \frac{4x^2|}{|5} - \frac{9x^2|}{|7} - \frac{16x^2|}{|9} - \cdots,$$

wobei wieder Schnitte von $+1$ nach $+\infty$ und von -1 nach $-\infty$ zu führen sind. Setzt man $x = \frac{1}{z}$, so kommt noch

$$(15)\qquad \log\frac{z+1}{z-1} = \frac{2|}{|z} - \frac{1|}{|3z} - \frac{4|}{|5z} - \frac{9|}{|7z} - \frac{16|}{|9z} - \cdots$$

(Schnitt von -1 nach $+1$).

Dieser Kettenbruch ist bemerkenswert, wenn wir ihn in der äquivalenten Form schreiben:

$$(16)\qquad \log\frac{z+1}{z-1} = \frac{2|}{|z} - \frac{\frac{1}{2}|}{\left|\frac{3}{2}z\right.} - \frac{\frac{2}{3}|}{\left|\frac{5}{3}z\right.} - \frac{\frac{3}{4}|}{\left|\frac{7}{4}z\right.} - \frac{\frac{4}{5}|}{\left|\frac{9}{5}z\right.} - \cdots;$$

dann ergeben sich nämlich seine Näherungsnenner aus

$$B_0 = 1, \quad B_1 = z, \quad B_\nu = \frac{2\nu-1}{\nu} B_{\nu-1} - \frac{\nu-1}{\nu} B_{\nu-2};$$

sie sind also, wie *Jacobi* 1 gelegentlich bemerkt und später *Rouché* 1 neu bewiesen hat, die bekannten Legendreschen Polynome (Kugelfunktionen), da letztere ja gerade durch diese Formeln definiert werden. Ersetzt man in (14) x durch ix, so erhält man

$$(17)\qquad \operatorname{arc\,tang} x = \frac{x|}{|1} + \frac{1x^2|}{|3} + \frac{4x^2|}{|5} + \frac{9x^2|}{|7} + \frac{16x^2|}{|9} + \cdots,$$

wobei Schnitte von i nach $i\infty$ und von $-i$ nach $-i\infty$ führen. Das gleiche folgt aus (8) für $n=2$.

F. Für $|x| < 1$ ist

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^6}{6} - \cdots = F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2\right),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots = xF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x^2\right).$$

Daher folgt aus (3), wenn α, β, γ, x durch $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; x^2$ ersetzt wird:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{x|}{|1} - \dfrac{1\cdot 2x^2|}{|3} - \dfrac{1\cdot 2x^2|}{|5} - \dfrac{3\cdot 4x^2|}{|7} - \dfrac{3\cdot 4x^2|}{|9} \\ \qquad - \dfrac{5\cdot 6x^2|}{|11} - \dfrac{5\cdot 6x^2|}{|13} - \cdots, \end{cases}$$

wobei wieder Schnitte von $+1$ nach $+\infty$ und von -1 nach $-\infty$ zu führen sind.

Obwohl alle diese Formeln zum sicheren Besitz der Wissenschaft erst gehören, seitdem Thomé die Richtigkeit der allgemeinen Formeln (3) und (4) bewiesen hat, kommen sie doch zum Teil viel früher, auch schon vor Gauß (der nur die Korrespondenz bewiesen hat) in der Literatur vor. So finden sich die Formeln (7), (17) bei *Lambert* **1a**, (6), (7), (8), (17) bei *Lagrange* **6**, (9), (12), (14), (17) bei *Euler* **14**. Lambert glaubte bereits konstatieren zu können (allerdings nur auf Grund numerischer Rechnung), daß der Konvergenzbereich des Kettenbruches (7) über den der betreffenden Reihe hinausreicht, so daß der Kettenbruch zur numerischen Berechnung von $\log(1+x)$ auch für $x > 1$ brauchbar ist. In der Tat kommt auch allen diesen Formeln neben der theoretischen eine praktische Bedeutung zu wegen des großen Konvergenzbereiches; bei vielen Formeln, insbesondere wo die Elemente positiv sind, ist die Konvergenz für nicht allzu große x eine verhältnismäßig rasche, so daß sie sich gut zur numerischen Rechnung eignen.

III. In den Formeln (16) bis (21) des § 59, ebenso in (8) und (9) des § 62 konvergieren die Teilzähler gegen Null (bei der letztgenannten für $|q| < 1$). Die betreffenden Kettenbrüche sind daher nach Satz 24 meromorphe Funktionen, die in der Umgebung des Nullpunktes mit ihrer korrespondierenden Reihe übereinstimmen. Da das gleiche aber auch von den linken Seiten jener Formeln gilt, so kann man dort die Korrespondenzzeichen ohne weiteres durch Gleichheitszeichen ersetzen, wobei nur in den Polen wieder unwesentliche Divergenz stattfindet. Insbesondere liefert die Formel (8) des § 62, wenn man zur Vermeidung der Brüche den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, die für alle x gültige Formel:

$$(19)\quad \begin{cases} \Phi(1,\gamma;x) = 1 + \dfrac{x|}{|\gamma} - \dfrac{\gamma x|}{|\gamma+1} + \dfrac{1x|}{|\gamma+2} - \dfrac{(\gamma+1)x|}{|\gamma+3} \\ + \dfrac{2x|}{|\gamma+4} - \dfrac{(\gamma+2)x|}{|\gamma+5} + \dfrac{3x|}{|\gamma+6} - \cdots \quad (\text{vgl. § 59, Formel (17)}). \end{cases}$$

Wenn γ speziell eine positive ganze Zahl, so ist

$$\Phi(1,\gamma;x) = 1 + \frac{x}{\gamma} + \frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)} + \cdots = 1 + \frac{e^x - 1 - \frac{x}{1} \cdots - \frac{x^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}}{x^{\gamma-1}}(\gamma-1)!,$$

so daß aus (19) nach Multiplikation mit $\frac{x^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!}$ die Formel von *Padé* **1, 3** hervorgeht:

$$(20)\quad \begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{\gamma-1}}{(\gamma-1)!} + \frac{\frac{x^\gamma}{(\gamma-1)!}\,|}{|\ \gamma} - \frac{\gamma x\,|}{|\gamma+1} + \frac{1x\,|}{|\gamma+2} \\ \qquad - \frac{(\gamma+1)x\,|}{|\ \gamma+3} + \frac{2x\,|}{|\gamma+4} - \frac{(\gamma+2)x\,|}{|\ \gamma+5} + \frac{3x\,|}{|\gamma+6} - \cdots. \end{cases}$$

Für $\gamma = 1$ entsteht hieraus die schon bei *Lagrange* **6** vorkommende Formel:

$$(21)\quad e^x = 1 + \frac{x|}{|1} - \frac{x|}{|2} + \frac{x|}{|3} - \frac{x|}{|2} + \frac{x|}{|5} - \frac{x|}{|2} + \frac{x|}{|7} - \frac{x|}{|2} + \frac{x|}{|9} - \frac{x|}{|2} + \cdots.$$

Ebenso ergibt die Formel (9) des § 62 die für $|q| < 1$ und für alle x gültige Gleichung:

$$(22)\quad \begin{cases} 1 + qx + q^4x^2 + q^9x^3 + \cdots = 1 + \frac{qx|}{|1} - \frac{q^3x|}{|1} + \frac{q^3(1-q^2)x|}{|\ \ 1} - \frac{q^7x|}{|1} \\ \qquad + \frac{q^5(1-q^4)x|}{|\ \ 1} - \frac{q^{11}x|}{|1} + \frac{q^7(1-q^6)x|}{|\ \ 1} - \cdots. \end{cases}$$

Als weiteres Beispiel erwähnen wir die aus (21), § 59 hervorgehende Formel

$$(23)\quad \begin{cases} \gamma\,\frac{\Psi(\gamma;x)}{\Psi(\gamma+1;x)} = \gamma + \frac{x\ |}{|\gamma+1} + \frac{x\ |}{|\gamma+2} + \frac{x\ |}{|\gamma+3} + \cdots \\ \qquad\qquad (\text{vgl. § 59, Formel (22)}), \end{cases}$$

welche mit der Formel (20) des § 57 identisch ist (woselbst Literatur); nur müssen hier die Werte $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$ ausgeschlossen werden, was dort nicht nötig war, da für diese zwar die Funktion Ψ_1, aber nicht die Funktion Ψ einen Sinn hat. Speziell für $\gamma = \frac{1}{2}$ folgen aus (23), wenn man den reziproken Wert nimmt und $4x = \pm z^2$ setzt, die beiden Lambertschen Kettenbrüche (*Lambert* **1 b**):

$$(24)\qquad \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{z|}{|1} + \frac{z^2|}{|\ 3} + \frac{z^2|}{|\ 5} + \frac{z^2|}{|\ 7} + \cdots.$$

$$(25)\qquad \operatorname{tang} z = \frac{z|}{|1} - \frac{z^2|}{|\ 3} - \frac{z^2|}{|\ 5} - \frac{z^2|}{|\ 7} - \cdots,$$

deren erster für $z = \frac{1}{2y}$ übergeht in

$$(26)\qquad \frac{e^{\frac{1}{y}} - 1}{e^{\frac{1}{y}} + 1} = \frac{1\ |}{|\ 2y} + \frac{1\ |}{|\ 6y} + \frac{1\ |}{|\ 10y} + \frac{1\ |}{|\ 14y} + \cdots.$$

Diese Formel, die vor Lambert sich schon bei *Euler* **4** findet, wurde in § 31 bereits für spezielle Werte von y benutzt. Setzt man in (25): $z = \frac{m}{n}$ und in (26): $y = \frac{n}{2m}$, so kommt, wenn man die Kettenbrüche durch äquivalente ersetzt:

$$\text{(27)} \qquad \operatorname{tang} \frac{m}{n} = \frac{m|}{|n} - \frac{m^2|}{|3n} - \frac{m^2|}{|5n} - \frac{m^2|}{|7n} - \cdots,$$

$$\text{(28)} \qquad \frac{e^{\frac{2m}{n}} - 1}{e^{\frac{2m}{n}} + 1} = \frac{m|}{|n} + \frac{m^2|}{|3n} + \frac{m^2|}{|5n} + \frac{m^2|}{|7n} + \cdots,$$

wovon bereits in dem Beispiel auf Seite 253f. Gebrauch gemacht wurde.

In der Formel (29) des § 59 haben die a_ν, wenn der reelle Teil von u nicht Null ist, den Grenzwert Null. In diesem Fall stellt also der Kettenbruch nach Satz 24 wieder eine meromorphe Funktion dar, die in der Umgebung des Nullpunktes auch gleich der korrespondierenden Reihe, also gleich dem Quotienten $\frac{\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x)}{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1; u; x)}$ ist. Dieser Quotient erweist sich daher mit seiner analytischen Fortsetzung als eine meromorphe Funktion von x, und in jener Formel (29) kann das Korrespondenzzeichen wieder durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden (*van Vleck* **3**). Übrigens hat *Pringsheim* **5, 6** bemerkt, was sich aber nicht aus der Theorie der Kettenbrüche ergibt und hier nur beiläufig angeführt sei, daß auch eine einzelne Heinesche Reihe $\varphi(\alpha, \beta, \gamma; u; x)$ sich als meromorphe Funktion von x analytisch fortsetzt.

§ 65. Ein bemerkenswertes Divergenzphänomen.

I. Es soll jetzt an einem Beispiel gezeigt werden, daß nicht umgekehrt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe auf die gleichmäßige Konvergenz des korrespondierenden Kettenbruches in der Umgebung des Nullpunktes geschlossen werden kann. In § 60, Formel (16) fanden wir die Korrespondenz:

$$\mathfrak{P}_0(x) = \sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha} \sim 1 + \frac{2\cos\alpha \cdot x|}{|1} + \frac{\frac{1}{\cos\alpha}x|}{|1}$$

$$+ \frac{\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}x|}{|1} + \frac{\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}x|}{|1} + \frac{\frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}x|}{|1} + \frac{\frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}x|}{|1} + \cdots.$$

Hier sei α reell zwischen 0 und π gelegen, aber kein rationales Vielfaches von π, der Kettenbruch also unendlich und nicht periodisch. Da

$$\mathfrak{P}_0(x)^2 = 1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha = \left(1 + 4x\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 - 4x\sin^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

so hat die Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ einen Konvergenzkreis, dessen Radius gleich der kleinsten der Zahlen $\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ ist. Für den Kettenbruch dagegen werden wir folgendes Verhalten nachweisen:

A) *Auf dem im Konvergenzkreis gelegenen Stück der reellen Achse liegen zwar die Konvergenzstellen überall dicht, und der Kettenbruch ist dort auch gleich der Reihe.*

B) *Daselbst liegen aber auch die Divergenzstellen überall dicht.*

C) *Dagegen gibt es abgeschlossene Bereiche, die aber keinen Punkt der reellen Achse, insbesondere nicht den Nullpunkt im Innern enthalten, in denen der Kettenbruch gleichmäßig konvergiert und gleich der Reihe ist.*

Bezeichnet man mit U_ν generell die Näherungszähler A_ν und -Nenner B_ν ν^{ter} Ordnung des obigen Kettenbruches, so hat man die Formeln:

$$(1)\quad \begin{cases} U_{2\nu-1} = U_{2\nu-2} + \dfrac{\cos\nu\alpha}{\cos(\nu-1)\alpha}\, x\, U_{2\nu-3} & (\nu \geqq 2), \\ U_{2\nu} = U_{2\nu-1} + \dfrac{\cos(\nu-1)\alpha}{\cos\nu\alpha}\, x\, U_{2\nu-2} & (\nu \geqq 1), \\ U_{2\nu+1} = U_{2\nu} + \dfrac{\cos(\nu+1)\alpha}{\cos\nu\alpha}\, x\, U_{2\nu-1} & (\nu \geqq 1). \end{cases}$$

Indem man diese zueinandert addiert, nachdem man die erste mit $-\frac{\cos(\nu-1)\alpha}{\cos\nu\alpha}x$ multipliziert hat, erhält man:

$$(2)\quad U_{2\nu+1} = (1 + 2x\cos\alpha)\, U_{2\nu-1} - x^2 U_{2\nu-3} \qquad (\nu \geqq 2).$$

Sind nun y_1, y_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(3)\quad y^2 = (1 + 2x\cos\alpha)\, y - x^2,$$

also

$$(4)\quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}\left(1 + 2x\cos\alpha + \sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha}\right) \\ y_2 = \frac{1}{2}\left(1 + 2x\cos\alpha - \sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha}\right), \end{cases}$$

so findet man direkt:

$$A_1 = 1 + 2x\cos\alpha = y_1 + y_2,$$

$$A_3 = (1 + 2x\cos\alpha)^2 - 2x^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2 = y_1^2 + y_2^2,$$

$$B_1 = 1 = \frac{y_1 - y_2}{y_1 - y_2},$$

$$B_3 = 1 + 2x\cos\alpha = y_1 + y_2 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{y_1 - y_2}.$$

Hieraus läßt sich schließen, daß für $\nu \geqq 1$ durchweg

$$A_{2\nu-1} = y_1^{\nu} + y_2^{\nu}, \qquad B_{2\nu-1} = \frac{y_1^{\nu} - y_2^{\nu}}{y_1 - y_2} \tag{5}$$

sein muß. Denn dies ist ja für $\nu = 1, 2$ richtig und folgt dann allgemein durch den Schluß von ν auf $\nu + 1$ mit Hilfe der Formel (2), angewandt für $U = A$ und $U = B$. Aus der letzten der Gleichungen (1) für $U = A$ und $U = B$ findet man dann auch $A_{2\nu}$ und $B_{2\nu}$, nämlich:

$$\left\{\begin{aligned} A_{2\nu} &= y_1^{\nu+1} + y_2^{\nu+1} - \frac{\cos(\nu+1)\alpha}{\cos\nu\alpha}\, x\,(y_1^{\nu} + y_2^{\nu}) \\ B_{2\nu} &= \frac{y_1^{\nu+1} - y_2^{\nu+1}}{y_1 - y_2} - \frac{\cos(\nu+1)\alpha}{\cos\nu\alpha}\, x\, \frac{y_1^{\nu} - y_2^{\nu}}{y_1 - y_2}. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Wir bemerken hier, was wir später brauchen werden, daß y_1, y_2, so lange sie bei reellem x reell sind, stets positiv sein müssen, nur für $x = 0$ ist $y_2 = 0$. In der Tat läßt sich ja die Gleichung (3) folgendermaßen schreiben:

$$y = y^2 - 2x\cos\alpha \cdot y + x^2 = (y - x\cos\alpha)^2 + x^2\sin^2\alpha,$$

wodurch die Behauptung evident wird.

Es wird nun weiter auf diejenigen Werte von x ankommen, für welche $|y_1| = |y_2|$ ist. Für diese kann man wegen $y_1 y_2 = x^2$

$$y_1 = x e^{i\varphi}, \quad y_2 = x e^{-i\varphi}$$

setzen, und die Gleichung $|y_1| = |y_2|$ läuft dann darauf hinaus, daß φ reell ist. Dann kommt:

$$1 + 2x\cos\alpha = y_1 + y_2 = 2x\cos\varphi.$$

Die gesuchten x sind also von der Gestalt $x = \frac{1}{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}$; d. h. sie sind reell und liegen auf den geradlinigen Schnitten, welche von

$$\frac{1}{2(1 - \cos\alpha)} = \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{nach} \quad +\infty$$

und von

$$\frac{1}{2(-1 - \cos\alpha)} = -\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} \quad \text{nach} \quad -\infty$$

führen. In jedem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich T, der keinen Punkt dieser Schnitte, wohl aber den Punkt $x = 0$ enthält, ist $\left|\frac{y_2}{y_1}\right|$ eindeutig und stetig und hat daher ein Maximum ϑ, welches kleiner als 1 sein muß. Denn für $x = 0$ ist $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| = 0$; wäre nun $\vartheta \geqq 1$, so

müßte wegen der Stetigkeit irgendwo in T auch $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| = 1$, also $|y_2| = |y_1|$ sein, während doch T keine solche Stellen enthält. Ferner hat auch $|y_1 - y_2|$ in T ein Maximum G.

Aus (5) folgt dann im Bereich T:

$$\left|\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} - (y_1 - y_2)\right| = \left|(y_1 - y_2)\left(\frac{y_1^\nu + y_2^\nu}{y_1^\nu - y_2^\nu} - 1\right)\right|$$

$$= |y_1 - y_2| \frac{2\left|\frac{y_2}{y_1}\right|^\nu}{\left|1 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^\nu\right|} \leqq G \frac{2\vartheta^\nu}{1 - \vartheta^\nu}.$$

Das besagt aber, daß die Näherungsbrüche ungerader Ordnung gleichmäßig in T gegen den Grenzwert

(7) $$y_1 - y_2 = \sqrt{1 + 4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha}$$

konvergieren.

Ganz anders verhalten sich die Näherungsbrüche gerader Ordnung. Wir geben zunächst durch eine leichte Reduktion den Formeln (6) die Gestalt

(8) $$\begin{cases} A_{2\nu} = x\sin\alpha\,(\xi_{\nu,1}\, y_1^\nu + \xi_{\nu,2}\, y_2^\nu) \\ B_{2\nu} = \dfrac{x\sin\alpha}{y_1 - y_2}(\xi_{\nu,1}\, y_1^\nu - \xi_{\nu,2}\, y_2^\nu), \end{cases}$$

wobei

(9) $$\xi_{\nu,i} = \operatorname{tang}\nu\alpha - \frac{x\cos\alpha - y_i}{x\sin\alpha} \qquad (i = 1, 2).$$

Ist nun T_1 ein ganz in T enthaltener abgeschlossener Bereich, in dem aber der imaginäre Teil von $\frac{x\cos\alpha - y_1}{x\sin\alpha}$ absolut größer als eine positive Zahl σ bleibt und auch $|x| > \sigma$ ist[1]), so folgt aus (8):

(10) $$\begin{aligned} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - (y_1 - y_2) &= (y_1 - y_2)\left(\frac{\xi_{\nu,1}\, y_1^\nu + \xi_{\nu,2}\, y_2^\nu}{\xi_{\nu,1}\, y_1^\nu - \xi_{\nu,2}\, y_2^\nu} - 1\right) \\ &= (y_1 - y_2)\frac{2\frac{\xi_{\nu,2}}{\xi_{\nu,1}}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^\nu}{1 - \frac{\xi_{\nu,2}}{\xi_{\nu,1}}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^\nu}. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung der imaginäre Teil von $\xi_{\nu,1}$ absolut größer als σ ist, so wird auch $|\xi_{\nu,1}| > \sigma$; ferner

$$|\xi_{\nu,2} - \xi_{\nu,1}| = \left|\frac{y_2 - y_1}{x\sin\alpha}\right| < \frac{G}{\sigma\sin\alpha}.$$

1) Daß es solche Bereiche wirklich gibt, wird der Leser leicht erkennen.

Daraus ergibt sich

$$\left|\frac{\xi_{\nu,2}}{\xi_{\nu,1}}\right| \leqq 1 + \left|\frac{\xi_{\nu,2} - \xi_{\nu,1}}{\xi_{\nu,1}}\right| < 1 + \frac{G}{\sigma^2 \sin\alpha} = K,$$

wo also K von x und ν nicht abhängt. Aus (10) folgt daher im Bereich T_1, weil daselbst $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| \leqq \vartheta$ und $|y_1 - y_2| \leqq G$ ist:

$$\left|\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} - (y_1 - y_2)\right| < G\,\frac{2K\vartheta^\nu}{1 - K\vartheta^\nu},$$

so daß in T_1 auch die Näherungsbrüche gerader Ordnung gleichmäßig gegen $y_1 - y_2$ konvergieren. Damit ist zunächst unsere Behauptung C) bewiesen.

II. Um jetzt A) und B) zu erledigen, bilden wir die beiden Intervalle

$$(11)\qquad -\frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} < x < 0 \quad\text{und}\quad 0 < x < \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

durch die Transformation

$$(12)\qquad u = \frac{x\cos\alpha - y_1}{x\sin\alpha} = \frac{-1-\sqrt{1+4x\cos\alpha - 4x^2\sin^2\alpha}}{2x\sin\alpha}$$

stetig ab auf die Intervalle

$$(13)\qquad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} < u < \infty \quad\text{und}\quad -\infty < u < -\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

In den Intervallen (11) ist y_1 reell, muß also nach einer oben gemachten Bemerkung positiv sein; der Differentialquotient

$$\frac{du}{dx} = \frac{1+2x\cos\alpha+\sqrt{1+4x\cos\alpha-4x^2\sin^2\alpha}}{2x^2\sin\alpha\cdot\sqrt{1+4x\cos\alpha-4x^2\sin^2\alpha}} = \frac{y_1}{x^2\sin\alpha\cdot\sqrt{1+4x\cos\alpha-4x^2\sin^2\alpha}}$$

ist daher ebenfalls beständig positiv, und folglich die Abbildung umkehrbar eindeutig.

Wir zeigen nun, daß diejenigen u, für welche der Ausdruck

$$(14)\qquad \nu^2\,|\operatorname{tang}\nu\alpha - u|$$

über einer von ν unabhängigen positiven Schranke bleibt, in den Intervallen (13) überall dicht liegen. In der Tat, gäbe es ein von solchen u freies Teilintervall J (die Endpunkte eingerechnet), so wäre für jedes in J gelegene u der Ausdruck (14) bei passend gewähltem ν beliebig klein, also gewiß kleiner als $\frac{l}{4}$, wenn l die Länge des Intervalles J bedeutet; somit:

$$\operatorname{tang} \nu \alpha - \frac{l}{4 \nu^2} < u < \operatorname{tang} \nu \alpha + \frac{l}{4 \nu^2}$$

für geeignete Werte von ν. Bezeichnet daher Δ_ν das Intervall von $\operatorname{tang} \nu \alpha - \frac{l}{4 \nu^2}$ bis $\operatorname{tang} \nu \alpha + \frac{l}{4 \nu^2}$, so wäre jede Zahl des Intervalles J auch im Innern eines der Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ gelegen. Nach einem Theorem von Borel[1]) gäbe es dann eine Zahl m derart, daß jede Zahl von J auch im Innern eines der m Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ liegen würde, so daß die Gesamtlänge dieser Intervalle mindestens gleich l sein müßte. Sie ist aber in Wirklichkeit nur

$$\frac{l}{2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right) < \frac{l}{2} \frac{\pi^2}{6} < l,$$

woraus zu schließen ist, daß das gedachte Intervall J in Wirklichkeit nicht existiert. W. z. b. w.

Den in den Intervallen (13) überall dicht liegenden Zahlen u mit der erörterten Eigenschaft entsprechen durch die Transformation (12) gewisse x, die in den Intervallen (11) überall dicht liegen. Wir wollen zeigen, daß für jedes solche x die Näherungsbrüche gerader Ordnung dem Grenzwert $y_1 - y_2$ zustreben, so daß der Kettenbruch konvergiert, weil ja die Näherungsbrüche ungerader Ordnung ebenfalls diesen Grenzwert haben. In der Tat, aus (8) ergibt sich

$$\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = (y_1 - y_2) \frac{1 + \frac{\xi_{\nu,2}}{\nu^2 \xi_{\nu,1}} \nu^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^\nu}{1 - \frac{\xi_{\nu,2}}{\nu^2 \xi_{\nu,1}} \nu^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^\nu}. \tag{15}$$

Da aber in den Intervallen (11) wieder $|y_2| < |y_1|$ ist (diese Intervalle haben ja mit den auf Seite 356 erwähnten geradlinigen Schnitten keinen Punkt gemein), so wird

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^\nu = 0.$$

Aus (15) kann daher $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = y_1 - y_2$ geschlossen werden, sobald gezeigt ist, daß $\left|\frac{\xi_{\nu,2}}{\nu^2 \xi_{\nu,1}}\right|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke bleibt.

---

1) Dieses Borelsche Theorem lautet: „Wenn eine unendliche Menge von Intervallen Δ die Eigenschaft hat, daß jede Zahl eines gegebenen Intervalles J, die Enden eingeschlossen, im Innern von mindestens einem unter ihnen liegt, so kann man aus den Intervallen Δ eine endliche Anzahl herausgreifen, welchen ebenfalls diese Eigenschaft zukommt." — Der Leser findet einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes bei H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904, Seite 105.

Nun ist definitionsgemäß

$$\left|\frac{\xi_{\nu,2}}{\nu^2\xi_{\nu,1}}\right| = \left|\frac{\operatorname{tang}\nu\alpha - \dfrac{x\cos\alpha - y_2}{x\sin\alpha}}{\nu^2(\operatorname{tang}\nu\alpha - u)}\right| = \left|\frac{1}{\nu^2} + \frac{u - \dfrac{x\cos\alpha - y_2}{x\sin\alpha}}{\nu^2(\operatorname{tang}\nu\alpha - u)}\right|,$$

und dies bleibt in der Tat unter einer Schranke, weil ja $\nu^2\,|\operatorname{tang}\nu\alpha - u|$ nach Voraussetzung nicht beliebig klein werden kann. Damit ist auch unsere Behauptung A) bewiesen.

Nunmehr zeigen wir, daß auch diejenigen u, welche der Ungleichung

$$(16)\qquad |\operatorname{tang}\nu\alpha - u| < \frac{1}{\nu!} \quad \text{für unendlich viele } \nu$$

genügen, in den Intervallen (13) überall dicht liegen. Dazu ist nur nötig, nachzuweisen, daß in jedem beliebigen Teilintervall J eine Zahl u mit dieser Eigenschaft vorhanden ist. Zu dem Zweck sei allgemein S_ν das Intervall von $\operatorname{tang}\nu\alpha - \frac{1}{\nu!}$ bis $\operatorname{tang}\nu\alpha + \frac{1}{\nu!}$. Da α kein rationales Vielfaches von π, so kommt $\operatorname{tang}\nu\alpha$ jedem reellen Wert beliebig nahe. Man kann daher ein Intervall S_{ν_1} angeben, welches im Innern von J liegt, sodann ein S_{ν_2}, welches im Innern von S_{ν_1} liegt, usw. Dann existiert aber der Grenzwert

$$\lim_{s=\infty} \operatorname{tang}\nu_s\alpha = u_1,$$

und u_1 liegt im Innern von J und von jedem S_{ν_s}; also ist

$$|\operatorname{tang}\nu_s\alpha - u_1| < \frac{1}{\nu_s!};$$

das heißt, die Zahl $u = u_1$ leistet das in (16) Verlangte.

Den in den Intervallen (13) überall dicht liegenden Zahlen u mit der Eigenschaft (16) entsprechen durch die Transformation (12) wieder gewisse x, die in den Intervallen (11) überall dicht liegen. Wir wollen zeigen, daß für jedes solche x der Kettenbruch divergiert. Nun ergibt sich aus (8):

$$(17)\qquad \frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}} = (y_1 - y_2)\,\frac{\dfrac{\nu!\,\xi_{\nu,1}}{\xi_{\nu,2}}\,\dfrac{1}{\nu!}\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^\nu + 1}{\dfrac{\nu!\,\xi_{\nu,1}}{\xi_{\nu,2}}\,\dfrac{1}{\nu!}\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)^\nu - 1}.$$

Es ist aber $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^\nu = 0$. Wenn wir daher noch zeigen können, daß der Ausdruck $\left|\frac{\nu!\,\xi_{\nu,1}}{\xi_{\nu,2}}\right|$ für eine unbegrenzte Serie von ν-Werten unter

einer Schranke bleibt, so folgt, daß $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ dem Wert $y_2 - y_1$ beliebig nahe kommt, daß also der Kettenbruch divergiert, weil ja

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}} = y_1 - y_2 + y_2 - y_1$$

war. Nun ist

$$\left|\frac{\nu!\,\xi_{\nu,1}}{\xi_{\nu,2}}\right| = \frac{\nu!\,|\operatorname{tang}\nu\alpha - u|}{\left|\operatorname{tang}\nu\alpha - \frac{x\cos\alpha - y_2}{x\sin\alpha}\right|}; \tag{18}$$

der Zähler dieses Bruches wird nach Voraussetzung für unendlich viele ν-Werte kleiner als 1. Für solche ν liegt aber der Nenner beliebig nahe bei

$$\left|u - \frac{x\cos\alpha - y_2}{x\sin\alpha}\right| = \left|\frac{x\cos\alpha - y_1}{x\sin\alpha} - \frac{x\cos\alpha - y_2}{x\sin\alpha}\right| = \left|\frac{y_2 - y_1}{x\sin\alpha}\right|,$$

ist also größer als $\frac{1}{2}\left|\frac{y_2 - y_1}{x\sin\alpha}\right|$, so daß der Bruch (18) gewiß unendlich oft kleiner als $2\left|\frac{x\sin\alpha}{y_2 - y_1}\right|$ ausfällt. Womit auch die Behauptung B) bewiesen ist.

Bei dieser Gelegenheit sei auch auf das von *S. Dumas* [1] untersuchte merkwürdige Verhalten gewisser Kettenbrüche der Form

$$1 + \frac{k_1|}{|z + l_1} + \frac{k_2|}{|z + l_2} + \frac{k_3|}{|z + l_3} + \cdots$$

hingewiesen. Bemerken wir zunächst, daß dieser Kettenbruch durch die Substitution $z = \frac{1}{x}$ äquivalent wird mit

$$1 + \frac{k_1 x|}{|1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2|}{|1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2|}{|1 + l_3 x} + \cdots,$$

also mit den in diesem Kapitel behandelten in engster Beziehung steht (siehe § 61). Dumas gewinnt nun aus der Theorie der elliptischen Funktionen solche Kettenbrüche, bei denen sowohl die Konvergenz- als die Divergenzstellen in der ganzen z-Ebene überall dicht liegen. Wir müssen uns aber hier mit diesem Hinweis begnügen.

Neuntes Kapitel.

Die Kettenbrüche von Stieltjes.

§ 66. Der Integralbegriff von Stieltjes.

I. Sei $\psi(x)$ eine im Intervall (a, b) wachsende Funktion von x; d. h. für $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ sei $\psi(x_1) \leqq \psi(x_2)$; es ist also streckenweises Konstantbleiben nicht ausgeschlossen. Bekanntlich existieren die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\varepsilon=0} \psi(x+\varepsilon) = \psi(x+0) \quad \text{für } a \leqq x < b \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \psi(x-\varepsilon) = \psi(x-0) \quad \text{für } a < x \leqq b \qquad (\varepsilon > 0),$$

und es ist $\psi(x-0) \leqq \psi(x) \leqq \psi(x+0)$. An einer Unstetigkeitsstelle x ist die Differenz $\psi(x+0) - \psi(x-0)$ positiv und heißt die Größe des Sprunges; an einer Stetigkeitsstelle x verschwindet diese Differenz. Für $x = a$ bzw. $x = b$ ist $\psi(a+0) - \psi(a)$ bzw. $\psi(b) - \psi(b-0)$ die Größe des Sprunges. Es können sehr wohl unendlich viele, sogar im ganzen Intervall dicht liegende, Unstetigkeiten vorkommen; jedoch sind sie dann nur in abzählbarer Menge vorhanden, so daß die Stetigkeitsstellen überall dicht liegen. Denn ein Sprung größer als eine vorgegebene positive Zahl σ kann, da $\psi(x) \leqq \psi(b)$ beiben muß, nur eine endliche Anzahl von Malen auftreten. Aus dem gleichen Grund ist die Funktion $\psi(x)$ auch im Riemannschen Sinne von a bis b integrierbar.

Eine Stelle ξ zwischen a und b heißt Konstanzstelle, wenn für hinreichend kleine positive ε stets $\psi(\xi-\varepsilon) = \psi(\xi+\varepsilon)$ ist; andernfalls heißt ξ eine Wachstumsstelle. Für $\xi = a$ und $\xi = b$ modifiziert sich diese Definition in leicht ersichtlicher Weise. Hat $\psi(x)$ nur eine endliche Anzahl von Wachstumsstellen, so sind diese zugleich Unstetigkeiten, und $\psi(x)$ ist abteilungsweise konstant. In der Tat, wenn c und $d(>c)$ zwei Wachstumsstellen sind, zwischen denen keine andere mehr liegt, so läßt sich zeigen, daß $\psi(x)$ für $c < x < d$ konstant ist.

Denn da in diesem Fall $\frac{c+d}{2}$ eine Konstanzstelle, so ist für hinreichend kleine ε

$$\psi\left(\frac{c+d}{2}-\varepsilon\right)=\psi\left(\frac{c+d}{2}\right)=\psi\left(\frac{c+d}{2}+\varepsilon\right).$$

Sei nun γ die untere Grenze derjenigen Zahlen x, für welche

$$\psi(x)=\psi\left(\frac{c+d}{2}\right)$$

ist. Offenbar muß $c \leqq \gamma < \frac{c+d}{2}$ sein; wäre aber $\gamma > c$, so hätte man nach der Definition von γ für beliebig kleine ε

$$\psi(\gamma-\varepsilon)<\psi\left(\frac{c+d}{2}\right), \quad \psi(\gamma+\varepsilon)=\psi\left(\frac{c+d}{2}\right),$$

so daß γ eine zwischen c und $\frac{c+d}{2}$ liegende Wachstumsstelle wäre, die es aber nach Voraussetzung nicht gibt; es ist daher $\gamma = c$. Ebenso ist die obere Grenze der Zahlen x gleich d, und man hat somit für alle x zwischen c und d:

$$\psi(x)=\psi\left(\frac{c+d}{2}\right)=\text{constant.} \quad \text{W. z. b. w.}$$

Nach diesen Vorbemerkungen kommen wir jetzt zu

Lemma 1 und Definition 1. *Ist $\psi(x)$ eine im Intervall (a, b) wachsende Funktion, $f(x)$ eine ebenda stetige Funktion, die auch komplexe Werte haben darf, so unterscheidet sich die Summe*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(\psi(x_{\nu+1})-\psi(x_\nu)),$$

wobei

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_\nu \leqq \xi_\nu \leqq x_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ist, beliebig wenig von einem ganz bestimmten Grenzwert, sofern nur die Intervalle $(x_\nu, x_{\nu+1})$ genügend klein sind. Dieser Grenzwert heißt ein „Stieltjessches Integral" und wird bezeichnet durch

$$\int_a^b f(x)\, d\psi(x).$$

Offenbar genügt es, den Satz für reelle $f(x)$ zu beweisen, da man andernfalls den reellen und imaginären Teil gesondert betrachten kann. Bezeichnet dann M_ν das Maximum, m_ν das Minimum von $f(x)$ im Intervall $(x_\nu, x_{\nu+1})$, so bilden wir die Summen

$$A_T = \sum_{\nu=0}^{n-1} M_\nu(\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)),$$

$$a_T = \sum_{\nu=0}^{n-1} m_\nu(\psi(x_{\nu+1})) - \psi(x_\nu)),$$

wobei der Index T die vorgenommene Intervallteilung mit den Teilpunkten $x_0, x_1, \ldots, x_n$ andeuten soll. Sind T_1, T_2 zwei beliebige Teilungen, ferner T_3 eine Teilung, welche alle Teilpunkte von T_1 und T_2 zugleich enthält, so ist offenbar

$$A_{T_1} \geqq A_{T_3} \geqq a_{T_3} \geqq a_{T_2}.$$

Also $A_{T_1} \geqq a_{T_2}$, und folglich, wenn $\underline{A}$ die untere Grenze aller A_T, $\bar{a}$ die obere Grenze aller a_T bezeichnet, auch $\underline{A} \geqq \bar{a}$; daher

$$A_T \geqq \underline{A} \geqq \bar{a} \geqq a_T. \tag{1}$$

Anderseits ist, wenn δ die größte Schwankung von $f(x)$ in den Intervallen von T bezeichnet:

$$\left\{\begin{aligned} A_T - a_T &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (M_\nu - m_\nu)(\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)) \\ &\leqq \delta \sum_{\nu=0}^{n-1} (\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)) = \delta(\psi(b) - \psi(a)). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Aber wegen der Stetigkeit von $f(x)$ gibt es bekanntlich zu jedem positiven ε ein positives η derart, daß $\delta < \varepsilon$ wird, falls die Intervalle von T kleiner als η sind. Aus (1) und (2) folgt daher $\underline{A} = \bar{a}$. Ferner ist offenbar

$$A_T \geqq \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)) \geqq a_T,$$

also auch

$$\left| \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu)) - \underline{A} \right| \leqq A_T - a_T \leqq \delta(\psi(b) - \psi(a)).$$

Diese Ungleichung enthält aber, da δ mit den Intervallen von T beliebig klein wird, den zu beweisenden Satz; der Grenzwert $\underline{A}$ ist eben das Stieltjessche Integral.

Beispiel. Hat $\psi(x)$ nur n Wachstumsstellen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und macht daselbst Sprünge von der Größe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, so ist

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \sigma_1 f(a_1) + \sigma_2 f(a_2) + \cdots + \sigma_n f(a_n).$$

Lemma 2 und Definition 2. *Unter den Voraussetzungen des Lemma 1 unterscheidet sich auch die Summe*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \psi(\xi_\nu)(f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu))$$

beliebig wenig von einem bestimmten Grenzwert, der analog mit

$$\int_a^b \psi(x)\,df(x)$$

bezeichnet wird. Es gilt dann die Formel der partiellen Integration:

$$\int_a^b \psi(x)\,df(x) = \psi(b)f(b) - \psi(a)f(a) - \int_a^b f(x)\,d\psi(x).$$

In der Tat ist identisch

$$(3)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} \psi(\xi_\nu)(f(x_{\nu+1}) - f(x_\nu)) = \psi(b)f(b) - \psi(a)f(a) \\ \qquad\qquad - \sum\limits_{\nu=0}^{n} f(x_\nu)(\psi(\xi_\nu) - \psi(\xi_{\nu-1})), \end{cases}$$

wobei $\xi_{-1} = a$, $\xi_n = b$ gesetzt ist, und wobei die Ungleichungen gelten:

$$a = \xi_{-1} = x_0 \leqq \xi_0 \leqq x_1 \leqq \xi_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq \xi_{n-1} \leqq x_n = \xi_n = b.$$

Mit den Intervallen $(x_\nu, x_{\nu+1})$ werden aber auch die Intervalle $(\xi_\nu, \xi_{\nu+1})$ beliebig klein, so daß die Summe auf der rechten Seite von (3) den Grenzwert $\int_a^b f(x)\,d\psi(x)$ hat. W. z. b. w.

Lemma 3. *Wenn unter den Voraussetzungen des Lemma 1 $\psi(x)$ bzw. $f(x)$ eine im* R i e m a n n*schen Sinn integrierbare Ableitung $\psi'(x)$ bzw. $f'(x)$ hat, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^b f(x)\psi'(x)\,dx,$$

$$\text{bzw. } \int_a^b \psi(x)\,df(x) = \int_a^b \psi(x)f'(x)\,dx,$$

wo die rechtsstehenden Integrale im R i e m a n n*schen Sinn zu verstehen sind.*

Bemerken wir zunächst, daß die rechtsstehenden Integrale sicher existieren, da ja bekanntlich ein Produkt von zwei integrierbaren Funk-

tionen wieder integrierbar ist. Nun hat man, wenn die Ableitung $\psi'(x)$ existiert, nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu) = \psi'(\xi_\nu^0)(x_{\nu+1} - x_\nu),$$

wo ξ_ν^0 einen passenden Wert zwischen x_ν und $x_{\nu+1}$ bezeichnet. Andererseits ist nach der Definition des Stieltjesschen Integrals:

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \operatorname{Lim} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(\psi(x_{\nu+1}) - \psi(x_\nu))$$

$$= \operatorname{Lim} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)\psi'(\xi_\nu^0)(x_{\nu+1} - x_\nu),$$

wobei ξ_ν einen beliebigen Wert zwischen $x_{\nu+1}$ und x_ν bedeuten darf. Man kann also insbesondere $\xi_\nu = \xi_\nu^0$ wählen und erhält so:

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \operatorname{Lim} \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu^0)\psi'(\xi_\nu^0)(x_{\nu+1} - x_\nu).$$

Der rechts stehende Grenzwert ist aber gleich $\int_a^b f(x)\psi'(x)\,dx$, da ja dieses Integral existiert. Ebenso beweist man die zweite Formel des Lemma 3.

Für die Stieltjesschen Integrale gelten die folgenden Rechenregeln, die ebenso einfach wie bei Riemannschen Integralen zu beweisen sind, was dem Leser überlassen sei:

(A) $$\int_a^b 1\,d\psi(x) = \int_a^b d\psi(x) = \psi(b) - \psi(a),$$

(B) $$\int_a^c f(x)\,d\psi(x) + \int_c^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^b f(x)\,d\psi(x) \qquad \text{für } a < c < b,$$

(C) $$\int_a^b c f(x)\,d\psi(x) = c\int_a^b f(x)\,d\psi(x) \qquad \text{für } c = \text{Konstante},$$

(D) $$\int_a^b f_1(x)\,d\psi(x) \leqq \int_a^b f_2(x)\,d\psi(x) \qquad \text{für } f_1(x) \leqq f_2(x),$$

(E) $$\left|\int_a^b f(x)\,d\psi(x)\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,d\psi(x),$$

(F) $$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,d\psi(x) = \int_a^b f_1(x)\,d\psi(x) \pm \int_a^b f_2(x)\,d\psi(x),$$

(G) $$\int_a^b \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)\Big)\,d\psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_a^b f_\nu(x)\,d\psi(x),$$

falls die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$ im Intervall (a, b) gleichmäßig konvergiert.

Weiter definieren wir

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^{\infty} f(x)\,d\psi(x),$$

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b \psi(x)\,df(x) = \int_a^{\infty} \psi(x)\,df(x),$$

und analog auch für die untere Grenze $-\infty$. Die Formel der partiellen Integration, sowie die obigen Rechenregeln außer (G) übertragen sich ohne weiteres auf den Fall unendlicher Grenzen.

Beispiel. Hat $\psi(x)$ nur eine abzählbare Menge von Wachstumsstellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und ist

$$a < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots, \quad \lim a_n = \infty,$$

so sind dies, da in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl vorhanden ist, zugleich Unstetigkeitsstellen. Bezeichnet dann σ_ν die Größe des Sprunges an der Stelle a_ν, so ist

$$\int_a^{\infty} f(x)\,d\psi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sigma_\nu f(a_\nu).$$

II. Wir müssen nun eine Reihe von wichtigen Hilfssätzen beweisen

Hilfssatz 1. *Wenn die im Intervall (a, b) wachsenden Funktionen $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ an allen Stellen, wo beide stetig sind, sowie an den Endpunkten a, b sich nur um eine additive Konstante C (die auch Null sein kann) unterscheiden, so ist*

$$\int_a^b f(x)\,d\psi_1(x) = \int_a^b f(x)\,d\psi_2(x).$$

Dies gilt auch für $b = \infty$, $a = -\infty$, falls dann von wenigstens einem der Integrale die Existenz feststeht.

Offenbar genügt es, die Formel für endliche a, b zu beweisen; denn um sie alsdann für unendliche zu bekommen, braucht man nur den beiden Seiten der Gleichung das Zeichen *lim* vorzusetzen. Da nun die Stellen, an denen eine der Funktionen $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ unstetig ist, nur in abzählbarer Menge vorhanden sind, so liegen die Stellen x, an welchen $\psi_1(x) = \psi_2(x) + C$ ist, überall dicht. Man kann daher die Intervalle $(x_\nu, x_{\nu+1})$ beliebig klein wählen und derart, daß $\psi_1(x_\nu) = \psi_2(x_\nu) + C$, also auch

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(\psi_1(x_{\nu+1}) - \psi_1(x_\nu)) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_\nu)(\psi_2(x_{\nu+1}) - \psi_2(x_\nu))$$

wird. Daraus folgt aber die Behauptung nach Definition 1.

Hilfssatz 2. *Hat im Intervall (a, b) die reelle stetige Funktion $f(x)$ keine oder nur eine endliche Anzahl von Nullstellen, aber sonst konstantes Zeichen, und hat daselbst die wachsende Funktion $\psi(x)$ unendlich viele Wachstumsstellen, so ist das Integral $\int_a^b f(x)\,d\psi(x)$ von Null verschieden und hat das Zeichen von $f(x)$. Dies gilt auch, wenn $b = \infty$, $a = -\infty$ ist.*

Das Zeichen von $f(x)$ sei etwa das positive. Ist dann ξ eine im Innern des Intervalls (a, b) gelegene Wachstumsstelle von $\psi(x)$, welche nicht Nullstelle von $f(x)$ ist (solche ξ gibt es nach Voraussetzung), so hat man

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \int_a^{\xi-\varepsilon} + \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} + \int_{\xi+\varepsilon}^b,$$

wo ε eine beliebig kleine positive Zahl sei. Alle drei Integrale rechts sind $\geqq 0$. Das mittlere, also auch die ganze Summe, ist aber für hinreichend kleines ε gewiß von Null verschieden. Denn, da $f(\xi) > 0$ sein soll, so bleibt, wenn ε klein genug ist, $f(x)$ für $\xi - \varepsilon \leqq x \leqq \xi + \varepsilon$ über einer positiven Schranke c; also wird

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} f(x)\,d\psi(x) \geqq \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} c\,d\psi(x) = c(\psi(\xi+\varepsilon) - \psi(\xi-\varepsilon)) > 0,$$

weil ja ξ eine Wachstumsstelle von $\psi(x)$ sein sollte.

Hilfssatz 3. *Wenn $\psi(x)$ eine im Intervall (a, b) wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, $f(x)$ eine daselbst stetige reelle Funktion ist, und wenn die n Gleichungen*

$$\int_a^b f(x)x^k\,d\psi(x) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

bestehen, so gibt es im Innern des Intervalls (a, b) mindestens n verschiedene Werte von x, für die $f(x)$ verschwindet; dies gilt auch, wenn $b = \infty$ $a = -\infty$ ist.

Aus unseren Voraussetzungen folgt nämlich

$$\int_a^b f(x) P(x) d\psi(x) = 0 \tag{4}$$

für ein beliebiges Polynom $P(x)$ von geringerem als dem n^{ten} Grad. Hat nun die Funktion $f(x)$ weniger als n Nullstellen zwischen a und b, so muß sie an mindestens einer ihr Zeichen wechseln, weil sonst nach Hilfssatz 2 $\int_a^b f(x) d\psi(x) \neq 0$ wäre, gegen die Voraussetzung. Seien daher $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ die Stellen, an denen $f(x)$ das Zeichen wechselt, also gewiß Nullstellen von $f(x)$, und somit ihre Anzahl ν kleiner als n. Dann hat die Funktion

$$f(x)(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_\nu)$$

nur eine endliche Anzahl von Nullstellen und sonst konstantes Zeichen. Daraus folgt nach Hilfssatz 2:

$$\int_a^b f(x)(x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_\nu) d\psi(x) \neq 0,$$

im Widerspruch mit (4). Die Annahme von weniger als n Nullstellen ist daher zu verwerfen.

Hilfssatz 4. *Ist $\psi(x)$ eine im Intervall (a, b) wachsende Funktion, so stellt das Integral*

$$F(z) = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z + x}$$

eine für alle z, die nicht dem Intervall $-b \leqq z \leqq -a$ angehören, reguläre analytische Funktion dar. Das gleiche gilt auch für $b = \infty$, $a = -\infty$, falls das Integral $\int d\psi(x)$ sich bis zu diesen Grenzen erstrecken läßt. [1]) *Sind a, b endlich, so ist $F(z)$ auch an der Stelle $z = \infty$ regulär.*

1) Dann ist also der Ausdruck $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z + x}$ für alle z mit positiv imaginärem Teil eine reguläre analytische Funktion; ebenso für alle z mit negativ imaginärem Teil. Die beiden Funktionen brauchen aber nicht analytische Fortsetzung voneinander zu sein.

Seien zunächst a, b endlich. Für $|z| > |a| + |b|$ ist

$$F(z) = \int_a^b \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} - \frac{x^3}{z^4} + - \cdots\right) d\psi(x).$$

Da die Reihe für $a \leqq x \leqq b$ gleichmäßig konvergiert, so folgt

$$F(z) = \frac{1}{z}\int_a^b d\psi(x) - \frac{1}{z^2}\int_a^b x\,d\psi(x) + \frac{1}{z^3}\int_a^b x^2 d\psi(x) - + \cdots,$$

womit bereits die Stelle $z = \infty$ erledigt ist.

Für endliches z steuern wir gleich auf ein allgemeineres Resultat zu, indem wir die Funktion untersuchen:

$$G(z) = \int_a^b \left(\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x}\right) d\psi(x),$$

wo der Integrationsweg von z_0 bis z das Intervall $(-b, -a)$ nicht treffen soll. Es gibt dann eine positive Zahl c derart, daß für alle in Betracht kommenden z und x

$$|z + x| > c$$

ist. Nun folgt für $|h| < c$:

$$\frac{G(z+h) - G(z)}{h} = \int_a^b \frac{\int_{z_0}^{z+h} \frac{dz}{z+x} - \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x}}{h}\, d\psi(x)$$

$$= \int_a^b \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{z+x}\right) d\psi(x)$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{z+x} - \frac{1}{2}\frac{h}{(z+x)^2} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{(z+x)^3} - \cdots\right) d\psi(x).$$

Also

$$\left|\frac{G(z+h) - G(z)}{h} - F(z)\right|$$

$$= \left|\int_a^b \left(-\frac{1}{2}\frac{h}{(z+x)^2} + \frac{1}{3}\frac{h^2}{(z+x)^3} - \frac{1}{4}\frac{h^3}{(z+x)^4} + - \cdots\right) d\psi(x)\right|$$

$$\leqq \int_a^b \left(\frac{|h|}{c^2} + \frac{|h|^2}{c^3} + \frac{|h|^3}{c^4} + \cdots\right) d\psi(x) = \frac{|h|}{c(c - |h|)}\int_a^b d\psi(x).$$

Mithin ist

$$\lim_{h=0} \frac{G(z+h)-G(z)}{h} = F(z).$$

Das besagt aber, daß die Funktion $G(z)$ eine Ableitung $F(z)$ hat. Sie ist daher nach den bekannten Folgerungen aus dem Cauchy-Goursatschen Integralsatz regulär, und ihre Ableitung $F(z)$ ist ebenfalls regulär.

Im Fall unendlicher Integrationsgrenzen bleibt der Beweis wörtlich der gleiche, sobald gezeigt ist, daß die Integrale

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}, \quad G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x} \right) d\psi(x)$$

überhaupt existieren. Da aber in diesem Fall vorausgesetzt ist, daß das Integral $\int_a^\infty d\psi(x)$, d. h. der Grenzwert

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b d\psi(x)$$

existiert, so gibt es zu jedem beliebig kleinen positiven ε eine Zahl G derart, daß für $H > G$

$$\int_G^H d\psi(x) < \varepsilon$$

wird, wie groß auch H sei. Man hat daher auch

$$\left| \int_G^H \frac{d\psi(x)}{z+x} \right| \leq \int_G^H \frac{d\psi(x)}{|z+x|} \leq \int_G^H \frac{d\psi(x)}{c} < \frac{\varepsilon}{c},$$

$$\left| \int_G^H \left(\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x} \right) d\psi(x) \right| \leq \int_G^H \left| \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x} \right| d\psi(x) \leq \int_G^H \frac{|z-z_0|}{c} d\psi(x) < \frac{|z-z_0|}{c} \varepsilon,$$

woraus bekanntlich die Existenz der beiden Grenzwerte

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} = \int_a^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b \left(\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x} \right) d\psi(x) = \int_a^\infty \left(\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z+x} \right) d\psi(x)$$

folgt. Ebenso zeigt man, daß die Integrale bis zur unteren Grenze $-\infty$ ausgedehnt werden können.

Damit ist nun nicht nur der Hilfssatz 4 bewiesen, sondern auch gezeigt, daß $F(z)$ die Ableitung von $G(z)$, also $G(z)$ ein Integral von $F(z)$ ist. Und da $G(z)$ für $z = z_0$ verschwindet, so folgt die Formel:

$$(5)\quad \int_{z_0}^{z}\left(\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}\right)dz = \int_{z_0}^{z} F(z)\,dz = G(z) = \int_a^b\left(\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z+x}\right)d\psi(x),$$

und zwar auch für $b = \infty$, $a = -\infty$, falls das Integral $\int d\psi(x)$ bis zu diesen Grenzen erstreckt werden kann.

Hilfssatz 5. *Wenn die Funktion $F(z)$ für alle z mit negativ imaginärem Teil die Darstellung*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{z+x}$$

zuläßt[1]*), wo $\psi(x)$ eine wachsende Funktion ist, und das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} d\psi(x) = C$ existiert, so läßt sich auch umgekehrt $\psi(x)$ bis zu einem gewissen Grad durch $F(z)$ ausdrücken, nämlich:*

$$\frac{\psi(\xi-0)+\psi(\xi+0)}{2} - \frac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2} = \lim_{\eta=+0}\Re\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\xi-i\eta}^{-a-i\eta} F(z)\,dz\right),$$

wo der Integrationsweg geradlinig ist, und $\Re$ den reellen Teil des betreffenden Ausdrucks bezeichnet.

Läßt $F(z)$ eine solche Darstellung für alle z mit positiv imaginärem Teil zu, so ist in dieser Formel i durch $-i$ zu ersetzen.

Offenbar genügt es, den Beweis für den ersten Fall zu führen, da durch Vertauschung von i mit $-i$ der reelle Teil sich nicht ändert. Auch darf man $\xi > a$ voraussetzen, weil durch Vertauschung von ξ mit a die Formel ungeändert bleibt. Nun erhält man unter Berücksichtigung der Formel (5):

$$\int_{-\xi-i\eta}^{-a-i\eta} F(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\xi-i\eta}^{-a-i\eta}\frac{dz}{z+x}\right)d\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\xi+i\eta}^{a+i\eta}\frac{dz'}{z'-x}\right)d\psi(x) \quad (z = -z').$$

---

1) Der Fall endlicher Integrationsgrenzen $\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$ ist hier mitinbegriffen, indem dann $\psi(x) = \psi(b)$ für $x > b$ und $\psi(x) = \psi(a)$ für $x < a$ ist.

Bekanntlich ist aber

$$\int\limits_{\xi+i\eta}^{a+i\eta} \frac{dz'}{z'-x} = \text{reelle Zahl} + i\omega,$$

wo ω den aus Fig. 2 ersichtlichen Winkel bedeutet; er ist eine stetige

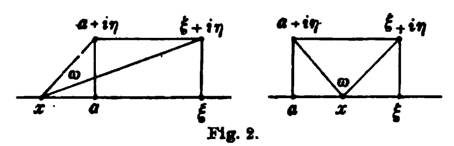


Fig. 2.

Funktion von x und η (>0): $\omega = \omega(x, \eta)$. Setzt man dies ein, so kommt:

$$(6) \qquad \Re\left(\frac{1}{i}\int\limits_{-\xi-i\eta}^{-a-i\eta} F(z)dz\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x,\eta)\,d\psi(x).$$

Um den Grenzwert dieses Integrals für $\eta = +0$ zu berechnen, zerlegen wir es in fünf Bestandteile:

$$(7) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = \int\limits_{-\infty}^{a-\sqrt{\eta}} + \int\limits_{a-\sqrt{\eta}}^{a+\sqrt{\eta}} + \int\limits_{a+\sqrt{\eta}}^{\xi-\sqrt{\eta}} + \int\limits_{\xi-\sqrt{\eta}}^{\xi+\sqrt{\eta}} + \int\limits_{\xi+\sqrt{\eta}}^{\infty}.$$

Im ersten Integral rechts hat $\omega(x, \eta)$ den größten Wert an der obern Grenze; also ist hier

$$\omega(x,\eta) \leqq \omega(a-\sqrt{\eta}, \eta) < \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\sqrt{\eta}} < \sqrt{\eta}.$$

Daher

$$\int\limits_{-\infty}^{a-\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) \leqq \sqrt{\eta}\int\limits_{-\infty}^{a-\sqrt{\eta}} d\psi(x) \leqq \sqrt{\eta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\psi(x) = C\sqrt{\eta},$$

und folglich:

$$(8) \qquad \lim_{\eta=0} \int\limits_{-\infty}^{a-\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = 0.$$

Analog ist auch

$$(9) \qquad \lim_{\eta=0} \int\limits_{\xi+\sqrt{\eta}}^{\infty} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = 0.$$

Im Intervall $a+\sqrt{\eta} \leqq x \leqq \xi - \sqrt{\eta}$ ist $\omega(x, \eta)$ kleiner als π und hat den kleinsten Wert an den Grenzen; also ist hier

$$\pi > \omega(x,\eta) \geqq \pi - \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\sqrt{\eta}} - \operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi-a-\sqrt{\eta}}$$

$$> \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\sqrt{\eta}} > \pi - 2\sqrt{\eta};$$

daher

$$\int_{a+\sqrt{\eta}}^{\xi-\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) \begin{cases} < \pi \int_{a+\sqrt{\eta}}^{\xi-\sqrt{\eta}} d\psi(x) \\ \geqq (\pi - 2\sqrt{\eta}) \int_{a+\sqrt{\eta}}^{\xi-\sqrt{\eta}} d\psi(x). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(10)\quad \lim_{\eta=0} \int_{a+\sqrt{\eta}}^{\xi-\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = \pi \int_{a+0}^{\xi-0} d\psi(x) = \pi(\psi(\xi-0) - \psi(a+0)).$$

Ferner hat man

$$\int_{a-\sqrt{\eta}}^{a+\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = \int_{a-\sqrt{\eta}}^{a-0} + \int_{a-0}^{a+0} + \int_{a+0}^{a+\sqrt{\eta}}.$$

Die beiden äußern Integrale rechts haben offenbar den Grenzwert Null; das mittlere ist gleich

$$\omega(a,\eta)(\psi(a+0) - \psi(a-0)),$$

und da augenscheinlich $\lim\limits_{\eta=0} \omega(a,\eta) = \frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$(11)\qquad \lim_{\eta=0} \int_{a-\sqrt{\eta}}^{a+\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = \frac{\pi}{2}(\psi(a+0) - \psi(a-0)).$$

Analog findet man auch:

$$(12)\qquad \lim_{\eta=0} \int_{\xi-\sqrt{\eta}}^{\xi+\sqrt{\eta}} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = \frac{\pi}{2}(\psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)).$$

Setzt man nun die Werte (8) bis (12) in Gleichung (7) ein, so kommt:

$$\lim_{\eta=0} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x,\eta)\,d\psi(x) = \pi\,\frac{\psi(\xi-0)+\psi(\xi+0)}{2} - \pi\,\frac{\psi(a-0)+\psi(a+0)}{2},$$

also mit Rücksicht auf (6) gerade die zu beweisende Formel des Hilfssatz 5.

Da an allen Stetigkeitsstellen $\frac{\psi(\xi-0)+\psi(\xi+0)}{2} = \psi(\xi)$ ist, so ist nach Hilfssatz 5 die Funktion $\psi(x)$ von einer additiven Konstanten abgesehen durch $F(z)$ an allen Stetigkeitsstellen eindeutig bestimmt. An den eventuellen Unstetigkeitsstellen kann das nach Hilfssatz 1 natürlich nicht der Fall sein.

Die Begriffe und Sätze dieses Paragraphen rühren von *Stieltjes* **4a** her.

§ 67. Der korrespondierende und assoziierte Kettenbruch eines Stieltjesschen Integrals.

I. Sei

$$1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem unendlichen korrespondierenden Kettenbruch

$$1 + \frac{a_1 x|}{|1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \cdots. \tag{2}$$

Läßt man nun in Reihe und Kettenbruch das Anfangsglied 1 weg und setzt $x = \frac{1}{z}$, so geht die Reihe über in

$$\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots, \tag{3}$$

und der Kettenbruch wird äquivalent mit

$$\frac{a_1|}{|z} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|z} + \frac{a_4|}{|1} + \frac{a_5|}{|z} + \frac{a_6|}{|1} + \cdots, \tag{4}$$

also auch mit

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \frac{1|}{|b_5 z} + \frac{1|}{|b_6} + \cdots, \tag{5}$$

wobei nach § 42, II, C

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_{2\nu+1} = \frac{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu+1}}, \quad b_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \cdots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \cdots a_{2\nu}} \tag{6}$$

ist. Wir nennen dann die Reihe (3) und den Kettenbruch (4) oder (5) ebenfalls miteinander korrespondierend, ziehen aber jetzt gewöhnlich die Form (5) vor. Sind $A_\nu(z)$, $B_\nu(z)$ die Näherungszähler und -nenner ν^{ter} Ordnung von (5), so erkennt man leicht (aus den Euler-Mindingschen Formeln (§ 3) oder durch vollständige Induktion), daß $A_{2\nu-1}(z)$, $A_{2\nu}(z)$ Polynome vom $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grad, $B_{2\nu-1}(z)$, $B_{2\nu}(z)$ vom ν^{ten} Grad in z sind, und zwar speziell

$$\begin{cases} B_{2\nu-1}(z) = b_1 b_2 \cdots b_{2\nu-1} z^\nu + \cdots, & B_{2\nu-1}(0) = 0, \\ B_{2\nu}(z) = b_1 b_2 \cdots b_{2\nu} z^\nu + \cdots. \end{cases} \tag{7}$$

Ferner ist die Korrespondenz von (3) und (5) definitionsgemäß dadurch charakterisiert, daß die Entwicklung von $\frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)}$ nach fallenden Potenzen von z bis zur Potenz $z^{-\lambda}$ einschließlich mit der Reihe (3) übereinstimmt. Der Zusammenhang zwischen den c_ν und a_ν ist durch den Satz 5, Kap. VIII festgelegt. Daher kann die Reihe (3) niemals eine rationale Funktion von z darstellen (vgl. S. 307 oben).

Ist weiter

$$1 + \frac{k_1 x}{|1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2}{|1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2}{|1 + l_3 x} + \cdots \tag{8}$$

der mit (1) assoziierte Kettenbruch, so erhält man, wenn man wieder das Anfangsglied 1 wegläßt und $x = \frac{1}{z}$ setzt:

$$\frac{k_1}{|z + l_1} + \frac{k_2}{|z + l_2} + \frac{k_3}{|z + l_3} + \cdots. \tag{9}$$

Wir nennen daher diesen Kettenbruch auch mit der Reihe (3) assoziiert. Der Zusammenhang zwischen den c_ν und den k_ν, l_ν ist durch Satz 11, Kap. VIII festgelegt. Sind $K_\nu(z)$, $L_\nu(z)$ die Näherungszähler und -nenner ν^{ter} Ordnung von (9), so sieht man leicht, daß $K_\nu(z)$ ein Polynom vom $(\nu - 1)^{\text{ten}}$, $L_\nu(z)$ vom ν^{ten} Grad ist, und zwar speziell

$$L_\nu(z) = z^\nu + \cdots. \tag{10}$$

Entwickelt man ferner $\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)}$ nach fallenden Potenzen von z, so stimmt die entstehende Reihe mit (3) bis zur Potenz $z^{-2\nu}$ einschließlich überein. Sind endlich die Kettenbrüche (4) und (9) mit ein und derselben Reihe korrespondierend bzw. assoziiert, so geht (9) aus (4) durch Kontraktion hervor, und es ist $\frac{K_\nu(z)}{L_\nu(z)} = \frac{A_{2\nu}(z)}{B_{2\nu}(z)}$ (siehe § 62, I).

II. Sei $\psi(x)$ eine wachsende Funktion derart, daß die Integrale

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^{k-1} d\psi(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{11}$$

alle existieren. Der Fall endlicher Integrationsgrenzen ist dabei eingeschlossen, worüber man die Fußnote S. 372 vergleiche; natürlich braucht bei endlichen Grenzen die Existenz der Integrale nicht erst vorausgesetzt zu werden, sondern ist selbstverständlich. Nach Hilfssatz 4 ist das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z + x} \tag{12}$$

für nicht reelle z eine reguläre analytische Funktion. Sind die Integrationsgrenzen endlich, so kommt für hinreichend große $|z|$:

$$\int \frac{d\psi(x)}{z + x} = \int \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} - \cdots\right) d\psi(x) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots.$$

Wenn dagegen nicht beide Grenzen endlich sind, so ist die gliedweise Integration unstatthaft; das Integral ist dann nur formal gleich der

Reihe. Falls diese Reihe einen korrespondierenden bzw. assoziierten Kettenbruch hat, so wollen wir diesen auch mit dem Integral (12) korrespondierend bzw. assoziiert nennen, und zwar auch dann, wenn die vermittelnde Reihe für alle z divergiert.

Dann gilt der

Satz 1. *Wenn $\psi(x)$ eine wachsende Funktion ist mit unendlich vielen Wachstumsstellen, und wenn die Integrale*

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^{k-1} d\psi(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

alle existieren, so besitzt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

stets einen assoziierten Kettenbruch

$$\frac{k_1|}{|z+l_1} + \frac{k_2|}{|z+l_2} + \frac{k_3|}{|z+l_3} + \cdots,$$

und zwar ist k_1 positiv, die andern k_ν negativ. Falls $\psi(x)$ für alle negativen x gleich $\psi(0)$ ist, so daß die untere Integrationsgrenze durch 0 ersetzt werden kann, so existiert sicher auch der korrespondierende Kettenbruch

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots,$$

und zwar sind dann alle b_ν positiv.

Beweis. Die quadratische Form

$$\sum_{i=0}^{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{s-1} c_{i+k+s} U_i U_k \tag{13}$$

geht, wenn man für ihre Koeffizienten c die Integralausdrücke einsetzt, über in

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{s-1} \left(\sum_{i=0}^{\nu} (-x)^i U_i \right)^2 d\psi(x). \tag{14}$$

Für $s = 1$ ist sie also nach Hilfssatz 2 positiv definit. Daher ist ihre Diskriminante

$$\varphi_{\nu+1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \ldots & c_{\nu+1} \\ c_2 & c_3 \ldots & c_{\nu+2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} \ldots & c_{2\nu+1} \end{vmatrix}$$

positiv. Da dies für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ gilt, so ist nach Satz 11, Kap. VIII ein assoziierter Kettenbruch vorhanden, und die k_ν haben nach den dortigen Formeln die angegebenen Vorzeichen.

Ist $\psi(x)$ für alle negativen x gleich $\psi(0)$, so reduziert sich das Integral (14) auf

$$\int_0^\infty x^{s-1}\left(\sum_{i=0}^{\nu}(-x)^i U_i\right)^2 d\psi(x),$$

ist also auch für $s = 2$ eine positiv definite Form. Daher ist auch die Diskriminante

$$(-1)^{\nu+1}\psi_{\nu+2} = \begin{vmatrix} -c_2 & -c_3 \ldots & -c_{\nu+2} \\ -c_3 & -c_4 \ldots & -c_{\nu+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ -c_{\nu+2} & -c_{\nu+3} \ldots & -c_{2\nu+2} \end{vmatrix}$$

positiv. Nach Satz 5, Kap. VIII existiert dann der korrespondierende Kettenbruch, und die a_ν sind alle positiv; nach (6) werden also auch die b_ν positiv. W. z. b. w.

III. Wir beschäftigen uns jetzt zuerst mit dem assoziierten Kettenbruch. Für zwei sukzessive Näherungsbrüche gilt die Formel:

$$K_{\lambda+1}(z)L_\lambda(z) - K_\lambda(z)L_{\lambda+1}(z) = (-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1},$$

also, indem man durch $L_\lambda(z)L_{\lambda+1}(z)$ dividiert und nach fallenden Potenzen von z entwickelt, mit Rücksicht auf (10):

$$\frac{K_{\lambda+1}(z)}{L_{\lambda+1}(z)} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \frac{(-1)^\lambda k_1 k_2 \cdots k_{\lambda+1}}{z^{2\lambda+1}} + \cdots.$$

Da nun die formale Entwicklung des Integrals (12) mit der von $\frac{K_{\lambda+1}(z)}{L_{\lambda+1}(z)}$ bis zur Potenz $\frac{1}{z^{2\lambda+2}}$ übereinstimmt, so kommt auch formal:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \frac{(-1)^\lambda k_1 k_2 \cdots k_{\lambda+1}}{z^{2\lambda+1}} + \cdots,$$

oder nach Multiplikation mit $L_\lambda(z) = z^\lambda + \cdots$:

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{L_\lambda(z)}{z+x}\,d\psi(x) - K_\lambda(z) = \frac{(-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}} + \cdots.$$

Da nun die Integrale (11) existieren, so existiert sicher auch das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_\lambda(z) - L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x),$$

da ja der Integrand hier offenbar eine ganze rationale Funktion von x ist. Dann kann man aber der linken Seite von (15) die Form geben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_\lambda(z) - L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) - K_\lambda(z) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x),$$

und hier ist das erste Integral offenbar eine ganze rationale Funktion von z. Da aber die formale Entwicklung nach fallenden Potenzen von z keine positiven Exponenten enthält, sondern nach (15) mit dem Glied

$$\frac{(-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}}$$

beginnt, so folgen hieraus die wichtigen Formeln (*Heine* **1**, *Possé* **1**):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_\lambda(z) - L_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) = K_\lambda(z), \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x)^k L_\lambda(-x)\, d\psi(x) = 0 \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots, \lambda - 1, \tag{17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x)^\lambda L_\lambda(-x)\, d\psi(x) = (-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}. \tag{18}$$

Aus (17) und (18) erhält man ohne weiteres auch noch:

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_\mu(-x) L_\lambda(-x)\, d\psi(x) = 0 \qquad \text{für } \mu \neq \lambda, \tag{19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_\lambda(-x)^2\, d\psi(x) = (-1)^\lambda k_1 k_2 \ldots k_{\lambda+1}. \tag{20}$$

Hieraus kann die in Satz 1 enthaltene Bemerkung über die Vorzeichen der k_ν von neuem gefolgert werden, da ja die linke Seite von (20) gewiß positiv sein muß.

Als Anwendung dieser Formeln behandeln wir das folgende von *Heine* **1** gestellte und gelöste

Minimumproblem. *Ist $f(x)$ eine stetige reelle, $\psi(x)$ eine wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, für welche die Integrale*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2\, d\psi(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, d\psi(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

existieren, so soll unter allen Polynomen $P_n(x)$ vom höchstens n^{ten} Grad dasjenige bestimmt werden, für welches das Integral

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - P_n(x))^2\, d\psi(x)$$

ein Minimum wird.

Die Lösung lautet:

$$(21) \qquad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu L_\nu(-x)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) L_\nu(-u)\, d\psi(u).$$

Beweis. Wegen (10) läßt sich $P_n(x)$ offenbar in der Form annehmen:

$$(22) \qquad P_n(x) = g_0 L_0(-x) + g_1 L_1(-x) + \cdots + g_n L_n(-x).$$

Die Konstanten g_ν sind nun so zu bestimmen, daß das Integral J_n ein Minimum wird. Es muß also

$$(23) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial J_n}{\partial g_\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} (P_n(x) - f(x))\, L_\nu(-x)\, d\psi(x) = 0$$

sein für $\nu = 0, 1, \ldots n$. Man kann hier vielleicht einwenden, daß unter dem Integralzeichen differenziert worden sei, wozu die Berechtigung nicht bewiesen wurde; allein wenn man in das Integral J_n für P_n den Ausdruck (22) einsetzt, so entsteht eine quadratische Funktion der g_ν, welche, in extenso geschrieben, kein g_ν mehr unter einem Integral enthält. Differenziert man diese, so entsteht durch Zusammenfassen unter einem Integralzeichen wieder (23).

Setzt man in (23) für $P_n(x)$ wieder den Ausdruck (22) ein, so kommt wegen (19) und (20):

$$(24) \quad (-1)^\nu k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1} g_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) L_\nu(-x)\, d\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) L_\nu(-u)\, d\psi(u).$$

Hiermit sind die g_ν berechnet, und durch Einsetzen in (22) erhält man genau die angegebene Lösung (21). Daß wirklich ein Minimum ein-

tritt, ergibt sich aus den zweiten Ableitungen. Man erhält mit Rücksicht auf (19):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 J_n}{\partial g_\nu \partial g_\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} L_\mu(-x)\, L_\nu(-x)\, d\psi(x) \begin{cases} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \\ > 0 \text{ für } \mu = \nu. \end{cases}$$

Die quadratische Form

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial^2 J_n}{\partial g_\mu \partial g_\nu} U_\mu U_\nu$$

ist also positiv definit, so daß wirklich ein Minimum eintritt.

Die Lösung (21) gestattet noch eine bemerkenswerte Umformung (*Blumenthal* 1). Schreibt man sie nämlich zunächst in der Gestalt

$$(25)\qquad P_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu L_\nu(-x) L_\nu(-u)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}} \right) f(u)\, d\psi(u),$$

so kann die Summe unter dem Integral auf folgende Weise ausgewertet werden. Es ist nach der Rekursionsformel für die Näherungsnenner:

$$\left.\begin{aligned} L_{\nu+1}(-x) &= (-x + l_{\nu+1}) L_\nu(-x) + k_{\nu+1} L_{\nu-1}(-x) \\ L_{\nu+1}(-u) &= (-u + l_{\nu+1}) L_\nu(-u) + k_{\nu+1} L_{\nu-1}(-u) \end{aligned}\right\} \quad (\nu \geqq 0).$$

Multipliziert man die erste dieser Formeln mit $L_\nu(-u)$, die zweite mit $L_\nu(-x)$, und subtrahiert sie dann voneinander, so kommt

$$L_{\nu+1}(-x) L_\nu(-u) - L_{\nu+1}(-u) L_\nu(-x)$$
$$= (u-x) L_\nu(-x) L_\nu(-u) - k_{\nu+1} \{ L_\nu(-x) L_{\nu-1}(-u) - L_\nu(-u) L_{\nu-1}(-x) \}.$$

Dividiert man diese Formel durch $(-1)^\nu k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}$ und summiert alsdann von $\nu = 0$ bis n, so erhält man:

$$(26)\qquad \begin{aligned} &\frac{L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)}{(-1)^n k_1 k_2 \ldots k_{n+1}} \\ &= (u-x) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu L_\nu(-x) L_\nu(-u)}{k_1 k_2 \ldots k_{\nu+1}}. \end{aligned}$$

Dadurch geht (25) über in die gewünschte **Blumenthal**sche Formel:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{k_1 k_2 \ldots k_{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{L_{n+1}(-x) L_n(-u) - L_{n+1}(-u) L_n(-x)}{u - x}\, d\psi(u).$$

Da das Minimum von J_n mit wachsendem n offenbar abnimmt, so liegt die Vermutung nahe, daß $\lim_{n=\infty} P_n(x) = f(x)$ ist, d. h. wegen (22), daß sich $f(x)$ in eine unendliche Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu L_\nu(-x)$$

entwickeln läßt, wobei die Koeffizienten g_ν durch (24) bestimmt sind. Wir müssen indes auf die Untersuchung dieser Frage verzichten, von der bis heute nur ganz spezielle Fälle behandelt worden sind (*Blumenthal* 1). Bemerkt sei nur, daß unter diesen Reihen auch die nach Legendreschen Polynomen fortschreitenden enthalten sind. Für

$$\psi(x) = \begin{cases} x \text{ für } |x| \leqq 1 \\ \text{konst. für } |x| \geqq 1 \end{cases}$$

erhält man nämlich das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{z+x} = \log\frac{z+1}{z-1},$$

und hier sind die Näherungsnenner des assoziierten Kettenbruches, von konstanten Faktoren abgesehen, die Legendreschen Polynome, wie aus § 64, II, E hervorgeht, da der dortige Kettenbruch (16) offenbar dem assoziierten äquivalent ist.

IV. Ähnliche Formeln gelten für den korrespondierenden Kettenbruch, falls er existiert. Wir nehmen ihn wieder in der Form (5) an. Es ist dann mit Rücksicht auf (7):

$$\frac{A_{\lambda+1}(z)}{B_{\lambda+1}(z)} - \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \frac{(-1)^\lambda}{B_{\lambda+1}(z)B_\lambda(z)} = \frac{(-1)^\lambda}{b_1^2 b_2^2 \cdots b_\lambda^2 b_{\lambda+1}} \frac{1}{z^{\lambda+1}} + \cdots,$$

also auch formal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \frac{(-1)^\lambda}{b_1^2 b_2^2 \cdots b_\lambda^2 b_{\lambda+1}} \frac{1}{z^{\lambda+1}} + \cdots$$

und nach Multiplikation mit $B_\lambda(z)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_\lambda(z)}{z+x} d\psi(x) - A_\lambda(z) = \frac{(-1)^\lambda}{b_1 b_2 \cdots b_{\lambda-1}} \frac{1}{z^{\lambda+1-\nu}} + \cdots,$$

wo $\nu = \frac{\lambda}{2}$ oder $\frac{\lambda+1}{2}$ ist, je nachdem λ gerade oder ungerade. Die linke Seite läßt sich aber auch in die Form setzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_\lambda(z) - B_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) - A_\lambda(z) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x),$$

und daraus folgt dann, da das erste Integral offenbar wieder eine ganze rationale Funktion von z ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_\lambda(z) - B_\lambda(-x)}{z+x}\, d\psi(x) = A_\lambda(z), \tag{27}$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^k B_\lambda(-x)\, d\psi(x) = 0, \\ \text{für } k = 0, 1, \ldots \lambda - \nu - 1, \quad \text{wo } \nu = \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \frac{\lambda+1}{2}. \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (-x)^{\lambda-\nu} B_\lambda(-x)\, d\psi(x) = \frac{(-1)^\lambda}{b_1 b_2 \ldots b_{\lambda+1}}, \\ \text{wo } \nu = \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \frac{\lambda+1}{2}. \end{cases} \tag{29}$$

Für gerade $\lambda (= 2\nu)$ folgt aus (28) und (29) weiter:

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{2\nu}(-x) B_{2\mu}(-x)\, d\psi(x) = 0 \quad \text{für } \nu \neq \mu, \tag{30}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_{2\nu}(-x)^2\, d\psi(x) = \frac{1}{b_{2\nu+1}}. \tag{31}$$

Dagegen erhält man für ungerade λ $(= 2\nu - 1)$ mit Rücksicht darauf, daß $B_{2\nu-1}(z)$ für $z = 0$ verschwindet (Formel (7)), unter anderm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \left(\frac{B_{2\nu-1}(-x)}{-x} \right)^2 d\psi(x) = \frac{1}{b_{2\nu}}. \tag{32}$$

Aus (31) und (32) ergibt sich wieder die in Satz 1 enthaltene Bemerkung, daß, wenn $\psi(x)$ für alle negativen x gleich $\psi(0)$ ist, dann alle b_ν positiv sind.

§ 68. Der Satz von Markoff.

I. Ist wieder $\psi(x)$ eine im Intervall (a, b) wachsende Funktion, die nicht überall konstant ist, so dürfen wir beim Studium des Integrals

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} \tag{1}$$

annehmen, daß a und b Wachstumsstellen von $\psi(x)$ sind. Andernfalls sei nämlich β die untere Grenze derjenigen Zahlen x, für welche

$$\psi(x) = \psi(b),$$

und α die obere Grenze derjenigen Zahlen x, für welche

$$\psi(x) = \psi(a)$$

ist. Dann sind gewiß α, β Wachstumsstellen von $\psi(x)$, und außerdem ist

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} = \int_{\alpha-0}^{\beta+0} \frac{d\psi(x)}{z+x}.$$

Wenn man nun eine wachsende Funktion $\psi_1(x)$ definiert durch

$$\psi_1(x) = \psi(x) \quad \text{für} \quad \alpha < x < \beta,$$
$$\psi_1(\alpha) = \psi(\alpha - 0), \quad \psi_1(\beta) = \psi(\beta + 0),$$

so sind α, β erst recht Wachstumsstellen von $\psi_1(x)$, und unser Integral geht über in $\int_\alpha^\beta \frac{d\psi_1(x)}{z+x}$. Wir nehmen daher jetzt an, schon bei dem Integral (1) seien a, b Wachstumsstellen von $\psi(x)$. Entwickelt man dann nach fallenden Potenzen von z:

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots,$$

so kann man leicht den Konvergenzbereich dieser Reihe bestimmen. Ist nämlich G die größte der Zahlen $|a|$, $|b|$, so ist

$$|c_k| = \left|\int_a^b (-x)^{k-1} d\psi(x)\right| \leq \int_a^b G^{k-1} d\psi(x) = G^{k-1}(\psi(b) - \psi(a)),$$

so daß die Reihe gewiß für $|z| > G$ konvergiert (und natürlich gleich dem Integral ist). Für $|z| < G$ dagegen divergiert sie. Denn bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl, so ist zum mindesten für ungerades k:

$$\left.\begin{array}{l}\text{falls } G=|a| \\ \\ \text{falls } G=|b|\end{array}\right\}: c_k=\int_a^b |x|^{k-1}d\psi(x)\geqq\left\{\begin{array}{l}\int_a^{a+\varepsilon}|x|^{k-1}d\psi(x)\geqq(G-\varepsilon)^{k-1}\int_a^{a+\varepsilon}d\psi(x), \\ \int_{b-\varepsilon}^b |x|^{k-1}d\psi(x)\geqq(G-\varepsilon)^{k-1}\int_{b-\varepsilon}^b d\psi(x),\end{array}\right.$$

so daß die Reihe für $z = G - \varepsilon$ gewiß divergiert (weil nämlich a und b Wachstumsstellen sind, also die ganz rechts stehenden Integrale nicht verschwinden).

Es ist nun eine der bemerkenswertesten Tatsachen der ganzen Kettenbruchlehre, daß das Konvergenzgebiet des assoziierten Kettenbruches beträchtlich größer ist als das der Reihe. Es gilt nämlich der

Satz 2. *Ist $\psi(x)$ eine in dem* **endlichen** *Intervall (a, b) wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, so ist der nach Satz 1 stets existierende assoziierte Kettenbruch des Integrals* $\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$ *für alle reellen und komplexen z, die nicht dem Intervall $-b \leqq z \leqq -a$ angehören, konvergent und gleich dem Integral.* (*Markoff* **1.**)

Beweis. Sind wieder $K_\nu(z)$, $L_\nu(z)$ die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung des assoziierten Kettenbruches, so ist nach Formel (17) des vorigen Paragraphen

$$\int_a^b x^k L_\lambda(-x)d\psi(x) = 0 \qquad \text{für } k = 0, 1, \ldots \lambda - 1. \tag{2}$$

Nach Hilfssatz 3 folgt hieraus, daß die λ Wurzeln des Polynoms $L_\lambda(-x)$ voneinander verschieden sind und zwischen a und b liegen. Sie seien $x_1, x_2, \ldots x_\lambda$, so daß

$$a < x_i < b \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda), \tag{3}$$

$$L_\lambda(-x_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots \lambda) \tag{4}$$

ist. Versteht man dann unter $\Omega(x)$ ein beliebiges Polynom höchstens vom $(2\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grad, so gilt die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\Omega(x)}{L_\lambda(-x)} = G(x) + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{\Omega(x_i)}{-L_\lambda'(-x_i)} \frac{1}{x - x_i}, \tag{5}$$

wo L_λ' die Ableitung von L_λ bedeutet, und wo das Polynom $G(x)$ höchstens vom $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grad ist. Aus (5) folgt durch Multiplikation mit $L_\lambda(-x)$ und Integration:

$$\int_a^b \Omega(x)\,d\psi(x) = \int_a^b G(x) L_\lambda(-x)\,d\psi(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{\Omega(x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} \int_a^b \frac{-L_\lambda(-x)}{x-x_i}\,d\psi(x).$$

Hier verschwindet aber nach (2) das erste Integral der rechten Seite. Das Integral unter der Summe läßt sich wegen $L_\lambda(-x_i) = 0$ folgendermaßen schreiben:

$$\int_a^b \frac{L_\lambda(-x_i) - L_\lambda(-x)}{(-x_i)+x}\,d\psi(x),$$

hat also nach Formel (16) des vorigen Paragraphen den Wert $K_\lambda(-x_i)$, so daß die vorige Formel übergeht in:

$$\int_a^b \Omega(x)\,d\psi(x) = \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)}\,\Omega(x_i). \tag{6}$$ [1]

Da $\Omega(x)$ ein beliebiges Polynom vom höchstens $(2\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grad sein darf, so findet man speziell für $\Omega(x) = 1$:

$$\psi(b) - \psi(a) = \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)}. \tag{7}$$

Dagegen für $\Omega(x) = \left[\frac{L_\lambda(-x)}{(x-x_k)\,L_\lambda'(-x_k)}\right]^2$, was ja wegen $L_\lambda(-x_k) = 0$ ein Polynom vom $(2\lambda-2)^{\text{ten}}$ Grad ist:

---

1) Es sei hier bemerkt, daß diese Formel auch bei der näherungsweisen Berechnung von Integralen eine hervorragende Rolle spielt. Ist $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion, so ist angenähert

$$\int_a^b f(x)\,d\psi(x) = \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} f(x_i).$$

Dies wird auf Grund der Formel (6) plausibel, indem man sich etwa $f(x)$ durch ein Polynom $\Omega(x)$ vom $(2\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grad approximiert denkt derart, daß

$$\Omega(x_i) = f(x_i) \quad (\text{für } i = 1, 2, \ldots \lambda)$$

wird. Für $\psi(x) = x$, $a = -1$, $b = 1$ führt die Formel auf die bekannte mechanische Quadratur von Gauß (*Gauß* 3). Der allgemeine Fall wurde von *Stieltjes* 1 behandelt. Eine zusammenfassende Erörterung der hierher gehörigen Fragen findet man bei *Possé* 1.

$$\int_a^b \left[\frac{L_\lambda(-x)}{(x-x_k)\,L_\lambda'(-x_k)}\right]^2 d\psi(x) = \frac{K_\lambda(-x_k)}{L_\lambda'(-x_k)},$$

also gewiß nach Hilfssatz 2:

$$\frac{K_\lambda(-x_k)}{L_\lambda'(-x_k)} > 0 \quad (k = 1, 2, \ldots \lambda). \tag{8}$$

Da $K_\lambda(z)$ nur vom $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grad, so hat man weiter die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} \frac{1}{z + x_i}. \tag{9}$$

Aus (6) und (9) zusammen ergibt sich dann die wichtige Identität:

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \int_a^b \left(\frac{1}{z+x} - \Omega(x)\right) d\psi(x) - \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} \left(\frac{1}{z+x_i} - \Omega(x_i)\right) \tag{10}$$

für ein beliebiges Polynom $\Omega(x)$ vom höchstens $(2\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grad.

Wir legen jetzt z einen beliebigen konstanten Wert bei, der jedoch nicht dem Intervall $-b \leqq z \leqq -a$ angehören darf. Dann gibt es in der komplexen Zahlenebene eine Stelle ζ, die von z weiter entfernt ist als von jedem $-x$ des Intervalles $-b \leqq -x \leqq -a$. Man hat nur nötig, ζ als Mittelpunkt eines Kreises zu wählen, der die Strecke $(-b, -a)$ als Sehne enthält und den Punkt z außerhalb läßt (Fig. 3). Für alle x des Intervalles $a \leqq x \leqq b$ ist alsdann

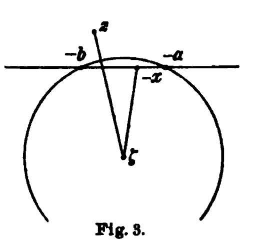


Fig. 3.

$$|z + x| > g, \quad \left|\frac{\zeta + x}{z - \zeta}\right| < \vartheta, \tag{11}$$

wobei g und $\vartheta < 1$ zwei von x unabhängige positive Zahlen sind. Dies vorausgeschickt, wählen wir in (10) für $\Omega(x)$ speziell das folgende Polynom $(2\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\Omega(x) = \frac{1}{z-\zeta} - \frac{\zeta + x}{(z-\zeta)^2} + \frac{(\zeta + x)^2}{(z-\zeta)^3} - + \cdots - \frac{(\zeta + x)^{2\lambda - 1}}{(z-\zeta)^{2\lambda}} = \frac{1 - \left(\frac{\zeta + x}{z - \zeta}\right)^{2\lambda}}{z + x}.$$

Dann ist

$$\frac{1}{z+x} - \Omega(x) = \frac{1}{z+x}\left(\frac{\zeta + x}{z - \zeta}\right)^{2\lambda},$$

so daß (10) übergeht in:

$$\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \int_a^b \frac{1}{z+x}\left(\frac{\zeta + x}{z - \zeta}\right)^{2\lambda} d\psi(x) - \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)} \frac{1}{z+x_i}\left(\frac{\zeta + x_i}{z - \zeta}\right)^{2\lambda}.$$

Da hier x und nach (3) auch alle x_i dem Intervall (a, b) angehören, so darf man die Glieder der rechten Seite nach Formel (11) abschätzen und erhält dann:

$$\left|\int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)}\right| \leqq \int_a^b \frac{1}{g}\,\vartheta^{2\lambda} d\psi(x) + \sum_{i=1}^{\lambda} \frac{K_\lambda(-x_i)}{L_\lambda'(-x_i)}\,\frac{1}{g}\,\vartheta^{2\lambda}$$

$$= \frac{2\vartheta^{2\lambda}}{g}\,(\psi(b) - \psi(a)) \qquad \text{(nach (8) und (7))}.$$

Wegen $\vartheta < 1$ folgt hieraus:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{K_\lambda(z)}{L_\lambda(z)} = \int_a^b \frac{d\psi(x)}{z+x}. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

II. Für den korrespondierenden Kettenbruch gilt der zu Satz 2 analoge

Satz 3. *Ist $\psi(x)$ eine in dem* endlichen *Intervall $(0, b)$ wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen, so ist der nach Satz 1 stets existierende korrespondierende Kettenbruch des Integrals $\int_0^b \frac{d\psi(x)}{z+x}$ für alle reellen und komplexen z, die nicht dem Intervall $-b \leqq z \leqq 0$ angehören, konvergent und gleich dem Integral.*

Beweis. Sind wieder $A_\lambda(z)$, $B_\lambda(z)$ die Näherungszähler und -Nenner λ^{ter} Ordnung des korrespondierenden Kettenbruches, so ist nach Formel (28) des vorigen Paragraphen

$$\int_0^b x^k B_\lambda(-x)\,d\psi(x) = 0$$

für $k = 0, 1, \ldots, \lambda - \nu - 1$, wo $\nu = \frac{\lambda}{2}$ oder $\frac{\lambda+1}{2}$.

Daher hat $B_\lambda(-x)$ nach Hilfssatz 3 zwischen 0 und b mindestens $\lambda - \nu$ verschiedene Wurzeln. Für gerades λ ist $B_\lambda(-x)$ vom Grad $\frac{\lambda}{2} = \lambda - \nu$, also sind dies alle Wurzeln. Für ungerades λ ist $B_\lambda(-x)$ vom Grad $\frac{\lambda+1}{2} = \lambda - \nu + 1$, also ist noch eine weitere Wurzel vorhanden und zwar nach § 67, Formel (7) die Wurzel 0. In jedem Fall sind also alle Wurzeln voneinander verschieden und gehören dem Intervall $(0, b)$ an (eventuell mit Einschluß der Grenze 0); ihre Anzahl ist ν, wir bezeichnen sie mit $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Ist dann $\Omega(x)$ ein Polynom vom höchstens $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grad, so findet man als Analogon zur obigen Formel (6) auf dem gleichen Weg wie dort:

$$\int_0^b \Omega(x)\,d\psi(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{A_\lambda(-x_i)}{B_\lambda'(-x_i)}\,\Omega(x_i). \tag{12}$$

Also speziell für $\Omega(x) = 1$:

$$\psi(b) - \psi(a) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{A_\lambda(-x_i)}{B'_\lambda(-x_i)}, \tag{13}$$

und für $\Omega(x) = \left[\frac{B_\lambda(-x)}{(x-x_k)B'_\lambda(-x_k)}\right]^2$, was ja ein Polynom vom Grad $2(\nu - 1) \leqq \lambda - 1$ ist:

$$0 < \int_0^b \left[\frac{B_\lambda(-x)}{(x-x_k)B'_\lambda(-x_k)}\right]^2 d\psi(x) = \frac{A_\lambda(-x_k)}{B'_\lambda(-x_k)}. \tag{14}$$

Außerdem ist auch

$$\frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{A_\lambda(-x_i)}{B'_\lambda(-x_i)} \frac{1}{z+x_i}, \tag{15}$$

und aus (12) und (15) zusammen folgt als Analogon zu (10):

$$\int_0^b \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \int_0^b \left(\frac{1}{z+x} - \Omega(x)\right) d\psi(x) - \sum_{i=1}^{\nu} \frac{A_\lambda(-x_i)}{B'_\lambda(-x_i)} \left(\frac{1}{z+x_i} - \Omega(x_i)\right). \tag{16}$$

Ist z ein beliebiger konstanter Wert, der nicht dem Intervall $-b \leqq z \leqq 0$ angehört, ferner ζ ein wie vorhin bei Fig. 3 bestimmter Wert, so folgt aus (16), indem man

$$\Omega(x) = \frac{1}{z-\zeta} - \frac{\zeta+x}{(z-\zeta)^2} + \frac{(\zeta+x)^2}{(z-\zeta)^3} - \cdots \pm \frac{(\zeta+x)^{\lambda-1}}{(z-\zeta)^\lambda} = \frac{1 - \left(\frac{\zeta+x}{\zeta-z}\right)^\lambda}{z+x}$$

wählt, genau wie vorhin im Anschluß an Formel (10):

$$\left|\int_0^b \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)}\right| \leqq \frac{2\vartheta^\lambda}{g} (\psi(b) - \psi(a)),$$

also auch

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \int_0^b \frac{d\psi(x)}{z+x}. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

III. Die Beweise von Satz 2 und 3 versagen bei einem unendlichen Integrationsintervall, weil dann ein Wert ζ der verlangten Art nicht existiert. Wir dürfen, wenn es sich um das Intervall $(0, \infty)$ handelt, annehmen, daß es beliebig große x gibt, welche Wachstumsstellen von $\psi(x)$ sind, weil andernfalls die obere Integrationsgrenze durch eine endliche ersetzt werden könnte. Bedeutet dann G eine beliebig große Zahl, so ist

$$(-1)^{k-1} c_k = \int_0^\infty x^{k-1} d\psi(x) \geqq \int_G^\infty x^{k-1} d\psi(x) > G^{k-1} \int_G^\infty d\psi(x),$$

so daß die Reihe $\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$, welche ja den Übergang vom Integral zum korrespondierenden Kettenbruch vermittelt, jetzt für $z = G$ divergiert, also für keinen Wert von z konvergiert. Um so merkwürdiger ist es, daß trotzdem in vielen Fällen der Kettenbruch konvergiert und gleich dem Integral ist. Es gilt nämlich der

Satz 4. *Sei $\psi(x)$ eine für $x \geqq 0$ wachsende Funktion mit unendlich vielen Wachstumsstellen und derart, daß die Integrale $\int\limits_0^\infty x^{k-1}\, d\psi(x)$ alle existieren, so daß nach Satz 1 das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$ stets einen korrespondierenden Kettenbruch*

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \frac{1|}{|b_5 z} + \frac{1|}{|b_6} + \cdots$$

hat mit positiven b_ν. Wenn dann Σb_ν divergiert, so konvergiert der Kettenbruch für alle z, die nicht der negativ reellen Achse inkl. 0 angehören, und ist gleich dem Integral.

Wenn dagegen Σb_ν konvergiert, so ist der Kettenbruch für alle z divergent. (*Stieltjes* **4a.**)

Beweis. Daß bei Konvergenz der Reihe Σb_ν der Kettenbruch divergiert, folgt schon aus Satz 5, Kap. VII. Wenn aber Σb_ν divergiert, so lehrt Satz 37, Kap. VII, indem man dort $x = \frac{1}{z}$ setzt, daß der Kettenbruch in jedem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich, der keinen Punkt der negativ reellen Achse inkl. 0 enthält, gleichmäßig konvergiert. Er ist also nach einem schon wiederholt angewandten Satz von Weierstraß daselbst eine reguläre analytische Funktion. Ebenso ist aber nach Hilfssatz 4 das Integral $\int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$ daselbst eine reguläre analytische Funktion. Wir wollen jetzt zeigen, daß diese beiden Funktionen für alle reellen positiven z übereinstimmen; bekanntlich müssen sie dann überall identisch sein, so daß Satz 4 damit bewiesen sein wird.

Sei also $z > 0$. Nun ist identisch

$$B_{2\nu}(z)^2 \int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} - B_{2\nu}(z) \int\limits_0^\infty \frac{B_{2\nu}(z) - B_{2\nu}(-x)}{z+x}\, d\psi(x)$$

$$+ \int\limits_0^\infty B_{2\nu}(-x)\, \frac{B_{2\nu}(-x) - B_{2\nu}(z)}{z+x}\, d\psi(x) = \int\limits_0^\infty \frac{B_{2\nu}(-x)^2}{z+x}\, d\psi(x).$$

Nach den Formeln (27), (28) des vorigen Paragraphen hat das zweite Integral der linken Seite den Wert $A_{2\nu}(z)$, während das dritte verschwindet, da der darin auftretende Bruch ein Polynom vom $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grad in x ist. Man erhält daher, wenn man durch $B_{2\nu}(z)^2$ dividiert:

$$(17) \qquad \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} - \frac{A_{2\nu}(z)}{B_{2\nu}(z)} = \int_0^\infty \left(\frac{B_{2\nu}(-x)}{B_{2\nu}(z)}\right)^2 \frac{d\psi(x)}{z+x} > 0.$$

Beachtet man weiter, daß $B_{2\nu-1}(z)$ den Faktor z enthält, so hat in der Identität

$$B_{2\nu-1}(z)\int_0^\infty \frac{B_{2\nu-1}(z)-B_{2\nu-1}(-x)}{z+x}\,d\psi(x) - B_{2\nu-1}(z)^2\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$$

$$+z\int_0^\infty B_{2\nu-1}(-x)\,\frac{\dfrac{B_{2\nu-1}(z)}{z}-\dfrac{B_{2\nu-1}(-x)}{-x}}{z+x}\,d\psi(x) = z\int_0^\infty \frac{B_{2\nu-1}(-x)^2}{x}\,\frac{d\psi(x)}{z+x}$$

wieder nach den Formeln (27), (28) des vorigen Paragraphen das erste Integral der linken Seite den Wert $A_{2\nu-1}(z)$, während das dritte verschwindet; man erhält also, wenn man durch $B_{2\nu-1}(z)^2$ dividiert:

$$(18) \qquad \frac{A_{2\nu-1}(z)}{B_{2\nu-1}(z)} - \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} = z\int_0^\infty x\left(\frac{B_{2\nu-1}(-x)}{xB_{2\nu-1}(z)}\right)^2 \frac{d\psi(x)}{z+x} > 0.$$

Da somit die Näherungsbrüche gerader Ordnung nach (17) sämtlich kleiner, die ungerader Ordnung nach (18) sämtlich größer sind wie das Integral, so kann ihr gemeinsamer Grenzwert nur das Integral sein. W. z. b. w.

Erstes Beispiel. Aus der bekannten Formel

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \Gamma(\alpha) \qquad (\alpha>0)$$

erhält man formal:

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{e^{-x}x^{\alpha-1}dx}{z+x} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{z} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^2} + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{z^3} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z}\,\Omega\left(\alpha, 1; \frac{1}{z}\right), \end{aligned}\right.$$

wo Ω die in § 59, Formel (24) eingeführte divergente Reihe ist. Bei Berücksichtigung des Lemma 3 erkennt man, daß die linke Seite von (19) die Form $\int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$ hat, wobei

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x e^{-x} x^{\alpha-1} dx$$

eine im Intervall $(0, \infty)$ wachsende Funktion mit lauter Wachstumsstellen ist. Nach § 59, Formel (26) wird daher der mit dem Integral (19) korrespondierende Kettenbruch der folgende sein:

$$(20) \qquad \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha+1|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{\alpha+2|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \frac{\alpha+3|}{|1} + \cdots.$$

Nun brauchen wir aber gar nicht erst die b_ν zu berechnen und die Reihe Σb_ν zu untersuchen. Denn Satz 10, Kap. VII lehrt, daß der Kettenbruch (20) für positive z jedenfalls konvergiert; es liegt also nicht der in Satz 4 bemerkte Divergenzfall des Kettenbruches vor, sondern der Konvergenzfall, und wir erhalten somit

$$(21) \qquad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x} x^{\alpha-1} dx}{z+x} = \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{\alpha+1|}{|1} + \frac{2|}{|z} + \frac{\alpha+2|}{|1} + \frac{3|}{|z} + \cdots$$

für $\alpha > 0$ und alle z, die nicht der negativ reellen Achse inkl. 0 angehören (*Stieltjes* **4b**). Durch Kontraktion (Formel (7), § 43) ergibt sich noch mit demselben Geltungsbereich:

$$(22) \qquad \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-x} x^{\alpha-1} dx}{z+x} = \frac{1|}{|z+\alpha} - \frac{1\cdot\alpha|}{|z+\alpha+2} - \frac{2(\alpha+1)|}{|z+\alpha+4} - \frac{3(\alpha+2)|}{|z+\alpha+6} - \cdots,$$

eine Formel, die für $\alpha = 1$ schon von *Tschebyscheff* **1** und *Laguerre* **3** angegeben wurde.[1])

---

1) In den Formeln (13), (16) des § 57 traten die gleichen Kettenbrüche wie hier in (21) und (22) auf, aber andere Integrale. Der Leser wird die verschiedenen Integrale leicht miteinander identifizieren können (für positive z), wenn er in der allgemeinen Formel

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-u} u^{\beta-1}}{(1+xu)^\alpha} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{e^{-v} v^{\alpha-1}}{(1+xv)^\beta} dv \qquad (\alpha>0, \beta>0, x>0)$$

speziell $\beta = 1$, $x = \frac{1}{z}$ setzt. Die Richtigkeit dieser Formel selbst ergibt sich daraus, daß ihre beiden Seiten gleich dem Doppelintegral

Zweites Beispiel. Auf Seite 330 bemerkten wir in der zweiten Fußnote, daß die dortigen Ausdrücke (21) und (24) für reelle x einander gleich sind. Setzt man $x = \frac{1}{\sqrt{z}}$, so ist also

$$(23) \qquad \frac{1}{z}\int_0^\infty \mathrm{cn}\left(\frac{t}{\sqrt{z}}\right) e^{-t}dt = \frac{2\pi}{kK}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu+\frac{1}{2}}}{1+q^{2\nu+1}} \cdot \frac{1}{z+\left(\frac{(2\nu+1)\pi}{2K}\right)^2}.$$

Für $0<k<1$ sind bekanntlich q, K reell und positiv, so daß hier die rechte Seite die Form $\int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$ hat (vgl. das Beispiel auf S. 367). Der korrespondierende Kettenbruch ergibt sich unmittelbar aus der Formel (28) des § 61, nämlich:

$$(24) \qquad \frac{1|}{|z} + \frac{1^2|}{|1} + \frac{2^2k^2|}{|z} + \frac{3^2|}{|1} + \frac{4^2k^2|}{|z} + \frac{5^2|}{|1} + \cdots.$$

Da dieser wieder nach Satz 10, Kap. VII dem konvergenten Typus angehört, so sind die Ausdrücke (23) und (24) wirklich einander gleich. Man erhält demnach, wenn man noch z durch y^2, die Integrationsvariable t durch ty und den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, für $0<k<1$, $y>0$:

$$(25) \qquad \int_0^\infty \mathrm{cn}\, t \cdot e^{-ty}dt = \frac{1|}{|y} + \frac{1^2|}{|y} + \frac{2^2k^2|}{|y} + \frac{3^2|}{|y} + \frac{4^2k^2|}{|y} + \frac{5^2|}{|y} + \cdots$$

(*Stieltjes* **4 b**).

§ 69. Die Wurzeln der Näherungsnenner eines Stieltjesschen Kettenbruches.

Als Stieltjessche Kettenbrüche bezeichnen wir die Kettenbrüche der Form

$$(1) \qquad \frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots,$$

wo die b_ν reelle positive Zahlen sind. Nach Satz 4 ist ein Integral

---

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u-v-xuv}u^{\beta-1}v^{\alpha-1}du\,dv$$

sind. Die linke Seite entsteht nämlich, indem man zuerst nach v, die rechte, indem man zuerst nach u integriert, wobei jedesmal die bekannte Formel

$$\int_0^\infty e^{-\zeta u}u^{\alpha-1}du = \frac{1}{\zeta^\alpha}\Gamma(\alpha) \qquad (\zeta>0)$$

anzuwenden ist.

$\int\limits_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x}$ unter gewissen Bedingungen einem Stieltjesschen Kettenbruch gleich, der dann auch der korrespondierende ist. Umgekehrt wollen wir jetzt zeigen, daß ein Stieltjesscher Kettenbruch im Konvergenzfall auch gleich einem solchen Integral ist und daß er für das Integral zugleich die Bedeutung des korrespondierenden Kettenbruches hat. Um den Beweis dieses Satzes, der erst in § 72 beendet sein wird, vorzubereiten, bemerken wir, daß die Näherungszähler $A_\nu(z)$ und -Nenner $B_\nu(z)$ Polynome mit positiven Koeffizienten sind. Speziell ist

$$B_{2\nu}(z) \geqq 1 \quad \text{für } z \geqq 0 \tag{2}$$

$$B_{2\nu+1}(0) = 0, \quad B_{2\nu+1}(z) > 0 \quad \text{für } z > 0. \tag{3}$$

Für die $B_\nu(z)$ gelten die Rekursionsformeln

$$B_{2\nu}(z) = b_{2\nu} B_{2\nu-1}(z) + B_{2\nu-2}(z) \tag{4}$$

$$B_{2\nu+1}(z) = b_{2\nu+1} z B_{2\nu}(z) + B_{2\nu-1}(z). \tag{5}$$

Nun seien $z, \bar{z}$ zwei unabhängige Variable. Multipliziert man Gleichung (4) mit $B_{2\nu-1}(\bar{z})$ und subtrahiert dann davon die Gleichung, welche man durch Vertauschung von z und $\bar{z}$ erhält, so kommt:

$$\frac{B_{2\nu}(z) B_{2\nu-1}(\bar{z}) - B_{2\nu}(\bar{z}) B_{2\nu-1}(z)}{z-\bar{z}} = \frac{B_{2\nu-1}(\bar{z}) B_{2\nu-2}(z) - B_{2\nu-1}(z) B_{2\nu-2}(\bar{z})}{z-\bar{z}}. \tag{6}$$

Multipliziert man ebenso die Gleichung (5) mit $B_{2\nu}(\bar{z})$ und subtrahiert davon diejenige, welche durch Vertauschung von z und $\bar{z}$ entsteht, so erhält man:

$$\begin{cases} \dfrac{B_{2\nu+1}(z) B_{2\nu}(\bar{z}) - B_{2\nu+1}(\bar{z}) B_{2\nu}(z)}{z-\bar{z}} \\ = b_{2\nu+1} B_{2\nu}(z) B_{2\nu}(\bar{z}) + \dfrac{B_{2\nu}(\bar{z}) B_{2\nu-1}(z) - B_{2\nu}(z) B_{2\nu-1}(\bar{z})}{z-\bar{z}}. \end{cases} \tag{7}$$

Setzt man speziell

$$z = \xi + i\eta, \quad \bar{z} = \xi - i\eta,$$

wo ξ, η reell sind, so wird

$$\begin{cases} B_\lambda(\xi + i\eta) B_{\lambda-1}(\xi - i\eta) = U_\lambda(\xi, \eta) + i\eta V_\lambda(\xi, \eta) \\ B_\lambda(\xi - i\eta) B_{\lambda-1}(\xi + i\eta) = U_\lambda(\xi, \eta) - i\eta V_\lambda(\xi, \eta) \end{cases} \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots), \tag{8}$$

wo U_λ, V_λ reelle Polynome sind. Aus (6) und (7) folgt dann:

$$\begin{cases} V_{2\nu}(\xi, \eta) = -V_{2\nu-1}(\xi, \eta) \\ V_{2\nu+1}(\xi, \eta) = b_{2\nu+1} |B_{2\nu}(\xi + i\eta)|^2 - V_{2\nu}(\xi, \eta). \end{cases} \tag{9}$$

Da offenbar $V_1(\xi, \eta) = b_1 > 0$, so ergibt sich aus (9) allgemein durch den Schluß von λ auf $\lambda + 1$:

$$(10) \qquad (-1)^{\lambda-1} V_\lambda(\xi, \eta) \geqq b_1 > 0.$$

Nach (8) ist dann für $\eta \neq 0$ auch $B_\lambda(\xi + i\eta) \neq 0$. Daher sind die Wurzeln von $B_\lambda(z)$ alle reell. Da sie wegen (2) und (3) nicht positiv sein können, bezeichnen wir sie mit

$$-x_{1,\lambda}, -x_{2,\lambda}, \ldots, -x_{\nu,\lambda} \quad \left(\nu = \frac{\lambda}{2} \text{ oder } \frac{\lambda+1}{2}\right).$$

Aus (8) folgt nun für $\xi = -x_{j,\lambda}$:

$$\frac{B_\lambda(-x_{j,\lambda} + i\eta)}{i\eta} B_{\lambda-1}(-x_{j,\lambda} - i\eta) = \frac{U_\lambda(-x_{j,\lambda}, \eta)}{i\eta} + V_\lambda(-x_{j,\lambda}, \eta).$$

Für $\lim \eta = 0$ wird die linke Seite reell, also auch die rechte, und man erhält

$$(11) \qquad B_\lambda'(-x_{j,\lambda}) B_{\lambda-1}(-x_{j,\lambda}) = V_\lambda(-x_{j,\lambda}, 0) \neq 0 \quad \text{(nach (10))}.$$

Die Ableitung $B_\lambda'(-x_{j,\lambda})$ ist also von Null verschieden; daher die Wurzeln von $B_\lambda(z)$ sämtlich einfach. Aus der Gleichung

$$A_\lambda(z) B_{\lambda-1}(z) - A_{\lambda-1}(z) B_\lambda(z) = (-1)^{\lambda-1}$$

erhält man weiter für $z = -x_{j,\lambda}$:

$$A_\lambda(-x_{j,\lambda}) B_{\lambda-1}(-x_{j,\lambda}) = (-1)^{\lambda-1},$$

und daher nach Division durch (11):

$$(12) \qquad \frac{A_\lambda(-x_{j,\lambda})}{B_\lambda'(-x_{j,\lambda})} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{V_\lambda(-x_{j,\lambda}, 0)} > 0 \qquad \text{(nach (10))}.$$

Hieraus folgt nun

Satz 5. *Bei einem* S t i e l t j e s s c h e n *Kettenbruch* $\frac{1\,|}{|\,b_1 z} + \frac{1\,|}{|\,b_2} + \cdots$ *sind die Wurzeln des Näherungsnenners* λ^{ter} *Ordnung* $B_\lambda(z)$ *alle reell, einfach und nicht positiv; die Wurzel* 0 *ist für ungerade* λ *vorhanden, für gerade* λ *nicht. Zerlegt man den Näherungsbruch* λ^{ter} *Ordnung in Partialbrüche*

$$\frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{M_{j,\lambda}}{z + x_{j,\lambda}} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2} \textit{ oder } \frac{\lambda+1}{2},$$

so ist

$$M_{j,\lambda} > 0, \ \sum_{j=1}^{\nu} M_{j,\lambda} = \frac{1}{b_1}. \qquad \textit{(Stieltjes 4a).}$$

In der Tat ist ja bekanntlich

$$M_{j,\lambda} = \frac{A_\lambda(-x_{j,\lambda})}{B_\lambda'(-x_{j,\lambda})},$$

also nach (12) positiv. Die Beziehung $\sum\limits_j M_{j,\lambda} = \frac{1}{b_1}$ erhält man sofort, wenn man in Satz 5 beide Seiten der Gleichung nach fallenden Potenzen von z entwickelt. Denn es ist ja

$$\frac{A_\lambda(z)}{B_\lambda(z)} = \frac{1}{b_1}\frac{1}{z} + \cdots,$$

weil die korrespondierende Reihe mit diesem Glied beginnt.

§ 70. Konvergenz und analytischer Charakter der Stieltjesschen Kettenbrüche.

I. Wenn in dem Stieltjesschen Kettenbruch

$$\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots \tag{1}$$

die Variable z nicht negativ reell oder Null ist, so setze man $z = |z|\, e^{i\vartheta}$; dabei ist dann $-\pi < \vartheta < \pi$, und der Kettenbruch wird äquivalent mit

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{|z|}} e^{-\frac{i\vartheta}{2}} \Big|}{\Big| b_1 \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i\vartheta}{2}}} + \frac{1 \Big|}{\Big| b_2 \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i\vartheta}{2}}} + \frac{1 \Big|}{\Big| b_3 \sqrt{|z|}\, e^{\frac{i\vartheta}{2}}} + \cdots.$$

Nach Satz 32, Kap. VII haben daher die Näherungsbrüche gerader Ordnung und die ungerader Ordnung je einen endlichen Grenzwert.

Wenn die Reihe Σb_ν divergiert, so wird der Kettenbruch (1) durch die Substitution $z = \frac{1}{re^{i\varphi}}$ äquivalent mit

$$\frac{re^{i\varphi}|}{|b_1} + \frac{re^{i\varphi}|}{|b_2} + \frac{re^{i\varphi}|}{|b_3} + \cdots,$$

er ist also nach Satz 37, Kap. VII gleichmäßig konvergent in jedem Bereich der Form $0 < r \leqq R$, $-\pi + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon$, und stellt somit in jedem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich von z, der keinen Punkt der negativ reellen Achse inklusive 0 enthält, eine reguläre analytische Funktion dar.

Ganz anders verhält sich der Kettenbruch (1), wenn die Reihe Σb_ν konvergiert. Nach Satz 5, Kap. VII ist er in diesem Fall für alle z di-

vergent. Dagegen existieren nach Satz 6, Kap. VII die folgenden Grenzwerte:

$$(2)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} A_{2\nu}(z) = \mathsf{A}_0(z), & \lim\limits_{\nu=\infty} A_{2\nu+1}(z) = \mathsf{A}_1(z) \\ \lim\limits_{\nu=\infty} B_{2\nu}(z) = \mathsf{B}_0(z), & \lim\limits_{\nu=\infty} B_{2\nu+1}(z) = \mathsf{B}_1(z), \end{cases}$$

und es ist

$$(3)\qquad \mathsf{A}_1(z)\,\mathsf{B}_0(z) - \mathsf{A}_0(z)\,\mathsf{B}_1(z) = 1\,.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Grenzwerte (2) in jedem endlichen Bereich von z gleichmäßig erreicht werden, und daß A_0, A_1, B_0, B_1 ganze transzendente Funktionen von z sind. In der Tat, wiederholt man wörtlich den für Satz 6, Kap. VII gegebenen Beweis, wobei nur $b_{2\nu-1}$ durch $b_{2\nu-1}z$ zu ersetzen ist, so erkennt man, daß $|A_\nu(z)|$ und $|B_\nu(z)|$ unter einer von ν unabhängigen Schranke bleiben, die aber auch von z unabhängig gewählt werden kann, wenn man z auf einen Bereich $|z| \leqq R$ beschränkt. Dann konvergieren aber die a. a. O. auftretenden Ausdrücke

$$(4)\qquad \begin{cases} A_{2\nu}(z) = A_0(z) + b_2 A_1(z) + b_4 A_3(z) + \cdots + b_{2\nu} A_{2\nu-1}(z) \\ A_{2\nu+1}(z) = A_1(z) + b_3 z A_2(z) + b_5 z A_4(z) + \cdots + b_{2\nu+1} z A_{2\nu}(z) \end{cases}$$

mit wachsendem ν in diesem Bereich gleichmäßig gegen ihre Grenzwerte $\mathsf{A}_0(z)$, $\mathsf{A}_1(z)$; ebenso die entsprechenden Ausdrücke mit B statt A. Daher sind A_0, A_1, ebenso B_0, B_1 für $|z| < R$ regulär, also, da R beliebig groß sein darf, ganze Funktionen von z. Da die Polynome $A_\nu(z)$, $B_\nu(z)$ positive Koeffizienten haben, so ersieht man aus (4) für $\lim \nu = \infty$ auf Grund des Weierstraßschen Doppelreihensatzes, daß in $\mathsf{A}_0(z)$, $\mathsf{A}_1(z)$, ebenso in $\mathsf{B}_0(z)$, $\mathsf{B}_1(z)$ beliebig hohe Potenzen von z auftreten; diese Funktionen sind also auch transzendent.

Wir wollen noch zeigen, daß die Funktionen $\mathsf{B}_0(z)$, $\mathsf{B}_1(z)$ keine Nullstelle außerhalb der negativ reellen Achse haben. In der Tat, bedeutet σ eine der Zahlen 0, 1, und ist $\mathsf{B}_\sigma(z) = 0$, so muß wegen (3) $\mathsf{A}_\sigma(z) \neq 0$ sein. Daher ist für diesen Wert von z:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_{2\nu-\sigma}(z)}{A_{2\nu-\sigma}(z)} = \frac{\mathsf{B}_\sigma(z)}{\mathsf{A}_\sigma(z)} = 0\,,$$

so daß der Quotient $\dfrac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)}$ keinen endlichen Grenzwert hat. Nach dem, was wir zu Beginn dieses Paragraphen feststellten, ist das aber nicht möglich, wenn z außerhalb der negativ reellen Achse liegt.

Daraus ergibt sich nun leicht, daß auch die Quotienten $\dfrac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)}$ in jedem abgeschlossenen Bereich von z, der keinen Punkt der negativ reellen Achse inklusive 0 enthält, gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion

$\frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}$ konvergieren. In der Tat hat in einem solchen Bereich $|\mathsf{B}_\sigma(z)|$ ein von Null verschiedenes Minimum m, ferner $|\mathsf{B}_\sigma(z)| + |\mathsf{A}_\sigma(z)|$ ein Maximum M. Da aber $B_{2\nu-\sigma}(z)$ gleichmäßig gegen $\mathsf{B}_\sigma(z)$ konvergiert, so wird für genügend große ν im ganzen Bereich auch $|B_{2\nu-\sigma}(z)| > \frac{m}{2}$ sein. Dann ist aber

$$\left|\frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} - \frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}\right| = \left|\frac{(A_{2\nu-\sigma}(z) - \mathsf{A}_\sigma(z))\,\mathsf{B}_\sigma(z) + \mathsf{A}_\sigma(z)(\mathsf{B}_\sigma(z) - B_{2\nu-\sigma}(z))}{B_{2\nu-\sigma}(z)\,\mathsf{B}_\sigma(z)}\right|$$

$$\leqq \frac{M}{\frac{1}{2}m^2}\left\{|A_{2\nu-\sigma}(z) - \mathsf{A}_\sigma(z)| + |\mathsf{B}_\sigma(z) - B_{2\nu-\sigma}(z)|\right\},$$

so daß in der Tat wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $A_{2\nu-\sigma}(z)$, $B_{2\nu-\sigma}(z)$ auch der Quotient $\frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)}$ gleichmäßig gegen $\frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}$ konvergiert. Zusammenfassend erhält man

Satz 6. *Bei einem Stieltjesschen Kettenbruch* $\frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \cdots$ *konvergieren in jedem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich von z, der keinen Punkt der negativ reellen Achse inklusive 0 enthält, die Näherungsbrüche gerader Ordnung* $\frac{A_{2\nu}(z)}{B_{2\nu}(z)}$ *gleichmäßig gegen eine reguläre analytische Funktion $F_0(z)$; ebenso die Näherungsbrüche ungerader Ordnung* $\frac{A_{2\nu-1}(z)}{B_{2\nu-1}(z)}$ *gleichmäßig gegen eine reguläre analytische Funktion $F_1(z)$.*

Falls die Reihe Σb_ν divergiert, ist $F_0(z) = F_1(z)$, der Kettenbruch also gleichmäßig konvergent. Wenn aber Σb_ν konvergiert, sind $F_0(z)$, $F_1(z)$ zwei überall voneinander verschiedene meromorphe Funktionen, und der Kettenbruch ist für alle z divergent. (*Stieltjes* **4a**).

II. Über die Möglichkeit, die Funktionen $F_0(z)$, $F_1(z)$ eindeutig über die negativ reelle Achse hinaus analytisch fortzusetzen, gibt der folgende Satz einigen Aufschluß, der uns bald von Nutzen sein wird.

Satz 7. *Sei σ eine bestimmte der Zahlen 0, 1; ferner a, b zwei Zahlen, für die $0 \leqq a < b$ sein soll. Wenn dann unter Beibehaltung der Bezeichnung von Satz 6 eine unbegrenzte Folge von wachsenden Indizes $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ existiert derart, daß die Nenner der Näherungsbrüche*

$$\frac{A_{2\nu_1-\sigma}(z)}{B_{2\nu_1-\sigma}(z)},\quad \frac{A_{2\nu_2-\sigma}(z)}{B_{2\nu_2-\sigma}(z)},\quad \frac{A_{2\nu_3-\sigma}(z)}{B_{2\nu_3-\sigma}(z)},\ \ldots$$

im Intervall $(-b, -a)$ keine Nullstelle haben, so ist die Funktion $F_\sigma(z)$ über dieses Intervall hinaus eindeutig analytisch fortsetzbar, und die obigen Näherungsbrüche konvergieren gleichmäßig gegen $F_\sigma(z)$ in jedem Kreis-

ring, dessen Zentrum der Nullpunkt ist, und dessen Radien r, R den Ungleichungen $a < r < R < b$ genügen. (*Stieltjes* 4a).

Beweis. Nach Satz 5 besteht die Partialbruchzerlegung

$$\frac{A_{2\nu_s-\sigma}(z)}{B_{2\nu_s-\sigma}(z)} = \sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{M_{j,2\nu_s-\sigma}}{z + x_{j,2\nu_s-\sigma}}, \tag{5}$$

wobei

$$x_{j,2\nu_s-\sigma} \geqq 0, \quad M_{j,2\nu_s-\sigma} > 0, \quad \sum_{j=1}^{\nu_s} M_{j,2\nu_s-\sigma} = \frac{1}{b_1} \tag{6}$$

ist. Wir setzen jetzt

$$z_0 = -\frac{a+b}{2} + i\eta \qquad (\eta \text{ reell, aber } \neq 0)$$

und entwickeln die rechte Seite der Formel (5) nach Potenzen von $z - z_0$. Es kommt

$$\frac{A_{2\nu_s-\sigma}(z)}{B_{2\nu_s-\sigma}(z)} = g_{0,s} - g_{1,s}(z-z_0) + g_{2,s}(z-z_0)^2 - \cdots, \tag{7}$$

wobei

$$g_{\lambda,s} = \sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{M_{j,2\nu_s-\sigma}}{(z_0 + x_{j,2\nu_s-\sigma})^{\lambda+1}} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Da aber auch $F_\sigma(z)$ für $z = z_0$ regulär ist, hat man außerdem für genügend kleines $|z - z_0|$:

$$F_\sigma(z) = g_0 - g_1(z-z_0) + g_2(z-z_0)^2 - \cdots. \tag{9}$$

In einem Kreis mit dem Mittelpunkt z_0, der nicht bis zur reellen Achse heranreicht, nähern sich nach Satz 6 die Funktionen (7) mit wachsendem s gleichmäßig der Grenzfunktion $F_\sigma(z)$. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz ist daher

$$g_\lambda = \lim_{s=\infty} g_{\lambda,s} = \lim_{s=\infty} \sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{M_{j,2\nu_s-\sigma}}{(z_0 + x_{j,2\nu_s-\sigma})^{\lambda+1}}. \tag{10}$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß der Konvergenzkreis der Reihen (7) und (9) über die reelle Achse hinausreicht, indem der Konvergenzradius mindestens gleich $|z_0 + a| = |z_0 + b|$ ist. In der Tat gehört nach Voraussetzung keine der Wurzeln $-x_{j,2\nu_s-\sigma}$ dem Intervall $(-b, -a)$ an; daher ist $|z_0 + x_{j,2\nu_s-\sigma}| > |z_0 + a|$; folglich nach (8) und (6):

$$|g_{\lambda,s}| \leqq \sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{M_{j,2\nu_s-\sigma}}{|z_0 + x_{j,2\nu_s-\sigma}|^{\lambda+1}} < \sum_{j=1}^{\nu_s} \frac{M_{j,2\nu_s-\sigma}}{|z_0 + a|^{\lambda+1}} = \frac{1}{b_1\,|z_0 + a|^{\lambda+1}}. \tag{11}$$

Da dies für alle s gilt, so ist auch

$$(12) \qquad |g_\lambda| = \lim_{s=\infty} |g_{\lambda,s}| \leqq \frac{1}{b_1 |z_0 + a|^{\lambda+1}}.$$

Wegen (11) und (12) ist in der Tat der Konvergenzradius der Reihen (7) und (9) mindestens gleich $|z_0 + a|$. Folglich gehört das Intervall $(-b, -a)$ dem Konvergenzkreis von (9) an, und die Funktion $F_\sigma(z)$ läßt sich über das Intervall hinaus analytisch fortsetzen.

Nun war $F_\sigma(z)$ definiert für alle z, die nicht der negativ reellen Achse angehören, und aus dem Bewiesenen folgt noch keineswegs, daß bei Überschreitung dieser Achse die Funktion **eindeutig** bleibt. Wir werden aber jetzt beweisen, daß die Näherungsbrüche (7) in jedem Kreise K mit dem Mittelpunkt z_0, dessen Radius kleiner als $|z_0 + a|$ ist, gleichmäßig gegen den Wert der Reihe (9) konvergieren. Da der Grenzwert dieser Näherungsbrüche für alle nicht reellen z definitionsgemäß gerade $F_\sigma(z)$ ist, so muß dann auch die Reihe (9) gleich $F_\sigma(z)$ sein, selbst wenn z im Innern des Kreises K die reelle Achse überschritten hat; damit wird also die Eindeutigkeit von $F_\sigma(z)$ bei Überschreitung der negativ reellen Achse bewiesen sein.

Für alle z im Kreis K ist nun

$$(13) \qquad \left|\frac{z - z_0}{z_0 + a}\right| \leqq \vartheta,$$

wo $\vartheta < 1$ von z nicht abhängt; außerdem gilt in K die Formel (7), da ja der Konvergenzradius der Reihe (7) mindestens $|z_0 + a|$ ist. Daher hat man in K die folgende Abschätzung:

$$\left|\frac{A_{2\nu_s-\sigma}(z)}{B_{2\nu_s-\sigma}(z)} - \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda g_\lambda (z-z_0)^\lambda\right| = \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda (g_{\lambda,s} - g_\lambda)(z-z_0)^\lambda\right|$$

$$\leqq \sum_{\lambda=0}^{k} |g_{\lambda,s} - g_\lambda|\,|z-z_0|^\lambda + \sum_{\lambda=k+1}^{\infty} (|g_{\lambda,s}| + |g_\lambda|)\,|z-z_0|^\lambda$$

$$\leqq \sum_{\lambda=0}^{k} |g_{\lambda,s} - g_\lambda|\,|z-z_0|^\lambda + \sum_{\lambda=k+1}^{\infty} \frac{2}{b_1 |z_0 + a|^{\lambda+1}} |z-z_0|^\lambda \quad \text{(nach (11) u. (12))}$$

$$\leqq \sum_{\lambda=0}^{k} |g_{\lambda,s} - g_\lambda|\,|z_0+a|^\lambda + \frac{2}{b_1 |z_0 + a|} \sum_{\lambda=k+1}^{\infty} \vartheta^\lambda \quad \text{(nach (13))}.$$

Nun kann man zu jedem vorgegebenen positiven ε eine Zahl k so wählen, daß der zweite Term der letzten Zeile (der von s nicht abhängt) kleiner

wird als $\frac{\varepsilon}{2}$. Alsdann wird für genügend große s, etwa für $s \geqq s_0$ auch der erste Term kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Daher ist für $s \geqq s_0$ im ganzen Kreis K

$$\left| \frac{A_{2\nu_s - \sigma}(z)}{B_{2\nu_s - \sigma}(z)} - \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda g_\lambda (z - z_0)^\lambda \right| < \varepsilon,$$

womit die in K gleichmäßige Konvergenz der Näherungsbrüche (7) gegen den Wert der Reihe (9), also auch gegen die Funktion $F_\sigma(z)$ bewiesen ist.

Nun denken wir uns einen Kreisring von der in Satz 7 verlangten Art. Dann gibt es einen Kreis K mit dem Mittelpunkt z_0, der die Punkte $-b$ und $-a$ außerhalb läßt, dagegen die Schnittpunkte der Grenzkreise des Ringes mit der negativ reellen Achse innerhalb (Fig. 4). Nach dem soeben Bewiesenen konvergieren die Näherungsbrüche des Satz 7 in K gleichmäßig gegen $F_\sigma(z)$. Das gleiche ist aber nach Satz 6 auch in dem außerhalb K liegenden Teil des Ringes der Fall, da dieser Teil keinen Punkt der negativ reellen Achse enthält. Die Konvergenz ist also im ganzen Ringgebiet eine gleichmäßige, womit Satz 7 vollständig bewiesen ist.

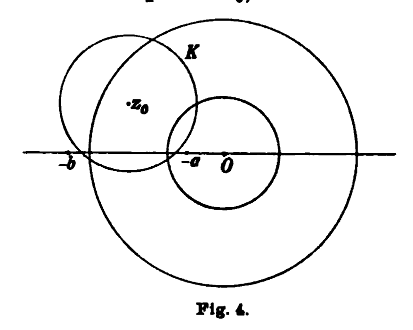


Fig. 4.

§ 71. Der Hauptsatz von Stieltjes.

I. Wir knüpfen jetzt an die in Satz 5 gegebene Partialbruchzerlegung an; danach ist, wenn wieder σ eine der Zahlen 0, 1 bedeutet:

$$\frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{M_{j,2\nu-\sigma}}{z + x_{j,2\nu-\sigma}} \tag{1}$$

$$M_{j,2\nu-\sigma} > 0, \quad \sum_{j=1}^{\nu} M_{j,2\nu-\sigma} = \frac{1}{b_1}. \tag{2}$$

Wir denken uns die Wurzeln $x_{j,2\nu-\sigma}$ von $B_{2\nu-\sigma}(-z)$ der Größe nach geordnet:

$$0 \leqq x_{1,2\nu-\sigma} < x_{2,2\nu-\sigma} < \cdots < x_{\nu,2\nu-\sigma}, \tag{3}$$

$$x_{1,2\nu-\sigma} \begin{cases} > 0 \text{ für } \sigma = 0 \\ = 0 \text{ für } \sigma = 1, \end{cases} \tag{4}$$

und definieren eine wachsende Funktion $\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ in folgender Weise:

$$(5)\begin{cases} \varphi_{2\nu-\sigma}(x)=0 & \text{für } 0 \leqq x \leqq x_{1,2\nu-\sigma} \\ \varphi_{2\nu-\sigma}(x)=M_{1,2\nu-\sigma} & \text{für } x_{1,2\nu-\sigma} < x \leqq x_{2,2\nu-\sigma} \\ \varphi_{2\nu-\sigma}(x)=M_{1,2\nu-\sigma}+M_{2,2\nu-\sigma} & \text{für } x_{2,2\nu-\sigma} < x \leqq x_{3,2\nu-\sigma} \\ \dots\dots\dots & \\ \varphi_{2\nu-\sigma}(x)=M_{1,2\nu-\sigma}+M_{2,2\nu-\sigma}+\cdots+M_{\nu-1,2\nu-\sigma} & \text{für } x_{\nu-1,2\nu-\sigma}<x\leqq x_{\nu,2\nu-\sigma} \\ \varphi_{2\nu-\sigma}(x)=M_{1,2\nu-\sigma}+M_{2,2\nu-\sigma}+\cdots+M_{\nu,2\nu-\sigma}=\frac{1}{b_1} & \text{für } x > x_{\nu,2\nu-\sigma}. \end{cases}$$

Der Gleichung (1) läßt sich dann die Form geben:

$$(6) \qquad \frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = \int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}.$$

Unsere nächste Aufgabe ist nun, nachzuweisen, daß die Funktionen $\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ für $\lim \nu = \infty$ im wesentlichen gegen eine Grenzfunktion konvergieren, wobei die Worte „im wesentlichen" natürlich genauer zu präzisieren sein werden. Ersetzt man in (6) die Zahl ν durch $\nu+\lambda$, so kommt durch Subtraktion:

$$\frac{A_{2\nu+2\lambda-\sigma}(z)}{B_{2\nu+2\lambda-\sigma}(z)} - \frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = \int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)}{z+x} - \int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}.$$

Entwickelt man hier beide Seiten nach fallenden Potenzen von z, so beginnt die linke Seite erst mit der Potenz $\frac{1}{z^{2\nu-\sigma+1}}$. Rechts aber kommt:

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^k}{z^{k+1}}\right) d\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x) - \int_0^\infty \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k x^k}{z^{k+1}}\right) d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \left(\int_0^\infty x^k d\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x) - \int_0^\infty x^k d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)\right)^{1)};$$

also ergibt sich

$$(7) \quad \int_0^\infty x^k d\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x) - \int_0^\infty x^k d\varphi_{2\nu-\sigma}(x) = 0 \quad (k=0,1,\ ..2\nu-\sigma-1).$$

---

1) Die gliedweise Integration ist hier trotz der oberen Integrationsgrenze ∞ erlaubt, weil ja die Funktionen $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)$ und $\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ für genügend große x konstant sind, so daß die obere Integrationsgrenze auch durch eine endliche ersetzt werden kann.

Da die beiden Funktionen $\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ und $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)$ für $x=0$ verschwinden und für hinreichend große x den gemeinsamen konstanten Wert $\frac{1}{b_1}$ haben, so ist Gleichung (7) für $k=0$ eine Identität. Für $k>0$ aber folgt durch partielle Integration nach Lemma 2 und 3:

$$\int_0^\infty\left[\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)-\frac{1}{b_1}\right]x^{k-1}dx-\int_0^\infty\left[\varphi_{2\nu-\sigma}(x)-\frac{1}{b_1}\right]x^{k-1}dx=0$$

$$(k=1,2,\ldots 2\nu-\sigma-1),$$

also auch

$$\int_0^\infty(\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)-\varphi_{2\nu-\sigma}(x))P_{2\nu-\sigma-2}(x)dx=0, \tag{8}$$

wenn $P_{2\nu-\sigma-2}(x)$ irgend ein Polynom höchstens vom Grad $2\nu-\sigma-2$ bedeutet.

Nun können die beiden Funktionen $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)$ und $\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ nicht überall einander gleich sein. Denn da das Polynom $B_{2\nu+2\lambda-\sigma}(-z)$ von höherem Grad ist wie $B_{2\nu-\sigma}(-z)$, so gibt es gewiß eine Nullstelle $x_{j,2\nu+2\lambda-\sigma}$ des ersten, welche nicht Nullstelle des zweiten ist. Daher wird $x_{j,2\nu+2\lambda-\sigma}$ für $\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ eine Konstanzstelle sein, während $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)$ daselbst einen Sprung macht. Seien nun $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_\mu$ diejenigen Stellen, an denen die Funktion $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)-\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ in der Weise sich ändert, daß entweder

$$\text{(A)}\qquad\begin{cases}\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(\varrho_k)-\varphi_{2\nu-\sigma}(\varrho_k)\leq 0,\\ \varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(\varrho_k+0)-\varphi_{2\nu-\sigma}(\varrho_k+0)>0\end{cases}$$

oder aber

$$\text{(B)}\qquad\begin{cases}\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(\varrho_k)-\varphi_{2\nu-\sigma}(\varrho_k)>0,\\ \varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(\varrho_k+0)-\varphi_{2\nu-\sigma}(\varrho_k+0)\leq 0\end{cases}$$

ist. Solche ϱ_k muß es geben; denn andernfalls wäre die Funktion $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)-\varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ von konstantem Zeichen, ohne identisch zu verschwinden, was der Gleichung (8) für $P_{2\nu-\sigma-2}=1$ widerspricht. Die ϱ_k der Art (A) sind offenbar unter den Wurzeln $x_{j,2\nu+2\lambda-\sigma}$ zu suchen; die ϱ_k der Art (B) unter den Wurzeln

$$x_{1+\sigma,2\nu-\sigma},\ x_{2+\sigma,2\nu-\sigma},\ \ldots,\ x_{\nu,2\nu-\sigma}, \tag{9}$$

so daß ihre Anzahl höchstens $\nu-\sigma$ sein kann. Denn die Wurzel $x_{1,2\nu-\sigma}$ kann für $\sigma=1$ nicht als ϱ_k der Art (B) in Frage kommen, weil sie verschwindet und weil

$$\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(0)-\varphi_{2\nu-\sigma}(0)\ \text{nicht}>0,\ \text{sondern}=0$$

ist. Die Anzahl μ ist mindestens $2\nu-\sigma-1$; denn wäre $\mu\leq 2\nu-\sigma-2$, so würde das Integral

$$\int_0^\infty (\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x) - \varphi_{2\nu-\sigma}(x))(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\cdots(x-\varrho_\mu)dx$$

nach (8) verschwinden, was aber nicht möglich ist, da der Integrand augenscheinlich von konstantem Zeichen ist, ohne überall zu verschwinden. Ordnet man die ϱ_k der Größe nach:

$$\varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \cdots < \varrho_\mu,$$

so sind dies abwechselnd solche der Art (A) und solche der Art (B). Insbesondere muß ϱ_μ von der Art (B) sein, weil $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x) - \varphi_{2\nu-\sigma}(x)$ für hinreichend große x nicht > 0, sondern $= 0$ ist. Daher sind überhaupt $\varrho_\mu, \varrho_{\mu-2}, \varrho_{\mu-4}, \ldots$ von der Art (B), und da $\mu \geqq 2\nu - \sigma - 1$, so muß die Anzahl dieser ϱ_k von der Art (B) mindestens gleich $\nu - \sigma$ sein. Da wir aber vorhin sahen, daß sie auch höchstens $\nu - \sigma$ ist, so ist sie genau $\nu - \sigma$, und die ϱ_k der Art (B) sind gerade die $\nu - \sigma$ Zahlen (9). Setzt man also diese in (B) ein und berücksichtigt noch, daß $\varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x)$ eine wachsende Funktion ist, so erhält man die wichtigen Ungleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi_{2\nu-\sigma}(x_{j,2\nu-\sigma}) < \varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x_{j,2\nu-\sigma}) \\ \leqq \varphi_{2\nu+2\lambda-\sigma}(x_{j,2\nu-\sigma}+0) \leqq \varphi_{2\nu-\sigma}(x_{j,2\nu-\sigma}+0) \\ (\text{für } j = \sigma+1, \sigma+2, \cdots, \nu). \end{cases}$$

II. Wir setzen jetzt für $x \geqq 0$

$$(11)\quad \liminf_{\nu=\infty} \varphi_{2\nu-\sigma}(x) = \chi_\sigma(x)$$

$$(12)\quad \limsup_{\nu=\infty} \varphi_{2\nu-\sigma}(x) = \psi_\sigma(x).$$

Offenbar ist

$$(13)\quad \chi_\sigma(0) = \psi_\sigma(0) = 0,$$

$$(14)\quad 0 \leqq \chi_\sigma(x) \leqq \psi_\sigma(x) \leqq \frac{1}{b_1},$$

und $\chi_\sigma(x)$, $\psi_\sigma(x)$ sind ebenfalls wachsende Funktionen, also

$$(15)\quad \chi_\sigma(a) \leqq \chi_\sigma(b) \qquad \text{für } a < b,$$

$$(16)\quad \psi_\sigma(a) \leqq \psi_\sigma(b) \qquad \text{für } a < b.$$

Wir behaupten aber weiter, daß auch $\psi_\sigma(a) \leqq \chi_\sigma(b)$ für $a < b$ ist. Um dies nachzuweisen, seien a, b zwei beliebige, aber im folgenden konstant zu haltende Zahlen, und $0 \leqq a < b$. Dann gibt es zwei unbegrenzte Serien von Indizes: $\nu_1, \nu_2, \ldots$ und $\mu_1, \mu_2, \ldots$ derart, daß

$$(17)\quad \lim_{s=\infty} \varphi_{2\nu_s-\sigma}(a) = \psi_\sigma(a), \quad \lim_{s=\infty} \varphi_{2\mu_s-\sigma}(b) = \chi_\sigma(b)$$

ist. Wenn nun etwa zwischen $-b$ und $-a$ für unendlich viele s eine Wurzel von $B_{2\nu_s-\sigma}(z)$ liegt, also zwischen a und b eine der $\nu_s-\sigma$ Zahlen $x_{j,2\nu_s-\sigma}$ $(j=1+\sigma, 2+\sigma, \cdots, \nu_s)$, so ist wegen (10) für $\mu_{s'}>\nu_s$:

$$\varphi_{2\nu_s-\sigma}(a) \leqq \varphi_{2\nu_s-\sigma}(x_{j,2\nu_s-\sigma}) < \varphi_{2\mu_{s'}-\sigma}(x_{j,2\nu_s-\sigma}) \leqq \varphi_{2\mu_{s'}-\sigma}(b),$$

und daher, indem man s unbegrenzt wachsen läßt,

$$\psi_\sigma(a) \leqq \chi_\sigma(b).$$

Analog ist, wenn zwischen $-b$ und $-a$ für unendlich viele s eine Wurzel von $B_{2\mu_s-\sigma}(z)$ liegt, also zwischen a und b eine der $\mu_s-\sigma$ Zahlen $x_{j,2\mu_s-\sigma}$ $(j=1+\sigma, 2+\sigma, \cdots, \mu_s)$, wieder nach (10) für $\nu_{s'}>\mu_s$:

$$\varphi_{2\nu_{s'}-\sigma}(a) \leqq \varphi_{2\nu_{s'}-\sigma}(x_{j,2\mu_s-\sigma}+0) \leqq \varphi_{2\mu_s-\sigma}(x_{j,2\mu_s-\sigma}+0) \leqq \varphi_{2\mu_s-\sigma}(b);$$

also wiederum durch Grenzübergang: $\psi_\sigma(a) \leqq \chi_\sigma(b)$.

Es bleibt daher nur noch der Fall zu untersuchen, daß zwischen $-b$ und $-a$ für genügend große s weder eine Wurzel von $B_{2\nu_s-\sigma}(z)$ noch von $B_{2\mu_s-\sigma}(z)$ liegt. In diesem Fall ist aber nach Satz 7

$$\lim_{s=\infty}\frac{A_{2\nu_s-\sigma}(z)}{B_{2\nu_s-\sigma}(z)} = \lim_{s=\infty}\frac{A_{2\mu_s-\sigma}(z)}{B_{2\mu_s-\sigma}(z)} = F_\sigma(z),$$

und zwar nähern sich die Quotienten ihrem Grenzwert $F_\sigma(z)$ gleichmäßig in einem Kreisring mit dem Nullpunkt als Zentrum und mit den Radien $a+\varepsilon$ und $b-\varepsilon$, wo $\varepsilon(>0)$ beliebig klein. In einem solchen Kreisring gelten aber die Laurentschen Reihen

$$\frac{A_{2\nu_s-\sigma}(z)}{B_{2\nu_s-\sigma}(z)} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\alpha_{\lambda,s}z^\lambda, \quad \frac{A_{2\mu_s-\sigma}(z)}{B_{2\mu_s-\sigma}(z)} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\beta_{\lambda,s}z^\lambda,$$

da ja diese Funktionen in dem Kreisring regulär sind. Nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz ist dann in dem Kreisring auch

$$F_\sigma(z) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\alpha_\lambda z^\lambda,$$

wobei

$$\alpha_\lambda = \lim_{s=\infty}\alpha_{\lambda,s} = \lim_{s=\infty}\beta_{\lambda,s}.$$

Nun kann man aber $\alpha_{\lambda,s}$, $\beta_{\lambda,s}$ leicht berechnen. Da jetzt nämlich keine der Zahlen $x_{j,2\nu_s-\sigma}$ zwischen a und b liegt, so ist $\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x)$ im Innern des Intervalles (a, b) konstant, und man hat daher nach (6), wenn z im Innern des Kreisringes liegt:

$$\frac{A_{2\nu_s-\sigma}(z)}{B_{2\nu_s-\sigma}(z)} = \int_0^{a+\varepsilon} \frac{d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x)}{z+x} + \int_{b-\varepsilon}^{\infty} \frac{d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x)}{z+x}$$

$$= \int_0^{a+\varepsilon} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-x)^\lambda}{z^{\lambda+1}} \right) d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x) + \int_{b-\varepsilon}^{\infty} \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-z)^\lambda}{x^{\lambda+1}} \right) d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{z^{\lambda+1}} \int_0^{a+\varepsilon} (-x)^\lambda d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x) + \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-z)^\lambda \int_{b-\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{x^{\lambda+1}} d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x).$$

Über die Berechtigung der gliedweisen Integration vergleiche man die Fußnote Seite 402. Der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ ist somit insbesondere

$$\alpha_{-1,s} = \int_0^{a+\varepsilon} d\varphi_{2\nu_s-\sigma}(x) = \varphi_{2\nu_s-\sigma}(a+\varepsilon);$$

ebenso findet man auch

$$\beta_{-1,s} = \int_0^{a+\varepsilon} d\varphi_{2\mu_s-\sigma}(x) = \varphi_{2\mu_s-\sigma}(a+\varepsilon).$$

Also für $\lim s = \infty$:

$$\alpha_{-1} = \lim_{s=\infty} \varphi_{2\nu_s-\sigma}(a+\varepsilon) = \lim_{s=\infty} \varphi_{2\mu_s-\sigma}(a+\varepsilon). \tag{18}$$

Nun ist aber

$$\varphi_{2\nu_s-\sigma}(a) \leqq \varphi_{2\nu_s-\sigma}(a+\varepsilon), \quad \varphi_{2\mu_s-\sigma}(a+\varepsilon) \leqq \varphi_{2\mu_s-\sigma}(b),$$

woraus für $\lim s = \infty$ nach (17) und (18) folgt:

$$\psi_\sigma(a) \leqq \alpha_{-1}, \quad \alpha_{-1} \leqq \chi_\sigma(b).$$

Daher ist wiederum $\psi_\sigma(a) \leqq \chi_\sigma(b)$. Diese Ungleichung für $a < b$ gilt somit in allen Fällen. Insbesondere ist daher auch $\psi_\sigma(a-0) \leqq \chi_\sigma(a+0)$, und in Verbindung mit (14) erhält man:

$$\chi_\sigma(a-0) \leqq \psi_\sigma(a-0) \leqq \chi_\sigma(a+0) \leqq \psi_\sigma(a+0). \tag{19}$$

III. Wegen der Ungleichungen (14) existieren die Integrale $\int_0^\infty d\chi_\sigma(x)$, $\int_0^\infty d\psi_\sigma(x)$, und folglich sind nach Hilfssatz 4 die beiden Integrale

$$\int_0^\infty \frac{d\chi_\sigma(x)}{z+x}, \quad \int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} \tag{20}$$

in jedem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich, der keinen Punkt der negativ reellen Achse inkl. 0 enthält, reguläre analytische Funktionen von z. Aus (19) entnimmt man aber, daß die Funktionen $\chi_\sigma(x)$, $\psi_\sigma(x)$ an allen Stellen x, wo beide stetig sind, den gleichen Wert haben, ebenso nach (13) an der Stelle $x = 0$. Nach Hilfssatz 1 sind also die beiden Integrale (20) einander gleich. Für $x = 0$ und für die Stetigkeitsstellen von χ_σ, ψ_σ ist außerdem mit Rücksicht auf (11) und (12):

$$\chi_\sigma(x) = \psi_\sigma(x) = \lim_{\nu=\infty} \varphi_{2\nu-\sigma}(x). \tag{21}$$

Man wird daher vermuten, daß die Integrale (20) aus (6) für $\lim \nu = \infty$ hervorgehen. Das ist nun in der Tat der Fall. Zum Beweis sei zunächst z eine beliebige positive Zahl. Dann ist zu zeigen, daß zu einem beliebig kleinen positiven ε eine Zahl N gefunden werden kann derart, daß für $\nu \geqq N$

$$\left| \int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} \right| < \varepsilon$$

wird. Nun ist aber für $G > 0$:

$$\int_G^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} \leqq \frac{1}{z+G} \int_G^\infty d\psi_\sigma(x) \leqq \frac{1}{b_1(z+G)} \quad \text{(nach (14))};$$

ebenso auch für alle ν:

$$\int_G^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} \leqq \frac{1}{b_1(z+G)}.$$

Man kann daher die Zahl G so groß wählen, daß für alle ν

$$\left| \int_G^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_G^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, und hat dann nur noch zu zeigen, daß für genügend große ν gewiß auch

$$\left| \int_0^G \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_0^G \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wird. Zu dem Zweck wähle man eine Reihe von Zahlen

$$(22)\qquad x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = G$$

derart, daß die Bedingungen

$$(23)\qquad x_{i+1} - x_i < \frac{b_1 z^2 \varepsilon}{4} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$(24)\qquad \chi_\sigma(x_i) = \psi_\sigma(x_i) = \lim_{\nu=\infty} \varphi_{2\nu-\sigma}(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Das ist sicher möglich, weil ja die Gleichungen (21) außer für $x = 0$ auch für alle Stetigkeitsstellen von χ_σ, ψ_σ gelten, und weil diese Stellen überall dicht liegen, wie Seite 362 bemerkt wurde. Nachdem die Anzahl n und die Zahlen x_i in dieser Weise gewählt sind, kann man weiter wegen (24) einen Index N_1 so groß wählen, daß für $\nu \geqq N_1$

$$(25)\qquad |\psi_\sigma(x_i) - \varphi_{2\nu-\sigma}(x_i)| < \frac{z\varepsilon}{8n} \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

wird. Nun ist

$$\int_0^G \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_0^G \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}\right),$$

also auch

$$(26)\qquad \left|\int_0^G \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_0^G \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}\right| \leqq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}\right|.$$

Aus (25) folgt aber für $\nu \geqq N_1$:

$$|(\psi_\sigma(x_{i+1}) - \psi_\sigma(x_i)) - (\varphi_{2\nu-\sigma}(x_{i+1}) - \varphi_{2\nu-\sigma}(x_i))| < \frac{z\varepsilon}{4n},$$

oder, was dasselbe sagt:

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)\right| < \frac{z\varepsilon}{4n}.$$

Man kann daher setzen:

$$(27)\qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\varphi_{2\nu-\sigma}(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x) + \vartheta_i \frac{z\varepsilon}{4n},$$

wobei $-1 < \vartheta_i < 1$ ist. Anderseits ist aber

$$\frac{1}{z + x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x) < \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} < \frac{1}{z + x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x),$$

also auch

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} = \frac{1}{z+\xi_i}\int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x),$$

wobei ξ_i dem Intervall (x_i, x_{i+1}) angehört. Ebenso ist

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} = \frac{1}{z+\xi_i'}\int_{x_i}^{x_{i+1}} d\varphi_{2\nu-\sigma}(x),$$

wo auch ξ_i' dem Interwall (x_i, x_{i+1}) angehört. Durch Subtraktion der beiden letzten Formeln kommt mit Rücksicht auf (27):

$$(28)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} \\ \displaystyle= \left(\frac{1}{z+\xi_i} - \frac{1}{z+\xi_i'}\right)\int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x) - \frac{1}{z+\xi_i'}\,\vartheta_i \frac{z\varepsilon}{4n}. \end{cases}$$

Da aber offenbar $|\xi_i' - \xi_i| \leq x_{i+1} - x_i$, so ist wegen (23)

$$\left|\frac{1}{z+\xi_i} - \frac{1}{z+\xi_i'}\right| = \frac{|\xi_i' - \xi_i|}{(z+\xi_i)(z+\xi_i')} < \frac{x_{i+1}-x_i}{z^2} < \frac{b_1\varepsilon}{4}.$$

Daher erhält man aus (28) die Abschätzung

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}\right| < \frac{b_1\varepsilon}{4}\int_{x_i}^{x_{i+1}} d\psi_\sigma(x) + \frac{\varepsilon}{4n}.$$

Trägt man dies in (26) ein, so kommt schließlich:

$$\left|\int_0^G \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} - \int_0^G \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x}\right| < \frac{b_1\varepsilon}{4}\int_0^G d\psi_\sigma(x) + \frac{\varepsilon}{4}$$

$$= \frac{b_1\varepsilon}{4}\,\psi_\sigma(G) + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Wir haben damit in der Tat für positive z gefunden:

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} = \lim_{\nu=\infty}\int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x},$$

also auch nach (6) und mit der Bezeichnung des Satz 6:

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(z)}{z+x} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = F_\sigma(z).$$

Diese Formel gilt aber sogleich für alle endlichen z, die nicht der negativ reellen Achse inkl. 0 angehören. In der Tat wissen wir, daß sowohl $F_\sigma(z)$, wie das Integral für alle diese z reguläre analytische Funktionen sind. Da sie aber für die positiven z übereinstimmen, so sind sie miteinander identisch. Wir erhalten so das Stieltjessche Haupttheorem:

Satz 8. *Bei einem Stieltjesschen Kettenbruch* $\frac{1 |}{| b_1 z} + \frac{1 |}{| b_2} + \cdots$ *lassen sich für alle nicht der negativ reellen Achse inkl. 0 angehörigen z die nach Satz 6 existierenden Grenzwerte der Näherungsbrüche gerader und ungerader Ordnung in Form von Stieltjesschen Integralen darstellen:*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = F_\sigma(z) = \int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} \qquad (\sigma = 0, 1),$$

wo $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ wachsende Funktionen sind. (*Stieltjes* **4 a.**)

§ 72. Fortsetzung. — Asymptotische Reihen. — Das Momentenproblem.

I. Eine wesentliche Ergänzung zu Satz 8 ist nun

Satz 9. *Die beiden in Satz 8 auftretenden Stieltjesschen Integrale sind mit dem betreffenden Stieltjesschen Kettenbruch korrespondierend.* (*Stieltjes* **4 a.**)

Zum Beweis sei wieder

$$(1) \qquad \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots$$

die mit dem Stieltjesschen Kettenbruch korrespondierende Reihe. Dann ist nur zu zeigen, daß diese formal gleich $\int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x}$ ist, d. h. daß die folgenden Gleichungen bestehen:

$$c_k = \int_0^\infty (-x)^{k-1} d\psi_\sigma(x) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir beweisen zunächst, daß diese Integrale alle existieren. Für $k = 1$ ist die Existenz evident, weil ja $\psi_\sigma(x) \leqq \frac{1}{b_1}$ ist. Nimmt man an, die Existenz sei bereits für $k = 1, 2, \ldots \lambda$ erkannt, und setzt man demgemäß vorläufig

$$\int_0^\infty (-x)^{k-1} d\psi_\sigma(x) = c_k' \qquad (k = 1, 2, \ldots \lambda), \tag{2}$$

so erhält man

$$\left\{\begin{aligned} F_\sigma(z) &= \int_0^\infty \frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} + \cdots + \frac{(-x)^{\lambda-1}}{z^\lambda} + \frac{(-x)^\lambda}{z^\lambda(z+x)}\right) d\psi_\sigma(x) \\ &= \frac{c_1'}{z} + \frac{c_2'}{z^2} + \cdots + \frac{c_\lambda'}{z^\lambda} + \int_0^\infty \frac{(-x)^\lambda}{z^\lambda(z+x)}\, d\psi_\sigma(x). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Anderseits ist aber, weil die Reihe (1) mit dem Stieltjesschen Kettenbruch korrespondierend ist, für großes z

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} = \frac{A_{2\nu-\sigma}(z)}{B_{2\nu-\sigma}(z)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_{2\nu-\sigma}}{z^{2\nu-\sigma}} + \frac{d}{z^{2\nu-\sigma+1}} + \cdots,$$

also, indem man das Integral nach fallenden Potenzen von z entwickelt, worüber wieder die Fußnote Seite 402 zu vergleichen ist:

$$\int_0^\infty (-x)^{k-1} d\varphi_{2\nu-\sigma}(x) = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots 2\nu - \sigma).$$

Für positive z und für $2\nu - \sigma > \lambda$ ist daher auch

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d\varphi_{2\nu-\sigma}(x)}{z+x} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} + \cdots + \frac{(-x)^{\lambda-1}}{z^\lambda} + \frac{(-x)^\lambda}{z^\lambda(z+x)}\right) d\varphi_{2\nu-\sigma}(x) \\ &= \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_\lambda}{z^\lambda} + \vartheta\, \frac{c_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

wobei $0 < \vartheta < 1$. Für $\lim \nu = \infty$ folgt hieraus

$$F_\sigma(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_\lambda}{z^\lambda} + \theta\, \frac{c_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1). \tag{4}$$

Subtrahiert man diese Gleichung von (3), so kommt nach Multiplikation mit z^λ:

$$(c_1' - c_1) z^{\lambda-1} + (c_2' - c_2) z^{\lambda-2} + \cdots + (c_\lambda' - c_\lambda) = \theta\, \frac{c_{\lambda+1}}{z} - \int_0^\infty \frac{(-x)^\lambda}{z+x}\, d\psi_\sigma(x). \tag{5}$$

Nun gilt aber die Abschätzung

$$\int_0^\infty \frac{x^\lambda}{z+x}\, d\psi_\sigma(x) = \int_0^G + \int_G^\infty < \int_0^G \frac{x^\lambda}{z+x}\, d\psi_\sigma(x) + \int_G^\infty x^{\lambda-1} d\psi_\sigma(x),$$

da ja das letzte Integral nach der Annahme (2) existiert. Für genügend große G wird es beliebig klein, und indem man dann noch z unbegrenzt wachsen läßt, findet man

$$\lim_{z=\infty} \int_0^\infty \frac{x^\lambda}{z+x}\, d\psi_\sigma(x) = 0.$$

Daher ergibt sich aus (5) für $\lim z = \infty$:

$$\lim_{z=\infty} [(c_1' - c_1)z^{\lambda-1} + (c_2' - c_2)z^{\lambda-2} + \cdots + (c_\lambda' - c_\lambda)] = 0,$$

also

$$c_1' = c_1, \quad c_2' = c_2, \ldots c_\lambda' = c_\lambda. \tag{6}$$

Setzt man das aber in (5) ein, so kommt nach Multiplikation mit z:

$$\int_0^\infty \frac{z}{z+x}(-x)^\lambda d\psi_\sigma(x) = \theta c_{\lambda+1},$$

also wegen $0 \leqq \theta \leqq 1$:

$$\int_0^\infty \frac{z}{z+x} x^\lambda d\psi_\sigma(x) \leqq |c_{\lambda+1}|.$$

Daher a fortiori

$$\int_0^z \frac{z}{z+z} x^\lambda d\psi_\sigma(x) \leqq \int_0^z \frac{z}{z+x} x^\lambda d\psi_\sigma(x) \leqq |c_{\lambda+1}|,$$

oder also

$$\int_0^z x^\lambda d\psi_\sigma(x) \leqq 2\,|c_{\lambda+1}|.$$

Da dies für beliebig große z gilt, so folgt, daß das Integral (2) auch für $k = \lambda + 1$, folglich für alle k existiert. Dann sind aber auch die aus dieser Existenz gefolgerten Gleichungen (6) richtig, und man erhält die Formel:

$$\int_0^\infty (-x)^{k-1} d\psi_\sigma(x) = c_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7}$$

W. z. b. w.

II. Multipliziert man Formel (3) mit z^λ und berücksichtigt (6), so erhält man:

$$(8)\qquad z^\lambda\left(F_\sigma(z)-\frac{c_1}{z}-\frac{c_2}{z^2}-\cdots-\frac{c_\lambda}{z^\lambda}\right)=\frac{1}{z}\int\limits_0^\infty \frac{z}{z+x}(-x)^\lambda\,d\psi_\sigma(x).$$

Setzt man nun $z=|z|e^{i\vartheta}$, $-\pi<\vartheta<\pi$, so ist für $x\geqq 0$ offenbar

$$\left|\frac{z}{z+x}\right|\leqq g,$$

wobei $g=1$ oder $\frac{1}{|\sin\vartheta|}$ ist, je nachdem $|\vartheta|\leqq\frac{\pi}{2}$ oder $|\vartheta|>\frac{\pi}{2}$. Daher folgt aus (8):

$$\left|z^\lambda\left(F_\sigma(z)-\frac{c_1}{z}-\frac{c_2}{z^2}-\cdots-\frac{c_\lambda}{z^\lambda}\right)\right|\leqq\frac{1}{|z|}\int\limits_0^\infty g x^\lambda\,d\psi_\sigma(x)=\frac{g\,|c_{\lambda+1}|}{|z|}.$$

Läßt man hier z unbegrenzt wachsen und hält ϑ konstant, so kommt

$$(9)\qquad \lim_{z=\infty e^{i\vartheta}} z^\lambda\left(F_\sigma(z)-\frac{c_1}{z}-\frac{c_2}{z^2}-\cdots-\frac{c_\lambda}{z^\lambda}\right)=0\quad(\lambda=1,2,3,\ldots).$$

Speziell für $\vartheta=0$ läßt sich diese Formel auch direkt aus (4) ablesen. Nach Poincaré sagt man beim Bestehen der Gleichungen (9), daß die (im allgemeinen beständig divergente) *Reihe* $\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots$ *die Funktion* $F_\sigma(z)$ *asymptotisch darstellt*, und zwar auf dem Halbstrahl, der mit der reellen positiven Achse den Winkel ϑ bildet. Wir erhalten also

Satz 10. *Die mit einem Stieltjesschen Kettenbruch korrespondierende Reihe stellt die Grenzwerte, denen sich die Näherungsbrüche gerader und ungerader Ordnung nähern, asymptotisch dar auf jedem von der negativ reellen Achse verschiedenen Halbstrahl.*

III. Falls die Reihe Σb_ν konvergiert, existieren, wie wir Seite 397 oben sahen, die Grenzwerte

$$\lim_{\nu=\infty} A_{2\nu-\sigma}(z)=\mathsf{A}_\sigma(z),\quad \lim_{\nu=\infty} B_{2\nu-\sigma}(z)=\mathsf{B}_\sigma(z).$$

In Verbindung mit Satz 8 ergibt sich daher in diesem Fall:

$$(10)\qquad \frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}=\int\limits_0^\infty\frac{d\psi_\sigma(x)}{z+x}\qquad(\sigma=0,1).$$

Nach Satz 10 ist dann die Differenz

$$\frac{\mathsf{A}_1(z)}{\mathsf{B}_1(z)}-\frac{\mathsf{A}_0(z)}{\mathsf{B}_0(z)}=\frac{1}{\mathsf{B}_0(z)\,\mathsf{B}_1(z)}$$

auf jedem von der negativ reellen Achse verschiedenen Halbstrahl asymptotisch gleich Null, oder indem man den reziproken Wert nimmt: Die Funktion $\mathsf{B}_0(z)\mathsf{B}_1(z)$ wächst absolut genommen auf jedem solchen Halbstrahl rascher ins Unendliche wie jede noch so hohe Potenz von $|z|$.

Wie wir auf S. 397 sahen, liegen die Nullstellen von $\mathsf{B}_\sigma(z)$ sämtlich auf der negativ reellen Achse. Sind $-\beta$, $-\alpha$ zwei Nullstellen von $\mathsf{B}_\sigma(z)$, zwischen denen keine andere mehr liegt, und sind a, ξ zwei Zahlen, die den Ungleichungen genügen:

$$\alpha < a < \xi < \beta,$$

so ist die Funktion $\frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}$ im Innern und auf der Grenze des Rechtecks mit den Ecken

$$-\xi, \quad -a, \quad -a-i\eta, \quad -\xi-i\eta \qquad (\eta \text{ reell} \neq 0)$$

regulär. Der Hilfssatz 5 liefert also in Verbindung mit dem Cauchyschen Integralsatz, wenn alle Integrationswege geradlinig sind:

$$\frac{\psi_\sigma(\xi-0)+\psi_\sigma(\xi+0)}{2} - \frac{\psi_\sigma(a-0)+\psi_\sigma(a+0)}{2} = \lim_{\eta=0} \Re\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\xi-i\eta}^{-a-i\eta} \frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}\,dz\right)$$

$$= \lim_{\eta=0} \Re\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\xi-i\eta}^{-\xi} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\xi}^{-a} + \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{-a-i\eta}\right) = \Re\left(\frac{1}{\pi i}\int_{-\xi}^{-a} \frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)}\,dz\right) = 0,$$

weil ja offenbar $\mathsf{A}_\sigma(z)$, $\mathsf{B}_\sigma(z)$ für reelle z reell sind. Es ist daher die Funktion $\psi_\sigma(x)$ im Innern des Intervalles (α, β) konstant. Die Wachstumsstellen von $\psi_\sigma(x)$ liegen somit diskret und sind Nullstellen von $\mathsf{B}_\sigma(-z)$. Infolgedessen nimmt das Integral (10) die Gestalt an

$$\text{(11)} \qquad \frac{\mathsf{A}_\sigma(z)}{\mathsf{B}_\sigma(z)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{G_{\sigma,\nu}}{z+\alpha_{\sigma,\nu}}, \qquad G_{\sigma,\nu} > 0,\ \alpha_{\sigma,\nu} \geqq 0.$$

Die Summe hat tatsächlich unendlich viele Glieder, also $\mathsf{B}_\sigma(z)$ unendlich viele Nullstellen. Denn andernfalls wäre (11) eine rationale Funktion; daher würde auch die korrespondierende Reihe eine rationale Funktion darstellen, was in Wahrheit nicht möglich ist, wie schon S. 375 unten bemerkt wurde. Außerdem ist $\lim_{\nu=\infty} \alpha_{\sigma,\nu} = \infty$, weil sonst die Funktion (11) nicht meromorph wäre. Die Reihe $\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$ ist infolgedessen beständig divergent.

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, daß die Reihe Σb_ν divergiert. Da alsdann der Kettenbruch konvergiert, so ist $F_0(z) = F_1(z)$, also

$$\int_0^\infty \frac{d\psi_0(z)}{z+x} = \int_0^\infty \frac{d\psi_1(z)}{z+x},$$

das heißt, der Wert des konvergenten Kettenbruches läßt sich in Form eines solchen Stieltjesschen Integrales darstellen. Da

$$\int_0^\infty d\psi_o(x) = c_1 = \frac{1}{b_1}, \quad \psi_o(0) = 0,$$

also

$$\lim_{x=\infty} \psi_0(x) = \lim_{x=\infty} \psi_1(x) = \frac{1}{b_1},$$

so lehrt Hilfssatz 5, daß $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$ jetzt im wesentlichen einander gleich sein müssen. Er liefert nämlich für $\lim \xi = \infty$:

$$\frac{\psi_0(a-0) + \psi_0(a+0)}{2} = \frac{\psi_1(a-0) + \psi_1(a+0)}{2}.$$

Beispiel. Der Kettenbruch

$$F(z) = \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|z} + \frac{1|}{|1} + \cdots$$

ist ein konvergenter Stieltjesscher Kettenbruch, muß sich also in Form eines Integrales darstellen lassen. Da er aber periodisch ist, findet man sogleich

$$F(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{z}},$$

wo die Wurzel so zu nehmen ist, daß sie für positive z positiv ist, und bei der analytischen Fortsetzung die negativ reelle Achse nicht überschritten werden darf. Es muß also eine wachsende Funktion $\psi(x)$ geben, für welche

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{z}} = \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z + x}$$

ist. Diese Funktion kann, nachdem ihre Existenz ja feststeht, auf Grund von Hilfssatz 5 gefunden werden. Man erhält

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{z}} = \int_0^4 \frac{\sqrt{\frac{4}{x} - 1}}{2\pi(z + x)}\, dx,$$

was sich hinterher auch leicht verifizieren läßt.

IV. Im Anschluß hieran behandeln wir noch das von Stieltjes aufgestellte und gelöste *Momentenproblem* (*Stieltjes* 4 a). Dieses lautet:

Wenn eine unbegrenzte Serie von positiven Zahlen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ gegeben ist, so soll eine für $x = 0$ verschwindende und für $x \geq 0$ wachsende Funktion $\psi(x)$ mit unendlich vielen Wachstumsstellen gefunden werden, die den Gleichungen genügt:

$$\int_0^\infty x^{k-1} d\psi(x) = g_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Der Name Momentenproblem erklärt sich daraus, daß **Stieltjes** das Differential $d\psi(x)$ als eine Massenverteilung auf der X-Achse interpretiert; er bezeichnet dann die Integrale (12) als die Momente dieser Massenverteilung.

Sind $\psi(x)$, $\chi(x)$ zwei wachsende Funktionen, die an allen Stellen, wo beide stetig sind, einander gleich sind und die für $x=0$ verschwinden, so ist nach Hilfssatz 1

$$\int_0^\infty x^{k-1}d\psi(x) = \int_0^\infty x^{k-1}d\chi(x).$$

Wenn also $\psi(x)$ eine Lösung des Momentenproblems ist, so ist $\chi(x)$ ebenfalls eine. Zwei derartige Lösungen werden wir nicht als voneinander verschieden ansehen. Ist nun $\psi(x)$ eine Lösung, so ist formal

$$(13)\qquad \int_0^\infty \frac{d\psi(x)}{z+x} = \frac{g_1}{z} - \frac{g_2}{z^2} + \frac{g_3}{z^3} - \cdots,$$

und nach Satz 1 gibt es einen hiermit korrespondierenden Kettenbruch mit positiven b_ν, also einen **Stieltjes**schen. Setzt man ihn in die äquivalente Form $\frac{a_1|}{|z} + \frac{a_2|}{|1} + \cdots$, so sind auch die a_ν positiv, und wenn man $g_k = (-1)^{k-1}c_k$ setzt, so ergibt sich leicht aus Satz 5, Kap. VIII, daß die Ausdrücke

$$\varphi_\nu = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_\nu \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{\nu-1}\psi_\nu = (-1)^{\nu-1} \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \cdots & c_\nu \\ c_3 & c_4 & \cdots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix}$$

positiv sein müssen, oder, was dasselbe sagt:

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_\nu \\ g_2 & g_3 & \cdots & g_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_\nu & g_{\nu+1} & \cdots & g_{2\nu-1} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} g_2 & g_3 & \cdots & g_\nu \\ g_3 & g_4 & \cdots & g_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_\nu & g_{\nu+1} & \cdots & g_{2\nu-2} \end{vmatrix} > 0.$$

Diese Bedingungen sind also jedenfalls für die Lösbarkeit des Momentenproblems notwendig. Sie sind aber auch hinreichend. In der Tat, wenn sie erfüllt sind, so hat die Reihe

$$(14)\qquad \frac{g_1}{z} - \frac{g_2}{z^2} + \frac{g_3}{z^3} - \cdots = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \cdots$$

nach Satz 5, Kap. VIII einen korrespondierenden Kettenbruch

$$(15)\qquad \frac{a_1|}{|z} + \frac{a_2|}{|1} + \frac{a_3|}{|z} + \frac{a_4|}{|1} + \cdots \equiv \frac{1|}{|b_1 z} + \frac{1|}{|b_2} + \frac{1|}{|b_3 z} + \frac{1|}{|b_4} + \cdots$$

mit positiven a_ν, b_ν, also einen **Stieltjes**schen. Nach Satz 8 lassen

sich die Grenzwerte seiner Näherungsbrüche gerader und ungerader Ordnung in der Form darstellen:

$$(16)\qquad \lim_{\nu=\infty}\frac{A_{2\nu}(z)}{B_{2\nu}(z)}=\int_0^\infty\frac{d\psi_0(x)}{z+x},\quad \lim_{\nu=\infty}\frac{A_{2\nu-1}(z)}{B_{2\nu-1}(z)}=\int_0^\infty\frac{d\psi_1(x)}{z+x},$$

und nach Satz 9 ist der Kettenbruch (15) mit diesen Integralen korrespondierend; d. h. es ist

$$\int_0^\infty(-x)^{k-1}d\psi_0(x)=(-1)^{k-1}g_k,\quad \int_0^\infty(-x)^{k-1}d\psi_1(x)=(-1)^{k-1}g_k.$$

Die Funktionen $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ sind also Lösungen des Momentenproblems. Wenn nun Σb_ν konvergiert, so divergiert der Kettenbruch, und die beiden Integrale (16) stellen wesentlich verschiedene Funktionen dar. Daher sind $\psi_0(x), \psi_1(x)$ auch zwei verschiedene Lösungen des Momentenproblems. Es gibt aber in diesem Fall sogar unendlich viele Lösungen, indem offenbar jede Funktion der Form

$$\psi(x)=\alpha\psi_0(x)+\beta\psi_1(x),$$

wo α, β positive Konstanten mit der Summe 1 sind, eine Lösung darstellt.

Wenn dagegen Σb_ν divergiert, so konvergiert der Kettenbruch (15), und die Integrale (16) stellen beide die nämliche Funktion dar. Folglich sind nach Hilfssatz 5 die Funktionen $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ an allen Stetigkeitsstellen einander gleich[1]) und liefern daher ein und dieselbe Lösung des Momentenproblems. Man sieht aber leicht, daß es in diesem Fall überhaupt nur diese eine Lösung gibt. Denn ist $\psi(x)$ irgendeine Lösung, so muß das Integral

$$\int_0^\infty\frac{d\psi(x)}{z+x}$$

nach Satz 4 gleich dem mit der Reihe (14) korrespondierenden Kettenbruch (15) sein, also eine eindeutig bestimmte analytische Funktion $F(z)$ darstellen. Daher ist nach Hilfssatz 5 auch $\psi(x)$ an allen Stetigkeitsstellen eindeutig bestimmt[1]); das heißt aber, das Momentenproblem hat in diesem Fall nur eine Lösung.

Man kann diese Ergebnisse auch in folgender Weise aussprechen:

Satz 11. *Ein Stieltjesscher Kettenbruch* $\frac{1\,|}{|b_1 z}+\frac{1\,|}{|b_2}+\cdots$ *hat unendlich viele oder nur ein korrespondierendes Integral, je nachdem die Reihe* Σb_ν *konvergiert oder divergiert. — Wenn* Σb_ν *divergiert, so ist der Kettenbruch für alle* z, *die nicht der negativ reellen Achse inkl.* 0 *angehören, konvergent und gleich dem korrespondierenden Integral.*

1) Es ist $\psi_\sigma(0)=0$, während $\psi_\sigma(0+0)=\lim\limits_{\varepsilon=+0}\psi_\sigma(\varepsilon)$ nicht a priori bekannt ist. Der Hilfssatz 5 kann daher nicht etwa für $a=0$, sondern muß hier für einen beliebigen negativen Wert von a angewandt werden, wobei man $\psi_\sigma(x)=0$ zu denken hat für negative x.

Zehntes Kapitel.

Die Padésche Tafel.

§ 73. Begriff der Padéschen Tafel.

I. Sei

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots. \tag{1}$$

eine Potenzreihe, deren konstantes Glied nicht verschwindet, also

$$c_0 \neq 0. \tag{2}$$

Ob der Konvergenzradius von Null verschieden ist oder nicht, ist gleichgültig, da wir vorläufig wieder nur die formalen Gesetze ins Auge fassen. Sind μ, ν zwei beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots$, so wollen wir eine rationale Funktion

$$\frac{U_{\mu,\nu}(x)}{V_{\mu,\nu}(x)} \tag{3}$$

herstellen, deren Zähler höchstens vom ν^{ten} und deren Nenner höchstens vom μ^{ten} Grad ist, und derart, daß aus der formal gebildeten Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) V_{\mu,\nu}(x) - U_{\mu,\nu}(x) \tag{4}$$

die Potenzen von x bis zur $(\mu+\nu)^{\text{ten}}$ einschließlich herausfallen. Setzen wir zu dem Zweck

$$U_{\mu,\nu}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu \tag{5}$$

$$V_{\mu,\nu}(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\mu x^\mu, \tag{6}$$

so ergeben sich zur Berechnung der unbekannten Koeffizienten α_i, β_i die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$(7)\qquad \begin{cases} c_0\beta_0 = \alpha_0 \\ c_1\beta_0 + c_0\beta_1 = \alpha_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_\nu\beta_0 + c_{\nu-1}\beta_1 + \cdots + c_{\nu-\mu}\beta_\mu = \alpha_\nu \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} c_{\nu+1}\beta_0 + c_\nu\beta_1 + \cdots + c_{\nu-\mu+1}\beta_\mu = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{\nu+\mu}\beta_0 + c_{\nu+\mu-1}\beta_1 + \cdots + c_\nu\beta_\mu = 0, \end{cases}$$

wobei die etwa auftretenden c mit negativem Index durch Null zu ersetzen sind; für $\mu = 0$ fällt das Gleichungssystem (8) weg. Hieraus ersieht man, daß unser Problem stets lösbar ist; denn das homogene Gleichungssystem (8) läßt sich, weil es eine Gleichung weniger enthält als Unbekannte, stets befriedigen, ohne daß alle β_i verschwinden; sodann findet man aus (7) die α_i. Und zwar ist (von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen) im allgemeinen bloß eine Lösung vorhanden; nur wenn die μ-reihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} c_{\nu+1} & c_\nu & \cdots\cdots & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+2} & c_{\nu+1} & \cdots\cdots & c_{\nu-\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \cdots & c_\nu \end{matrix} \right\|$$

alle verschwinden, gibt es mehrere Lösungen. Aber selbst dann zeigt sich, daß die Funktion (3) trotzdem eindeutig ist (*Frobenius* **1**, *Padé* **1**). Denn ist $\frac{U^0(x)}{V^0(x)}$ eine zweite Lösung, so beginnen die Potenzreihen für

$$\mathfrak{P}(x)V_{\mu,\nu}(x) - U_{\mu,\nu}(x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}(x)V^0(x) - U^0(x)$$

beide erst mit der Potenz $x^{\mu+\nu+1}$ (oder einer höheren). Daher enthält auch das Polynom

$$U^0(x)V_{\mu,\nu}(x) - V^0(x)U_{\mu,\nu}(x),$$

da es identisch gleich

$$(\mathfrak{P}(x)V_{\mu,\nu}(x) - U_{\mu,\nu}(x))V^0(x) - (\mathfrak{P}(x)V^0(x) - U^0(x))V_{\mu,\nu}(x)$$

ist, keine geringeren Potenzen von x als die $(\mu+\nu+1)^{\text{te}}$. Da es aber nur höchstens vom $(\mu+\nu)^{\text{ten}}$ Grad ist, so muß es identisch verschwinden; daraus folgt

$$\frac{U^0(x)}{V^0(x)} = \frac{U_{\mu,\nu}(x)}{V_{\mu,\nu}(x)}. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Wir schreiben diese nach dem Bewiesenen eindeutig bestimmte rationale Funktion jetzt in ihrer irreduzibeln Form

$$\frac{U_{\mu,\nu}(x)}{V_{\mu,\nu}(x)} = \frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}, \tag{9}$$

wobei also die Polynome $P_{\mu,\nu}(x)$ und $Q_{\mu,\nu}(x)$ keinen Teiler gemein haben, und wobei wir offenbar weiter voraussetzen dürfen, daß

$$P_{\mu,\nu}(0) = c_0, \quad Q_{\mu,\nu}(0) = 1 \tag{10}$$

ist. Man bemerke jedoch, daß die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x)\, Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x)$$

im Gegensatz zur Reihe (4) sehr wohl mit einer geringeren als der $(\mu + \nu + 1)^{\text{ten}}$ Potenz von x beginnen kann. Denn es kann eintreten, daß das Gleichungssystem (8) nur für $\beta_0 = 0$ befriedigt wird, so daß $U_{\mu,\nu}(x)$ und $V_{\mu,\nu}(x)$ den gemeinsamen Faktor x haben. Aus dem gleichen Grund läßt sich nicht immer erreichen, daß die Taylorsche Reihe der Funktion (3) bis zur Potenz $x^{\mu+\nu}$ einschließlich mit $\mathfrak{P}(x)$ übereinstimmt. Für beides diene als Beispiel:

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + x^2; \quad \mu = \nu = 1.$$

Hier findet man nämlich:

$$\beta_0 = 0, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1 = \text{beliebig};$$

also, indem man etwa $\beta_1 = 1$ wählt:

$$U_{1,1} = x, \; V_{1,1} = x; \quad P_{1,1} = 1, \; Q_{1,1} = 1.$$

Daher ist zwar $\mathfrak{P} V_{1,1} - U_{1,1} = x^3$; aber der Ausdruck $\mathfrak{P} Q_{1,1} - P_{1,1} = x^2$ enthält schon die zweite, nicht erst die dritte Potenz von x. Und die Entwicklung von $\frac{U_{1,1}}{V_{1,1}}$ nach Potenzen von x stimmt mit $\mathfrak{P}$ nur bis zur ersten, nicht bis zur zweiten Potenz von x überein.

Wegen (9) können wir setzen

$$U_{\mu,\nu}(x) = P_{\mu,\nu}(x)\, x^\lambda (g_0 + g_1 x + \cdots + g_r x^r)$$

$$V_{\mu,\nu}(x) = Q_{\mu,\nu}(x)\, x^\lambda (g_0 + g_1 x + \cdots + g_r x^r),$$

wobei $\lambda \geqq 0$, $g_0 \neq 0$, $r \geqq 0$ ist. Daher werden aus der formal gebildeten Potenzreihe

$$(\mathfrak{P}(x)\, Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x))\, x^\lambda (g_0 + g_1 x + \cdots + g_r x^r)$$

die Potenzen von x bis zur $(\mu + \nu)^{\text{ten}}$ einschließlich herausfallen. Das gleiche ist dann wegen $g_0 \neq 0$ auch bei der Reihe

$$(\mathfrak{P}(x)\, Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x))\, x^{\lambda}$$

der Fall. Dabei ist $x^{\lambda} P_{\mu,\nu}(x)$ höchstens vom Grad $\nu - r$, also höchstens vom Grad ν; ebenso $x^{\lambda} Q_{\mu,\nu}(x)$ höchstens vom Grad μ. Diese Resultate fassen wir zusammen in

Satz 1. *Zu jeder Potenzreihe* $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ $(c_0 \neq 0)$ *und zu jedem Wertepaar* (μ, ν) *der Reihe* $0, 1, 2, \ldots$ *gibt es ein und nur ein Paar von teilerfremden Polynomen* $P_{\mu,\nu}(x)$, $Q_{\mu,\nu}(x)$ *derart, daß* $P_{\mu,\nu}(0) = c_0$, $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$ *ist, und daß eine Potenz* x^{λ} *existiert* $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$, *für welche* $x^{\lambda} P_{\mu,\nu}(x)$ *höchstens vom* ν^{ten}, $x^{\lambda} Q_{\mu,\nu}(x)$ *höchstens vom* μ^{ten} *Grad ist, während gleichzeitig aus der formal gebildeten Potenzreihe*

$$x^{\lambda}(\mathfrak{P}(x)\, Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x))$$

die Potenzen von x *bis zur* $(\mu + \nu)^{\text{ten}}$ *einschließlich herausfallen.* (*Padé* 1).

II. Wir konstruieren jetzt eine Tafel mit doppeltem Eingang, deren Zeilen und Kolonnen wir der Reihe nach mit $0, 1, 2, \ldots$ numerieren; das Feld, welches der Zeile mit der Nummer μ und der Kolonne mit der Nummer ν angehört, bezeichnen wir mit $[\mu, \nu]$. Wir schreiben dann in jedes Feld $[\mu, \nu]$ den Bruch $\frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}$. Die so konstruierte Tafel von rationalen Funktionen nennen wir die zur Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ gehörige „Padésche Tafel". Die Funktionen $\frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}$ sollen „Tafelbrüche" heißen, und wir werden speziell vom „Tafelbruch des Feldes $[\mu, \nu]$" reden.

Die erste Zeile der Padéschen Tafel (die Zeile mit der Nummer Null) kann in jedem Fall ohne weiteres hingeschrieben werden; sie ist folgende:

$$\frac{c_0}{1}, \quad \frac{c_0 + c_1 x}{1}, \quad \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2}{1}, \quad \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{1}, \ldots.$$

Dagegen ist die Berechnung der anderen Tafelbrüche, wenn auch ohne prinzipielle Schwierigkeit, in der Praxis doch meistens sehr langwierig. Wir geben umstehend für zwei Beispiele den Anfang der zugehörigen Padéschen Tafel. Warum bei der zweiten Tafel einige Linien etwas dünner gehalten sind, wird im nächsten Paragraphen auseinandergesetzt werden.

Erstes Beispiel: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$\frac{1}{1}$	$\frac{1+x}{1}$	$\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}}{1}$	$\frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}}{1}$
$\frac{1}{1-x}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$	$\frac{1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{3}x}$	$\frac{1+\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{1}{4}x}$
$\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x}{1-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}$	$\frac{1+\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{10}\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}\frac{x^2}{2!}}$
$\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}}$	$\frac{1+\frac{1}{4}x}{1-\frac{3}{4}x+\frac{2}{4}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}$	$\frac{1+\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{3}{5}x+\frac{3}{10}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{10}\frac{x^3}{3!}}$	$\frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$
$\frac{1}{1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}}$	$\frac{1+\frac{1}{5}x}{1-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{2}{5}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{5}\frac{x^4}{4!}}$	$\frac{1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{15}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{2}{3}x+\frac{2}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{5}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{15}\frac{x^4}{4!}}$	$\frac{1+\frac{3}{7}x+\frac{1}{7}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{35}\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{4}{7}x+\frac{2}{7}\frac{x^2}{2!}-\frac{4}{35}\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{35}\frac{x^4}{4!}}$

Zweites Beispiel: $\frac{1}{2}(1+e^x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{4!} + \cdots$

$\frac{1}{1}$	$\dfrac{1+\frac{1}{2}x}{1}$	$\dfrac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}}{1}$	$\dfrac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3!}}{1}$
$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}$	$\dfrac{1+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{3}x}$	$\dfrac{1+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{8}\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{1}{4}x}$
$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x}$	$\dfrac{1+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\frac{x^2}{2!}}$	$\dfrac{1+\frac{1}{10}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}{1-\frac{2}{5}x+\frac{1}{10}\frac{x^2}{2!}}$
$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$
$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$	$\dfrac{1+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{5}\frac{x^2}{2!}-\frac{1}{20}\frac{x^3}{3!}}$

§ 74. Normale und anormale Tafel.

I. In der Padéschen Tafel heißt das Feld $[\mu, \nu]$ normal, wenn der Tafelbruch dieses Feldes keinem andern Feld mehr angehört; der Tafelbruch selbst heißt dann ebenfalls normal. Andernfalls heißen das Feld $[\mu, \nu]$ und der zugehörige Tafelbruch anormal.

Wir untersuchen jetzt, welchen Feldern ein und derselbe Tafelbruch angehören kann. Sei wieder

$$\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \qquad (c_0 \neq 0) \tag{1}$$

irgendeine Potenzreihe, und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \tag{2}$$

ein zugehöriger Tafelbruch in irreduzibler Form, und

$$P(0) = c_0, \quad Q(0) = 1.$$

$P(x)$ sei genau vom p^{ten}, $Q(x)$ genau vom q^{ten} Grad, und die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x)\, Q(x) - P(x) \tag{3}$$

beginne genau mit der Potenz x^k. Falls (3) identisch verschwindet, setzen wir $k = \infty$. Nach Satz 1 wird der Bruch (2) dann und nur dann dem Feld $[\mu, \nu]$ angehören, wenn eine ganze Zahl $\lambda \geqq 0$ existiert derart, daß

$$\lambda + p \leqq \nu, \quad \lambda + q \leqq \mu, \quad \lambda + k \geqq \mu + \nu + 1 \tag{4}$$

ist.[1]) Diese Ungleichungen sind also nach $\lambda\,(\geqq 0)$, μ, ν aufzulösen. Zunächst erhält man

$$\lambda + k \geqq \mu + \nu + 1 \geqq \lambda + q + \lambda + p + 1,$$

so daß gewiß $k \geqq p + q + 1$ sein muß, damit überhaupt eine Lösung von (4) existiert.[2]) Setzen wir demgemäß

$$k = p + q + 1 + r,$$

1) Hier kommt zum erstenmal die Voraussetzung $c_0 \neq 0$ zur Geltung. Denn in (4) bedeutet die Zahl $\lambda + p$ den Grad von $x^\lambda P(x)$. Wenn aber $c_0 = 0$ wäre, so könnte $P(x)$ identisch verschwinden, also den Grad $p = 0$ haben; $x^\lambda P(x)$ hätte dann nicht den Grad $\lambda + p = \lambda$, sondern würde ebenfalls identisch verschwinden, hätte also den Grad 0.

2) Wenn also $k < p + q + 1$, so ist (2) überhaupt kein Tafelbruch.

so muß $r \geqq 0$ sein, und die Forderungen (4) lauten jetzt:

$$(5) \qquad \lambda + p \leqq \nu, \quad \lambda + q \leqq \mu, \quad \lambda + p + q + r \geqq \mu + \nu.$$

Hieraus folgt

$$\lambda + p + q + r \geqq \mu + \nu \geqq \begin{cases} \lambda + q + \nu \\ \mu + \lambda + p, \end{cases}$$

also auch

$$(6) \qquad p + r \geqq \nu, \quad q + r \geqq \mu.$$

Wegen (5) und (6) können für ν nur die Werte $p, p+1, \ldots p+r$, und für μ nur die Werte $q, q+1, \ldots q+r$ in Betracht kommen. Der Bruch (2) kann also höchstens den $(r+1)^2$ Feldern

$$[q + r_1, \quad p + r_2] \qquad (r_1, r_2 = 0, 1, \ldots r)$$

als Tafelbruch angehören. All diesen gehört er aber auch wirklich an. Um das zu erkennen, brauchen wir bloß zu beweisen, daß für $\mu = q + r_1$, $\nu = p + r_2$ den Ungleichungen (5) durch eine ganze Zahl $\lambda \geqq 0$ genügt werden kann. Man sieht aber ohne weiteres, daß das in der Tat der Fall ist, indem man für λ die kleinste der Zahlen r_1, r_2 wählt. Somit ergibt sich

Satz 2. *In der zu einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ gehörigen Padéschen Tafel bilden die Felder, in denen ein und derselbe (irreduzible) Tafelbruch $\frac{P(x)}{Q(x)}$ auftritt, ein Quadrat. Ist $P(x)$ vom p^{ten}, $Q(x)$ vom q^{ten} Grad, und beginnt die Potenzreihe $\mathfrak{P}Q - P$ mit der Potenz $x^{p+q+r+1}$, so muß $r \geqq 0$ sein, und das Quadrat umfaßt die $(r+1)^2$ Felder:*

$$[q + r_1, p + r_2] \quad (r_1, r_2 = 0, 1, \ldots r).$$

Dabei kann auch $r = \infty$ sein, was dann bedeutet, daß $\mathfrak{P}Q - P$ identisch verschwindet. (*Padé* **1**, **4**.)

Bei einem normalen Tafelbruch ist, da er nur einem einzigen Felde angehört, $r = 0$. Aus Satz 2 folgt dann speziell

Satz 3. *In der zur Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ gehörigen Padéschen Tafel ist der (irreduzible) Tafelbruch $\frac{P_{q,p}(x)}{Q_{q,p}(x)}$ des Feldes $[q, p]$ dann und nur dann normal, wenn $P_{q,p}(x)$ und $Q_{q,p}(x)$ genau vom p^{ten} bzw. q^{ten} Grad sind (nicht von geringerem), und wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}Q_{q,p} - P_{q,p}$ genau mit der Potenz x^{p+q+1} beginnt (nicht mit einer höheren).*

Bei dem ersten Beispiel auf S. 422 kommen anormale Tafelbrüche nicht vor, wenigstens soweit die Tafel dort angegeben ist. Wir werden aber im nächsten Paragraphen sehen, daß für die Funktion e^x tatsächlich alle Tafelbrüche normal sind. Dagegen treten bei dem zweiten Bei-

spiel auch anormale Tafelbrüche auf. Um die Quadrate mit gleichen Tafelbrüchen besser hervortreten zu lassen, sind die Linien, welche die Felder eines solchen Quadrates trennen, etwas dünner gezeichnet.

II. Wir suchen jetzt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß das Feld $[\mu, \nu]$ normal ist. Zu dem Zweck setzen wir

$$(7)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} c_\nu & c_{\nu-1} & \cdots & c_{\nu-\mu} \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \cdots & c_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \cdots & c_\nu \end{vmatrix} = \varDelta_{\mu,\nu} \quad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ c_i = 0 \text{ für } i < 0 \end{pmatrix} \\ \varDelta_{-1,\nu} = 1. \end{cases}$$

Wenn dann $\varDelta_{\mu,\nu} = 0$, so sind die Gleichungen (7), (8) von § 73 derart lösbar, daß $\alpha_\nu = 0$ ist. Der Bruch $\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} = \frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ gehört daher auch dem Feld $[\mu, \nu - 1]$ an, ist also nicht normal.[1])

Wenn $\varDelta_{\mu-1,\nu+1} = 0$, was nur für $\mu > 0$ möglich ist, so läßt das System (8) von § 73 die Lösung $\beta_\mu = 0$ zu. Der Bruch $\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} = \frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ gehört also auch dem Feld $[\mu - 1, \nu]$ an, ist daher wieder nicht normal.

Wenn $\varDelta_{\mu-1,\nu} = 0$, was nur für $\mu > 0$, $\nu > 0$ sein kann, so läßt das System (7), (8) von § 73 die Lösung $\beta_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ zu, so daß $U_{\mu,\nu}$, $V_{\mu,\nu}$ den Faktor x gemein haben. Der Bruch $\frac{\frac{1}{x} U_{\mu,\nu}}{\frac{1}{x} V_{\mu,\nu}}$ gehört dann auch dem Feld $[\mu - 1, \nu - 1]$ an, ist also wieder nicht normal.

Endlich wenn $\varDelta_{\mu,\nu+1} = 0$, so ist das System (8) von § 73 derart lösbar, daß zugleich

$$c_{\nu+\mu+1}\beta_0 + c_{\nu+\mu}\beta_1 + \cdots + c_{\nu+1}\beta_\mu = 0$$

wird, so daß aus der Potenzreihe

$$(8)\qquad \mathfrak{P}(x)\, V_{\mu,\nu}(x) - U_{\mu,\nu}(x)$$

auch die $(\mu + \nu + 1)^{\text{te}}$ Potenz herausfällt. Der Bruch $\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} = \frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ gehört also auch den Feldern $[\mu, \nu + 1]$ und $[\mu + 1, \nu]$ an, ist daher wieder nicht normal.

In allen vier Fällen kann übrigens auch auf Grund von Satz 3 der Bruch $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ als nicht normal erkannt werden.

1) Für $\nu = 0$ hat das keinen Sinn. Aber $\varDelta_{\mu,0} = 0$ würde $c_0 = 0$ besagen, was wir ausgeschlossen haben.

Wenn dagegen die vier Determinanten

$$\varDelta_{\mu,\nu}, \quad \varDelta_{\mu-1,\nu+1}, \quad \varDelta_{\mu-1,\nu}, \quad \varDelta_{\mu,\nu+1}$$

von Null verschieden sind, so läßt sich zeigen, daß das Feld $[\mu, \nu]$ normal ist. Denn zunächst läßt das Gleichungssystem (7), (8) von § 73 dann nur eine Lösung zu (natürlich von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen), und zwar wird:

$$\alpha_\nu \neq 0 \text{ wegen } \varDelta_{\mu,\nu} \neq 0,$$

$$\beta_\mu \neq 0 \text{ wegen } \varDelta_{\mu-1,\nu+1} \neq 0,$$

$$\beta_0 \neq 0 \text{ wegen } \varDelta_{\mu-1,\nu} \neq 0,$$

$$c_{\nu+\mu+1}\beta_0 + c_{\nu+\mu}\beta_1 + \cdots + c_{\nu+1}\beta_\mu \neq 0 \text{ wegen } \varDelta_{\mu,\nu+1} \neq 0.$$

Speziell wegen dieser letzten Ungleichung wird die Potenzreihe (8) die Potenz $x^{\mu+\nu+1}$ wirklich enthalten. Wegen $\alpha_\nu \neq 0$ ist der Zähler des Bruches

$$\frac{U_{\mu,\nu}(x)}{V_{\mu,\nu}(x)} \tag{9}$$

genau vom ν^{ten} Grad, ebenso wegen $\beta_\mu \neq 0$ der Nenner genau vom μ^{ten} Grad. Der Tafelbruch (9) wird daher nach Satz 3 normal sein, sobald seine Irreduzibilität feststeht. Nun haben wegen $\beta_0 \neq 0$ Zähler und Nenner gewiß nicht den Faktor x gemein. Sie haben aber auch keinen andern Faktor gemein, weil man sonst durch Wegheben dieses Faktors einen zweiten Bruch $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$, also eine zweite Lösung des Gleichungssystems (7), (8) von § 73 erhalten würde, während es doch nur eine gibt. Damit ist nun folgendes bewiesen:

Satz 4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß in der zur Potenzreihe $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ gehörigen Padéschen Tafel das Feld $[\mu, \nu]$ normal ist, besteht darin, daß die vier Determinanten*

$$\varDelta_{\mu,\nu}, \quad \varDelta_{\mu-1,\nu+1}, \quad \varDelta_{\mu-1,\nu}, \quad \varDelta_{\mu,\nu+1} \qquad (\textit{siehe Formel } (7))$$

von Null verschieden sind. (*Padé* **1.**)

Eine Potenzreihe heißt normal, wenn ihre Tafelbrüche sämtlich normal, also alle voneinander verschieden sind. Die Padésche Tafel heißt dann ebenfalls normal. Aus Satz 4 folgt hiernach sogleich

Satz 5. *Die Potenzreihe $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ ist dann und nur dann normal, wenn die Determinanten $\varDelta_{\mu,\nu}$ (siehe Formel (7)) alle von Null verschieden sind.*

Insbesondere wird daher bei einer normalen Potenzreihe auch

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_\nu \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix} = \pm \Delta_{\nu-1,\nu} \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_\nu \\ c_3 & c_4 & \dots & c_{\nu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix} = \pm \Delta_{\nu-2,\nu} \neq 0$$

sein. Eine normale Potenzreihe $1 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ ist also nach Satz 5, Kap. VIII zugleich seminormal.

III. Im Anschluß hieran beweisen wir noch

Satz 6. *Ist* $\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots$ *eine Potenzreihe, und* $\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}$ *der irreduzible Tafelbruch des Feldes* $[\mu, \nu]$, *so gelten, wenn die Determinante* $\Delta_{\mu-1,\nu}$ *(Formel (7)) von Null verschieden ist, die Formeln*

$$Q_{\mu,\nu} = \frac{1}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \begin{vmatrix} 1 & x & \dots & x^\mu \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \dots & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+2} & c_{\nu+1} & \dots & c_{\nu-\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \dots & c_\nu \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{P}Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} = \frac{1}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \begin{vmatrix} c_{\nu+\mu+\lambda} & c_{\nu+\mu+\lambda-1} & \dots & c_{\nu+\lambda} \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \dots & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+2} & c_{\nu+1} & \dots & c_{\nu-\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \dots & c_\nu \end{vmatrix} x^{\nu+\mu+\lambda}.$$

Wegen $\Delta_{\mu-1,\nu} \neq 0$ haben nämlich die Gleichungen (8) des § 73 nur eine Lösung, und zwar ist $\beta_0 \neq 0$. Man erhält daher den Tafelbruch $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}}$ sogleich in irreduzibler Form, und wenn man $\beta_0 = 1$ setzt, wird $V_{\mu,\nu} = Q_{\mu,\nu}$. Durch Elimination der übrigen β_i aus den Gleichungen (6) und (8) des § 73 erhält man dann

$$\begin{vmatrix} 1 - Q_{\mu,\nu} & x & \dots & x^\mu \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \dots & c_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \dots & c_\nu \end{vmatrix} = 0,$$

woraus sogleich der behauptete Ausdruck für $Q_{\mu,\nu}$ hervorgeht. Durch Multiplikation von $Q_{\mu,\nu}$ mit $\mathfrak{P} = \Sigma c_\lambda x^\lambda$ ergibt sich dann weiter:

$$\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu} = \frac{1}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^\lambda & \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^{\lambda+1} & \dots & \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} c_\lambda x^{\lambda+\mu} \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \dots & c_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \dots & c_\nu \end{vmatrix}.$$

Hieraus muß aber $\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}$ hervorgehen, indem man die Potenzen von x nur von der $(\nu + \mu + 1)^{\text{ten}}$ an beibehält. Dadurch geht die erste Zeile dieser Determinante über in

$$\sum_{\lambda=\mu+\nu+1}^{\infty} c_\lambda x^\lambda \quad \sum_{\lambda=\mu+\nu}^{\infty} c_\lambda x^{\lambda+1} \dots \sum_{\lambda=\nu+1}^{\infty} c_\lambda x^{\lambda+\mu}$$

oder, was dasselbe ist, in

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\nu+\mu+\lambda} x^{\nu+\mu+\lambda} \quad \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\nu+\mu+\lambda-1} x^{\nu+\mu+\lambda} \dots \sum_{\lambda=1}^{\infty} c_{\nu+\lambda} x^{\nu+\mu+\lambda}.$$

Es kommt somit:

$$\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} = \frac{1}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \begin{vmatrix} \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} c_{\nu+\mu+\lambda} x^{\nu+\mu+\lambda} & \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} c_{\nu+\mu+\lambda-1} x^{\nu+\mu+\lambda} & \dots & \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} c_{\nu+\lambda} x^{\nu+\mu+\lambda} \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \dots & c_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \dots & c_\nu \end{vmatrix},$$

was aber mit der in Satz 6 angegebenen Formel offenbar gleichbedeutend ist.

§ 75. Die Exponentialfunktion.

I. Wir wollen speziell für die Funktion e^x die ganze Padésche Tafel konstruieren. Natürlich läßt sich die allgemeine Methode des § 73 anwenden; doch führt der folgende von Padé 1 eingeschlagene Weg rascher zum Ziel. Ist $F(t)$ ein Polynom vom m^{ten} Grad, so erhält man durch partielle Integration:

$$\int_0^1 e^{tx} F(t)\, dt = \frac{F(1)\, e^x}{x} - \frac{F(0)}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 e^{tx} F'(t)\, dt,$$

und daher durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$\int_0^1 e^{tx} F(t)\,dt = e^x\left(\frac{F(1)}{x} - \frac{F'(1)}{x^2} + \cdots + (-1)^m \frac{F^{(m)}(1)}{x^{m+1}}\right)$$
$$-\left(\frac{F(0)}{x} - \frac{F'(0)}{x^2} + \cdots + (-1)^m \frac{F^{(m)}(0)}{x^{m+1}}\right).$$

Also, indem man mit $(-1)^m x^{m+1}$ multipliziert:

$$e^x(F^{(m)}(1) - F^{(m-1)}(1)x + \cdots + (-1)^m F(1)x^m)$$
$$-(F^{(m)}(0) - F^{(m-1)}(0)x + \cdots + (-1)^m F(0)x^m)$$
$$= (-1)^m x^{m+1} \int_0^1 e^{tx} F(t)\,dt.$$

Setzt man hier speziell

$$F(t) = t^\mu (1-t)^\nu, \tag{1}$$

also $m = \mu + \nu$, so kommt, weil $t = 0$ eine μ-fache, $t = 1$ eine ν-fache Wurzel von $F(t)$ ist:

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \ldots F^{(\mu-1)}(0) = 0, \quad F^{(\mu)}(0) \neq 0,$$
$$F(1) = 0, \quad F'(1) = 0, \ldots F^{(\nu-1)}(1) = 0, \quad F^{(\nu)}(1) \neq 0,$$

so daß die obige Formel übergeht in:

$$\left\{\begin{aligned} & e^x(F^{(\mu+\nu)}(1) - F^{(\mu+\nu-1)}(1)x + \cdots + (-1)^\mu F^{(\nu)}(1)x^\mu) \\ & -(F^{(\mu+\nu)}(0) - F^{(\mu+\nu-1)}(0)x + \cdots + (-1)^\nu F^{(\mu)}(0)x^\nu) \\ & \qquad = (-1)^{\mu+\nu} x^{\mu+\nu+1} \int_0^1 e^{tx} F(t)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Diese Formel zeigt nun, da die rechte Seite, nach Potenzen von x entwickelt, erst mit der Potenz $x^{\mu+\nu+1}$ beginnt, daß der Tafelbruch des Feldes $[\mu, \nu]$ der folgende ist:

$$\frac{U_{\mu,\nu}(x)}{V_{\mu,\nu}(x)} = \frac{F^{(\mu+\nu)}(0) - F^{(\mu+\nu-1)}(0)x + \cdots + (-1)^\nu F^{(\mu)}(0)x^\nu}{F^{(\mu+\nu)}(1) - F^{(\mu+\nu-1)}(1)x + \cdots + (-1)^\mu F^{(\nu)}(1)x^\mu}. \tag{3}$$

Nun erhält man aus (1) durch Differentiation:

$$F^{(n)}(t) = \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{n}{\lambda}\binom{\mu}{\lambda} \lambda!\, t^{\mu-\lambda} \binom{\nu}{n-\lambda} (n-\lambda)!\,(1-t)^{\nu-n+\lambda}(-1)^{n-\lambda};$$

also für $n \geqq \mu$:

$$F^{(n)}(0) = \binom{n}{\mu}\mu!\binom{\nu}{n-\mu}(n-\mu)!\,(-1)^{n-\mu} = (-1)^{n-\mu} n!\binom{\nu}{n-\mu},$$

und für $n \geqq \nu$:

$$F^{(n)}(1) = \binom{n}{n-\nu}\binom{\mu}{n-\nu}(n-\nu)!\,\nu!\,(-1)^{\nu} = (-1)^{\nu} n!\binom{\mu}{n-\nu}\cdot$$

Der Tafelbruch (3) geht daher in folgenden über:

$$(4)\quad \frac{(\mu+\nu)! + (\mu+\nu-1)!\binom{\nu}{1}x + (\mu+\nu-2)!\binom{\nu}{2}x^2 + \cdots + \mu!\binom{\nu}{\nu}x^{\nu}}{(\mu+\nu)! - (\mu+\nu-1)!\binom{\mu}{1}x + (\mu+\nu-2)!\binom{\mu}{2}x^2 - \cdots + (-1)^{\mu}\nu!\binom{\mu}{\mu}x^{\mu}}.$$

Hieraus ersieht man, daß die Padésche Tafel normal ist. Denn andernfalls müßte, da gleiche Tafelbrüche nach Satz 2 stets in Quadrate verteilt sind, einmal $\frac{U_{\mu,\nu}}{V_{\mu,\nu}} = \frac{U_{\mu+1,\nu+1}}{V_{\mu+1,\nu+1}}$ sein; also

$$U_{\mu,\nu}(x)\,V_{\mu+1,\nu+1}(x) = V_{\mu,\nu}(x)\,U_{\mu+1,\nu+1}(x)$$

oder, indem man die Werte aus (4) einsetzt:

$$[(\mu+\nu)! + \cdots + \mu!x^{\nu}][(\mu+\nu+2)! - \cdots + (-1)^{\mu+1}(\nu+1)!x^{\mu+1}]$$
$$= [(\mu+\nu)! - \cdots + (-1)^{\mu}\nu!x^{\mu}][(\mu+\nu+2)! + \cdots + (\mu+1)!x^{\nu+1}].$$

Das ist aber nicht der Fall, wie die Vergleichung der Koeffizienten von $x^{\mu+\nu+1}$ auf beiden Seiten beweist.

Da demnach die Tafel normal ist, muß nach Satz 3 der Bruch (4) bereits irreduzibel sein. Dividiert man daher in (4) noch Zähler und Nenner durch $(\mu+\nu)!$, so erhält man für den Zähler $P_{\mu,\nu}$ und den Nenner $Q_{\mu,\nu}$ des irreduziblen Feldes $[\mu, \nu]$ die folgenden Ausdrücke:

$$(5)\quad \begin{cases} P_{\mu,\nu}(x) = 1 + \frac{\nu}{\mu+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots \\ \qquad + \frac{\nu(\nu-1)\cdots 2\cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\cdots(\mu+1)}\frac{x^{\nu}}{\nu!}, \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} Q_{\mu,\nu}(x) = 1 - \frac{\mu}{\mu+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\frac{x^2}{2!} - \cdots \\ \qquad + (-1)^{\mu}\frac{\mu(\mu-1)\cdots 2\cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\cdots(\nu+1)}\frac{x^{\mu}}{\mu!}. \end{cases}$$

Nach diesen Formeln kann das erste Beispiel auf S. 422 sofort hingeschrieben werden. Aus (5) und (6) entnimmt man unmittelbar noch die folgende Identität:

$$Q_{\mu,\nu}(x) = P_{\nu,\mu}(-x), \tag{7}$$

die sich übrigens auch a priori leicht einsehen läßt.

II. Wir geben hier von diesen Formeln gleich eine Anwendung, indem wir folgenden Satz beweisen:

Satz 7. *Jede unbegrenzte Serie von verschiedenen Tafelbrüchen der Funktion e^x konvergiert für alle Werte von x gegen e^x.*

Es ist zu beweisen, daß

$$\lim_{\mu+\nu=\infty} \frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)} = e^x \tag{8}$$

ist, wobei lediglich die Summe $\mu + \nu$ nach irgend einem Gesetz ins Unendliche wachsen soll, während über μ und ν selbst nichts Spezielles verlangt wird. Setzt man zunächst $\nu > 0$ voraus, so läßt sich Formel (5) folgendermaßen schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} P_{\mu,\nu}(x) &= 1 + \frac{\nu x}{\mu+\nu} \\ &+ \sum_{p=2}^{\nu} \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\nu}\right)}{\left(1-\frac{1}{\mu+\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu+\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\mu+\nu}\right)} \frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

wobei für $\nu = 1$ die Summe einfach wegfällt. Nun ist aber für $p = 2, 3, \ldots \nu$:

$$1 \geqq \frac{1 - \frac{p-1}{\nu}}{1 - \frac{p-1}{\mu+\nu}} > 1 - \frac{p-1}{\nu};$$

daher auch, wenn man $p = 2, 3, \cdots p$ setzt und dann multipliziert:

$$1 \geqq \frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\nu}\right)}{\left(1-\frac{1}{\mu+\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu+\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\mu+\nu}\right)} > \left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\nu}\right)$$

$$\geqq 1 - \left(\frac{1}{\nu} + \frac{2}{\nu} + \cdots + \frac{p-1}{\nu}\right)^{1)} = 1 - \frac{p(p-1)}{2\nu}.$$

---

1) Für $0 < \varepsilon_\lambda < 1$ ist nämlich

$$(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)\cdots(1-\varepsilon_p) > 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_p).$$

Denn für $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_p > 1$ ist das selbstverständlich; für $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_p < 1$ sieht man es sofort durch den Schluß von p auf $p+1$ ein.

Für $p = 2, 3, \cdots \nu$ kann man also

$$\frac{\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\nu}\right)}{\left(1-\frac{1}{\mu+\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\mu+\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{\mu+\nu}\right)} = 1 - \vartheta_{p-1}\frac{p(p-1)}{2\nu} \quad (0 \leq \vartheta_{p-1} < 1)$$

setzen, wodurch (9) übergeht in:

$$P_{\mu,\nu}(x) = 1 + \frac{\nu x}{\mu+\nu} + \sum_{p=2}^{\nu}\left(1 - \vartheta_{p-1}\frac{p(p-1)}{2\nu}\right)\frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\nu}\frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p - \sum_{p=2}^{\nu}\vartheta_{p-1}\frac{p(p-1)}{p!\,2\nu}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p$$

$$= \sum_{p=0}^{\nu}\frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p - \frac{\nu x^2}{2(\mu+\nu)^2}\sum_{p=2}^{\nu}\frac{\vartheta_{p-1}}{(p-2)!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^{p-2},$$

wobei die zweite Summe für $\nu = 1$ einfach wieder wegfällt. Daraus folgt dann weiter:

$$(10)\quad \begin{cases} P_{\mu,\nu}(x) - e^{\frac{\nu x}{\mu+\nu}} \\ = -\dfrac{\nu x^2}{2(\mu+\nu)^2}\displaystyle\sum_{p=2}^{\nu}\frac{\vartheta_{p-1}}{(p-2)!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^{p-2} - \sum_{p=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p. \end{cases}$$

Nun ist aber identisch

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p = \frac{\nu x^2}{2(\mu+\nu)^2}\,\frac{2\nu}{(p-1)p}\,\frac{1}{(p-2)!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^{p-2},$$

also für $p \geqq \nu + 1$:

$$\frac{1}{p!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^p = \frac{\nu x^2}{2(\mu+\nu)^2}\,\frac{\vartheta_{p-1}}{(p-2)!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^{p-2} \qquad (0 < \vartheta_{p-1} \leqq 1).$$

Setzt man dies in (10) ein, so kommt:

$$P_{\mu,\nu}(x) - e^{\frac{\nu x}{\mu+\nu}} = -\frac{\nu x^2}{2(\mu+\nu)^2}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{\vartheta_{p-1}}{(p-2)!}\left(\frac{\nu x}{\mu+\nu}\right)^{p-2}.$$

Hier ist aber die rechte Seite absolut nicht größer als

$$\frac{\nu|x|^2}{2(\mu+\nu)^2}\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{(p-2)!}|x|^{p-2} = \frac{\nu|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)^2} \leqq \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)},$$

so daß man erhält:

$$(11)\qquad \left| P_{\mu,\nu}(x) - e^{\frac{\nu x}{\mu+\nu}} \right| \leq \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)}.$$

Diese zunächst nur für $\nu > 0$ hergeleitete Formel gilt aber auch für $\nu = 0$, weil dann die linke Seite identisch verschwindet.

Vertauscht man in (11) μ mit ν und ersetzt x durch $-x$, so kommt mit Rücksicht auf (7):

$$(12)\qquad \left| Q_{\mu,\nu}(x) - e^{\frac{-\mu x}{\mu+\nu}} \right| \leq \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)}.$$

Aus (11) und (12) erhält man sogleich:

$$(13)\qquad \lim_{\mu+\nu=\infty} \left(P_{\mu,\nu}(x) - e^{\frac{\nu x}{\mu+\nu}} \right) = 0,$$

$$(14)\qquad \lim_{\mu+\nu=\infty} \left(Q_{\mu,\nu}(x) - e^{\frac{-\mu x}{\mu+\nu}} \right) = 0.$$

Multipliziert man Gleichung (14) mit e^x und subtrahiert sie dann von (13), so kommt

$$(15)\qquad \lim_{\mu+\nu=\infty} (e^x Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x)) = 0,$$

was sich übrigens auch aus der mit (2) gleichbedeutenden Formel

$$e^x Q_{\mu,\nu}(x) - P_{\mu,\nu}(x) = (-1)^\mu \frac{x^{\mu+\nu+1}}{(\mu+\nu)!} \int_0^1 e^{tx} t^\mu (1-t)^\nu \, dt$$

ohne weiteres ergibt. Aus (12) folgt nun aber weiter:

$$|Q_{\mu,\nu}(x)| \geq \left| e^{\frac{-\mu x}{\mu+\nu}} \right| - \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)} \geq e^{\frac{-\mu |x|}{\mu+\nu}} - \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)} \geq e^{-|x|} - \frac{|x|^2 e^{|x|}}{2(\mu+\nu)}.$$

Für große Werte von $\mu + \nu$ bleibt daher $|Q_{\mu,\nu}(x)|$ bei konstantem x über einer positiven Schranke, so daß aus (15) sogleich die zu beweisende Gleichung (8) folgt.

Für den Fall, daß der Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ sich einem Grenzwert ω nähert, liefern die Formeln (13), (14) sogar noch mehr; nämlich:

$$\lim P_{\mu,\nu}(x) = e^{\frac{x}{\omega+1}}, \quad \lim Q_{\mu,\nu}(x) = e^{\frac{-\omega x}{\omega+1}} \qquad (\textit{Padé } 3),$$

woraus durch Division für diesen speziellen Fall auch wieder

$$\lim \frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)} = e^x$$

folgt.

§ 76. Die Laguerresche Differentialgleichung.

I. Es gibt noch einige andere Fälle, in denen die Padésche Tafel sich mit einem Schlage herstellen läßt. Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ genüge formal der Differentialgleichung erster Ordnung

$$L\mathfrak{P}' + M\mathfrak{P} + N = 0, \tag{1}$$

wo L, M, N Polynome in x sind, und der Akzent formale Differentiation nach x anzeigt. Der zu $\mathfrak{P}(x)$ gehörige irreduzible Tafelbruch $\frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}$ des Feldes $[\mu, \nu]$ genügt nach Satz 1 der Bedingung

$$Q_{\mu,\nu}\mathfrak{P} - P_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda+1}\mathfrak{Q}, \tag{2}$$

wo auch $\mathfrak{Q}$ eine Potenzreihe ist, und $\lambda \geqq 0$. Durch Differentiation von (2) erhält man

$$Q_{\mu,\nu}\mathfrak{P}' + Q'_{\mu,\nu}\mathfrak{P} - P'_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\mathfrak{Q}_1, \tag{3}$$

wo $\mathfrak{Q}_1$ ebenfalls eine Potenzreihe bedeutet. Eliminiert man $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ aus den Gleichungen (1), (2), (3), so erhält man:

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ 0 & Q_{\mu,\nu} & -P_{\mu,\nu} \\ Q_{\mu,\nu} & Q'_{\mu,\nu} & -P'_{\mu,\nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L & M & 0 \\ 0 & Q_{\mu,\nu} & x^{\mu+\nu-\lambda+1}\mathfrak{Q} \\ Q_{\mu,\nu} & Q'_{\mu,\nu} & x^{\mu+\nu-\lambda}\mathfrak{Q}_1 \end{vmatrix}$$

oder anders geschrieben:

$$\begin{cases} L(Q_{\mu,\nu}P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu}) + MQ_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu} + NQ^2_{\mu,\nu} \\ = x^{\mu+\nu-\lambda+1}\mathfrak{Q}\cdot(LQ'_{\mu,\nu} - MQ_{\mu,\nu}) - x^{\mu+\nu-\lambda}\mathfrak{Q}_1\cdot LQ_{\mu,\nu}. \end{cases} \tag{4}$$

Da die linke Seite dieser Gleichung ein Polynom ist, so ergibt sich

$$L(Q_{\mu,\nu}P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu}) + MQ_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu} + NQ^2_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\Theta_{\mu,\nu}, \tag{5}$$

wo auch $\Theta_{\mu,\nu}(x)$ ein Polynom; falls L den Faktor x hat, so erkennt man außerdem durch Vergleich von (4) mit (5), daß auch $\Theta_{\mu,\nu}$ diesen Faktor hat.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$LP'_{\mu,\nu} + MP_{\mu,\nu} + NQ_{\mu,\nu} = K_{\mu,\nu}, \tag{6}$$

so geht (5) über in:

$$Q_{\mu,\nu}K_{\mu,\nu} - LP_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\Theta_{\mu,\nu}. \tag{7}$$

Hieraus folgt durch Differentiation:

$$Q_{\mu,\nu}K'_{\mu,\nu} + Q'_{\mu,\nu}(K_{\mu,\nu} - LP'_{\mu,\nu} - L'P_{\mu,\nu}) - LP_{\mu,\nu}Q''_{\mu,\nu}$$
$$= x^{\mu+\nu-\lambda-1}\left[x\Theta'_{\mu,\nu} + (\mu+\nu-\lambda)\Theta_{\mu,\nu}\right],$$

oder, wenn man in der Klammer links für $K_{\mu,\nu}$ den Wert (6) einsetzt und dann zur Abkürzung

$$(8) \qquad K'_{\mu,\nu} + NQ'_{\mu,\nu} = R_{\mu,\nu}$$

setzt:

$$(9) \quad \begin{cases} R_{\mu,\nu}Q_{\mu,\nu} + (M-L')P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu} - LP_{\mu,\nu}Q''_{\mu,\nu} \\ \quad = x^{\mu+\nu-\lambda-1}\left[x\Theta'_{\mu,\nu} + (\mu+\nu-\lambda)\Theta_{\mu,\nu}\right]. \end{cases}$$

Aus (7) und (9) erhält man dann durch kreuzweise Multiplikation:

$$(Q_{\mu,\nu}K_{\mu,\nu} - LP_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu})\left[x\Theta'_{\mu,\nu} + (\mu+\nu-\lambda)\Theta_{\mu,\nu}\right]$$
$$= \left[R_{\mu,\nu}Q_{\mu,\nu} + (M-L')P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu} - LP_{\mu,\nu}Q''_{\mu,\nu}\right]x\Theta_{\mu,\nu},$$

oder nach einfacher Umordnung der Glieder und nach Division durch $P_{\mu,\nu}$:

$$(10) \quad \begin{cases} xL\Theta_{\mu,\nu}Q''_{\mu,\nu} + \left[(L'-M)x\Theta_{\mu,\nu} - xL\Theta'_{\mu,\nu} - (\mu+\nu-\lambda)L\Theta_{\mu,\nu}\right]Q'_{\mu,\nu} \\ \qquad + \dfrac{G_{\mu,\nu}}{P_{\mu,\nu}}Q_{\mu,\nu} = 0, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(11) \qquad K_{\mu,\nu}\left[x\Theta'_{\mu,\nu} + (\mu+\nu-\lambda)\Theta_{\mu,\nu}\right] - xR_{\mu,\nu}\Theta_{\mu,\nu} = G_{\mu,\nu}$$

gesetzt wurde. Da $Q_{\mu,\nu}$ und $P_{\mu,\nu}$ keinen gemeinsamen Teiler haben, so lehrt Gleichung (10), daß das Polynom $G_{\mu,\nu}$ durch $P_{\mu,\nu}$ teilbar ist. Setzt man demgemäß

$$(12) \qquad G_{\mu,\nu} = H_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu},$$

so besagt die Gleichung (10), daß $Q_{\mu,\nu}$ der folgenden linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$(13) \quad \begin{cases} xL\Theta_{\mu,\nu}Q''_{\mu,\nu} + \left[(L'-M)x\Theta_{\mu,\nu} - xL\Theta'_{\mu,\nu} - (\mu+\nu-\lambda)L\Theta_{\mu,\nu}\right]Q'_{\mu,\nu} \\ \qquad + H_{\mu,\nu}Q_{\mu,\nu} = 0, \end{cases}$$

deren Koeffizienten ganze rationale Funktionen von x sind. Wir nennen (13) die *Laguerresche Differentialgleichung*. *Laguerre* **2, 4, 7** hat sie allerdings nur für $\mu = \nu$ aufgestellt.

Setzt man in (11) für $R_{\mu,\nu}$ und $G_{\mu,\nu}$ die Werte aus (8) und (12) ein, so kommt zunächst:

$$K_{\mu,\nu}\left[x\Theta'_{\mu,\nu} + (\mu+\nu-\lambda)\Theta_{\mu,\nu}\right] - x\Theta_{\mu,\nu}(K'_{\mu,\nu} + NQ'_{\mu,\nu}) = H_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu}.$$

Wenn man hier für $K_{\mu,\nu}$ und $K'_{\mu,\nu}$ den Ausdruck (6) und seine Ableitung einsetzt, so entsteht nach ordentlicher Zusammenfassung der Glieder eine (im allgemeinen inhomogene) lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $P_{\mu,\nu}$, die in dem nachstehenden Satz explizit angegeben ist:

Satz 8. *Wenn die Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ $(c_0 \neq 0)$ *formal der Differentialgleichung genügt*

$$L\mathfrak{P}' + M\mathfrak{P} + N = 0,$$

wo L, M, N *Polynome in* x *sind, so genügen Zähler und Nenner des zu* $\mathfrak{P}(x)$ *gehörigen irreduzibeln Tafelbruches* $\frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}$ *des Feldes* $[\mu, \nu]$ *den beiden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

$$\left\{\begin{aligned} &xL\Theta_{\mu,\nu} Q''_{\mu,\nu} + [(L' - M)x\Theta_{\mu,\nu} - xL\Theta'_{\mu,\nu} - (\mu + \nu - \lambda)L\Theta_{\mu,\nu}]Q'_{\mu,\nu} \\ &\qquad + H_{\mu,\nu} Q_{\mu,\nu} = 0, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &xL\Theta_{\mu,\nu} P''_{\mu,\nu} + [(L' + M)x\Theta_{\mu,\nu} - xL\Theta'_{\mu,\nu} - (\mu + \nu - \lambda)L\Theta_{\mu,\nu}]P'_{\mu,\nu} \\ &\qquad + [H_{\mu,\nu} + xM'\Theta_{\mu,\nu} - xM\Theta'_{\mu,\nu} - (\mu + \nu - \lambda)M\Theta_{\mu,\nu}]P_{\mu,\nu} \\ &= -2xN\Theta_{\mu,\nu} Q'_{\mu,\nu} + [xN\Theta'_{\mu,\nu} - xN'\Theta_{\mu,\nu} + (\mu + \nu - \lambda)N\Theta_{\mu,\nu}]Q_{\mu,\nu} \end{aligned}\right.$$

wobei auch $\Theta_{\mu,\nu}$, $H_{\mu,\nu}$ *Polynome sind. Speziell* $\Theta_{\mu,\nu}$ *ist definiert durch die Gleichung*

$$L(Q_{\mu,\nu} P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} Q'_{\mu,\nu}) + M Q_{\mu,\nu} P_{\mu,\nu} + N Q^2_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\Theta_{\mu,\nu}$$

und hat, falls L *durch* x *teilbar ist, ebenfalls den Faktor* x. *Die Zahl* λ *hat hier die gleiche Bedeutung wie in Satz 1.*

Die Laguerresche Differentialgleichung wird illusorisch, wenn $\Theta_{\mu,\nu}$ identisch verschwindet; dann liefert sie nämlich lediglich $H_{\mu,\nu} = 0$, also keine Differentialgleichung für $Q_{\mu,\nu}$. Die Bedingung $\Theta_{\mu,\nu} = 0$ ist aber nach der Definition von $\Theta_{\mu,\nu}$ gleichbedeutend mit

$$L\frac{d}{dx}\left(\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}\right) + M\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} + N = 0,$$

woraus nach Subtraktion von (1) entsteht

$$L\frac{d}{dx}\left(\mathfrak{P} - \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}\right) + M\left(\mathfrak{P} - \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}\right) = 0.$$

Wenn $\mathfrak{P}$ keine rationale Funktion, so ist $\mathfrak{P} - \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}$ nicht identisch Null, und aus Formel (2) folgt, weil $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$ ist:

$$\mathfrak{P} - \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} = x^{\mu+\nu-\lambda+1+r}\mathfrak{P}_1,$$

wobei $r \geqq 0$ eine ganze Zahl, und $\mathfrak{P}_1$ eine Potenzreihe ist, deren konstantes Glied nicht verschwindet. Setzt man diesen Ausdruck in die vorige Gleichung ein, so kommt:

$$\frac{M}{L} = -\frac{d}{dx}\log\left(\mathfrak{P} - \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}\right) = -\frac{d}{dx}\log\left(x^{\mu+\nu-\lambda+1+r}\mathfrak{P}_1\right)$$

$$= -\frac{\mu+\nu-\lambda+1+r}{x} - \frac{\mathfrak{P}_1'}{\mathfrak{P}_1};$$

also

$$\left(\frac{x\,M}{L}\right)_{x=0} = -(\mu+\nu-\lambda+1+r).$$

Daraus folgt der

Zusatz zu Satz 8. *Wenn $\mathfrak{P}(x)$ keine rationale Funktion, und wenn der Ausdruck $\lim\limits_{x=0}\frac{x\,M}{L}$ nicht gleich einer negativen ganzen Zahl, die absolut $\geqq \mu+\nu-\lambda+1$ ist, so kann das Polynom $\Theta_{\mu,\nu}$ nicht identisch verschwinden.*

II. Wenn die in der Laguerreschen Differentialgleichung vorkommenden Polynome $\Theta_{\mu,\nu}$, $H_{\mu,\nu}$ bekannt sind, findet man durch Integration sofort den Nenner des Tafelbruches $\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}$, sodann durch Integration der zweiten Differentialgleichung des Satz 8 auch den Zähler. Leider lassen sich aber die Polynome $\Theta_{\mu,\nu}$, $H_{\mu,\nu}$ nur in wenigen Fällen bestimmen. Die folgenden Beispiele sind so ziemlich die einzigen, in denen eine vollständige Durchführung der Rechnung bis heute möglich ist. *Laguerre* **2, 6** hat zwar noch einiges weitere versucht, aber mit wenig Erfolg.

Erstes Beispiel. $\mathfrak{P}(x) = e^x$. Hier ist $\mathfrak{P}' - \mathfrak{P} = 0$; also

$$L = 1,\ M = -1,\ N = 0.$$

$\mathfrak{P}(x)$ ist keine rationale Funktion, und $\frac{x\,M}{L} = -x$ ist für $x = 0$ keine negative ganze Zahl. Daher kann $\Theta_{\mu,\nu}$ nach dem Zusatz zu Satz 8 nicht

identisch verschwinden. Die Definitionsgleichung für $\Theta_{\mu,\nu}$ lautet in unserm Fall:

$$Q_{\mu,\nu} P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} Q'_{\mu,\nu} - Q_{\mu,\nu} P_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\,\Theta_{\mu,\nu}.$$

Da aber $P_{\mu,\nu}$ höchstens vom $(\nu-\lambda)^{\text{ten}}$, $Q_{\mu,\nu}$ höchstens vom $(\mu-\lambda)^{\text{ten}}$ Grad ist (nach Satz 1), so ist die linke Seite dieser Gleichung höchstens vom Grad $\mu+\nu-2\lambda$, während die rechte mindestens den Grad $\mu+\nu-\lambda$ hat. Hieraus ist zu schließen, daß $\lambda = 0$, $\Theta_{\mu,\nu}$ eine (von Null verschiedene) Konstante c, und daß $P_{\mu,\nu}$, $Q_{\mu,\nu}$ genau vom Grad ν, bzw. μ sind, weil sonst der Grad der linken Seite zu klein würde. Die Laguerresche Differentialgleichung lautet demnach:

$$x Q''_{\mu,\nu} + (x-\mu-\nu) Q'_{\mu,\nu} + H_{\mu,\nu} Q_{\mu,\nu} = 0,$$

wo $H_{\mu,\nu}$ statt $\frac{H_{\mu,\nu}}{c}$ geschrieben ist.[1]) Aus dem Grad der einzelnen Terme dieser Gleichung schließt man, daß auch $H_{\mu,\nu}$ eine Konstante ist, und da $Q_{\mu,\nu}$ genau vom μ^{ten} Grad, so ergibt sich, indem man speziell den Koeffizienten von x^μ in obiger Gleichung gleich Null setzt: $\mu + H_{\mu,\nu} = 0$. Hiernach werden dann die beiden Differentialgleichungen des Satz 8 die folgenden:

$$x Q''_{\mu,\nu} + (x-\mu-\nu) Q'_{\mu,\nu} - \mu Q_{\mu,\nu} = 0,$$

$$x P''_{\mu,\nu} - (x+\mu+\nu) P'_{\mu,\nu} + \nu P_{\mu,\nu} = 0.$$

Setzt man in sie zwecks Integration

$$Q_{\mu,\nu} = \sum_{r=0}^{\mu} q_r x^r, \quad P_{\mu,\nu} = \sum_{r=0}^{\nu} p_r x^r$$

ein, so erhält man die Rekursionsformeln

$$q_{r+1} = -\frac{\mu - r}{(\mu+\nu-r)(r+1)}\, q_r, \quad p_{r+1} = \frac{\nu - r}{(\mu+\nu-r)(r+1)}\, p_r,$$

also schließlich, da $q_0 = Q_{\mu,\nu}(0) = 1$, $p_0 = P_{\mu,\nu}(0) = c_0 = 1$ ist:

$$Q_{\mu,\nu} = 1 - \frac{\mu}{\mu+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^\mu \frac{\mu(\mu-1)\ldots 2\cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\nu+1)}\frac{x^\mu}{\mu!},$$

$$P_{\mu,\nu} = 1 + \frac{\nu}{\mu+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{\nu(\nu-1)\ldots 2\cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\ldots(\mu+1)}\frac{x^\nu}{\nu!},$$

in Übereinstimmung mit den Formeln (5), (6) des § 75.

---

1) Das werden wir auch bei den folgenden Beispielen tun, ohne es weiter hervorzuheben.

Zweites Beispiel. $\mathfrak{P}(x) = (1-x)^\alpha$; α sei keine ganze Zahl, daher $\mathfrak{P}(x)$ keine rationale Funktion. Es ist $(1-x)\mathfrak{P}' + \alpha\mathfrak{P} = 0$; also

$$L = 1 - x, \quad M = \alpha, \quad N = 0.$$

Nach dem Zusatz zu Satz 8 kann $\Theta_{\mu,\nu}$ wieder nicht identisch verschwinden; die Definitionsgleichung für $\Theta_{\mu,\nu}$ lautet diesmal:

$$(1-x)(Q_{\mu,\nu}P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu}) + \alpha Q_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\Theta_{\mu,\nu},$$

woraus man genau wie vorhin schließt, daß $\lambda = 0$, $\Theta_{\mu,\nu} = c$ ist, und daß $P_{\mu,\nu}$, $Q_{\mu,\nu}$ genau vom Grad ν bezw. μ sind. Die Laguerresche Differentialgleichung ist jetzt die folgende:

$$x(1-x)Q''_{\mu,\nu} - [\mu + \nu - (\mu + \nu - 1 - \alpha)x]Q'_{\mu,\nu} + H_{\mu,\nu}Q_{\mu,\nu} = 0.$$

Daher muß auch $H_{\mu,\nu}$ wieder eine Konstante sein, für welche man aus dem Koeffizienten von x^μ den Wert

$$H_{\mu,\nu} = \mu(\mu-1) - (\mu + \nu - 1 - \alpha)\mu = \mu(\alpha - \nu)$$

findet. Die Differentialgleichungen des Satz 8 lauten demnach:

$$x(1-x)Q''_{\mu,\nu} - [\mu + \nu - (\mu + \nu - 1 - \alpha)x]Q'_{\mu,\nu} + \mu(\alpha - \nu)Q_{\mu,\nu} = 0,$$

$$x(1-x)P''_{\mu,\nu} - [\mu + \nu - (\mu + \nu - 1 + \alpha)x]P'_{\mu,\nu} - \nu(\alpha + \mu)P_{\mu,\nu} = 0,$$

und ihre Integration nach der gleichen Methode wie beim vorigen Beispiel führt auf endliche hypergeometrische Reihen:

$$Q_{\mu,\nu} = F(-\mu, -\nu + \alpha, -\mu - \nu; x),$$

$$P_{\mu,\nu} = F(-\nu, -\mu - \alpha, -\mu - \nu; x) \qquad (\textit{Padé } 5),$$

wo F die gleiche Bedeutung wie in § 59, Formel (11) hat.

Drittes Beispiel. $\mathfrak{P}(x) = (1-x)^\alpha \log(1-x) + G(x)$; α sei eine ganze nicht negative Zahl, und $G(x)$ ein Polynom, das für $x = 0$ nicht verschwindet. Hier ist

$$(1-x)\mathfrak{P}' + \alpha\mathfrak{P} + (1-x)^\alpha - (1-x)G'(x) - \alpha G(x) = 0,$$

also

$$L = 1 - x, \quad M = \alpha, \quad N = (1-x)^\alpha - (1-x)G'(x) - \alpha G(x).$$

Wir bezeichnen mit n den Grad des Polynoms N; offenbar ist $n \geqq \alpha$. Sodann beschränken wir uns auf diejenigen Felder $[\mu, \nu]$, für welche $\nu \geqq \mu + n$ ist. Die Definitionsgleichung für $\Theta_{\mu,\nu}$ lautet jetzt:

$$(1-x)(Q_{\mu,\nu}P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu}) + \alpha Q_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu} + NQ^2_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\Theta_{\mu,\nu},$$

und nach dem Zusatz zu Satz 8 kann $\Theta_{\mu,\nu}$ wieder nicht identisch verschwinden. Da der Grad der linken Seite dieser Gleichung wegen $\nu \geqq \mu + n$ höchstens gleich $\mu + \nu - 2\lambda$ ist, so folgt wieder $\lambda = 0$, $\Theta_{\mu,\nu} = c$, und $Q_{\mu,\nu}$ ist genau vom μ^{ten} Grad. Die Laguerresche Differentialgleichung ist daher die gleiche wie vorhin:

$$x(1-x)Q''_{\mu,\nu} - [\mu + \nu - (\mu + \nu - 1 - \alpha)x]Q'_{\mu,\nu} + \mu(\alpha - \nu)Q_{\mu,\nu} = 0$$

und hat wieder das Integral:

$$Q_{\mu,\nu} = F(-\mu, -\nu + \alpha, -\mu - \nu; x).$$

Die Gleichung für $P_{\mu,\nu}$ wird dagegen folgende:

$$x(1-x)P''_{\mu,\nu} - [\mu + \nu - (\mu + \nu - 1 + \alpha)x]P'_{\mu,\nu} - \nu(\alpha + \mu)P_{\mu,\nu}$$
$$= -2xNQ'_{\mu,\nu} + [(\mu + \nu)N - xN']Q_{\mu,\nu}.$$

Sie kann, da N und $Q_{\mu,\nu}$ bekannte Polynome sind, sofort durch den Ansatz $P_{\mu,\nu} = \sum_{r=0}^{\nu} p_r x^r$ integriert werden, wobei $p_0 = P_{\mu,\nu}(0)$ gleich dem konstanten Glied c_0 von $\mathfrak{P}$ sein muß. Man erhält dann eine einfache Rekursionsformel zur Berechnung der andern p_r.

Für $\nu < \mu + n$ versagt die Methode, weil dann $\Theta_{\mu,\nu}$ keine Konstante mehr ist, sondern selbst ein unbekanntes Polynom.

Viertes Beispiel. $\mathfrak{P}(x)$ genüge formal der Differentialgleichung

$$x(\alpha + \beta x)\mathfrak{P}' - (\gamma + \delta x)\mathfrak{P} + \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_n x^n = 0 \quad (\gamma_0 = \gamma),$$

wo α, β nicht beide verschwinden. Es ist hier

$$L = x(\alpha + \beta x), \quad M = -(\gamma + \delta x), \quad N = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_n x^n.$$

Setzt man $\mathfrak{P} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ in die Differentialgleichung ein, so erhält man für die c_r die Rekursionsformeln

$$\gamma c_0 - \gamma = 0,$$
$$(\alpha r - \gamma)c_r + (\beta r - \beta - \delta)c_{r-1} + \gamma_r = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$
$$(\alpha r - \gamma)c_r + (\beta r - \beta - \delta)c_{r-1} = 0 \quad (r \geqq n+1).$$

Damit sich die c_r rekursorisch berechnen lassen, werden wir

(a) $$\alpha r - \gamma \neq 0 \quad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

voraussetzen; ferner setzen wir voraus, daß $\mathfrak{P}$ keine rationale Funktion ist. Nun hat man

$$\frac{xM}{L} = -\frac{\gamma + \delta x}{\alpha + \beta x}.$$

Für $\alpha \neq 0$ ist also $\left(\frac{xM}{L}\right)_{x=0} = -\frac{\gamma}{\alpha}$, was wegen (a) keine negative ganze Zahl ist. Für $\alpha = 0$ kann nach (a) nicht auch $\gamma = 0$ sein; folglich hat in diesem Fall $\frac{xM}{L}$ an der Stelle $x = 0$ einen Pol. Nach dem Zusatz zu Satz 8 kann also $\Theta_{\mu,\nu}$ in keinem Fall identisch verschwinden. Wir beschränken uns nunmehr auf diejenigen Felder $[\mu, \nu]$, für welche $\nu \geqq \mu - 1 + n$. Da L den Faktor x hat, wird nach Satz 8 auch $\Theta_{\mu,\nu}$ den Faktor x haben, und die Definitionsgleichung für $\Theta_{\mu,\nu}$, welche jetzt lautet:

$$x(\alpha+\beta x)(Q_{\mu,\nu}P'_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}Q'_{\mu,\nu}) - (\gamma+\delta x)Q_{\mu,\nu}P_{\mu,\nu} + NQ^2_{\mu,\nu} = x^{\mu+\nu-\lambda}\Theta_{\mu,\nu},$$

lehrt dann, weil die linke Seite höchstens vom Grad $\mu + \nu - 2\lambda + 1$ ist, daß $\lambda = 0$, $\Theta_{\mu,\nu} = cx$ ist, und daß $Q_{\mu,\nu}$ genau den μ^{ten} Grad hat. Die Laguerresche Differentialgleichung wird daher zunächst folgende:

$$x^3(\alpha+\beta x)Q''_{\mu,\nu} - x^2\{(\mu+\nu)\alpha - \gamma + [(\mu+\nu-1)\beta - \delta]x\}Q'_{\mu,\nu} + H_{\mu,\nu}Q_{\mu,\nu} = 0.$$

Hieraus ersieht man, daß $H_{\mu,\nu} = ax^2$ sein muß, wo a eine Konstante ist, für die man aus dem Koeffizienten von $x^{\mu+2}$ den Wert

$$a = -\beta\mu(\mu-1) + [(\mu+\nu-1)\beta - \delta]\mu = \mu(\beta\nu - \delta)$$

ermittelt. Die Laguerresche Differentialgleichung wird also endgültig die folgende:

$$x(\alpha+\beta x)Q''_{\mu,\nu} - \{(\mu+\nu)\alpha - \gamma + [(\mu+\nu-1)\beta - \delta]x\}Q'_{\mu,\nu}$$
$$+ \mu(\beta\nu - \delta)Q_{\mu,\nu} = 0.$$

Sie wurde, falls $n = 0$, von *Padé* 6 gefunden. Ihr Integral ergibt sich wieder durch den Ansatz $Q_{\mu,\nu} = \sum_{r=0}^{\mu} q_r x^r$; man erhält:

$$Q_{\mu,\nu} = F\left(-\mu, -\nu + \frac{\delta}{\beta}, -\mu - \nu + \frac{\gamma}{\alpha}; -\frac{\beta}{\alpha}x\right) \quad \text{falls } \alpha\beta \neq 0,$$

$$Q_{\mu,\nu} = \Phi\left(-\mu, -\mu - \nu + \frac{\gamma}{\alpha}; -\frac{\delta}{\alpha}x\right) \quad \text{falls } \beta = 0,$$

$$Q_{\mu,\nu} = \Omega\left(-\mu, -\nu + \frac{\delta}{\beta}; \frac{\beta}{\gamma}x\right) \quad \text{falls } \alpha = 0,$$

wobei die Bezeichnung des § 59 (Formeln (11), (17), (24)) angewandt ist.

Die Differentialgleichung für $P_{\mu,\nu}$ lautet:

$$x^2(\alpha+\beta x)P''_{\mu,\nu} - x\{(\mu+\nu)\alpha + \gamma + [(\mu+\nu-1)\beta + \delta]x\}P'_{\mu,\nu}$$
$$+ \{(\mu+\nu+1)\gamma + \nu(\beta\mu+\delta)x\}P_{\mu,\nu} = -2xNQ'_{\mu,\nu} + [(\mu+\nu+1)N - xN']Q_{\mu,\nu}.$$

Sie kann durch den Ansatz $P_{\mu,\nu} = \sum_{r=0}^{\nu} p_r x^r$, wo $p_0 = c_0$ ist, leicht integriert werden, da N und $Q_{\mu,\nu}$ bekannte Polynome sind. Man erhält wieder eine einfache Rekursionsformel für die Koeffizienten p_r.

Fünftes Beispiel (*de Montessus de Ballore* 2). $\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + \cdots$ genüge formal der Differentialgleichung

$$(\alpha) \quad x(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)\mathfrak{P}'(x) + (\gamma_0 + \gamma_1 x)\mathfrak{P}(x) - c_0\gamma_0 + \delta_1 x = 0$$

und sei keine rationale Funktion. Außerdem sei

$$(\beta) \qquad \nu\alpha_0 + \gamma_0 \neq 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

so daß die Rekursionsformeln, die man aus (α) für die Koeffizienten c_ν erhält:

$$(\alpha_0 + \gamma_0) c_1 + \gamma_1 c_0 + \delta_1 = 0,$$

$$(\nu\alpha_0 + \gamma_0)c_\nu + [(\nu - 1)\alpha_1 + \gamma_1] c_{\nu-1} + (\nu - 2)\alpha_2 c_{\nu-2} = 0 \quad (\nu \geqq 2)$$

diese wirklich eindeutig bestimmen. Es ist hier

$$L = x(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2), \quad M = \gamma_0 + \gamma_1 x, \quad N = -c_0\gamma_0 + \delta_1 x.$$

Da L den Faktor x enthält, so hat auch $\Theta_{\mu,\nu}$ den Faktor x. Wegen der Voraussetzung (β) ist aber $\left(\frac{xM}{L}\right)_{x=0}$ keine negative ganze Zahl, so daß $\Theta_{\mu,\nu}$ nach dem Zusatz zu Satz 8 nicht identisch verschwindet. Wir behandeln jetzt den Fall $\nu = \mu$, der allein unserer Methode bequem zugänglich ist. Die Definitionsgleichung für $\Theta_{\mu,\mu}$ lautet:

$$x(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2)(Q_{\mu,\mu} P'_{\mu,\mu} - P_{\mu,\mu} Q'_{\mu,\mu}) + (\gamma_0 + \gamma_1 x) Q_{\mu,\mu} P_{\mu,\mu}$$
$$+ (-c_0\gamma_0 + \delta_1 x) Q^2_{\mu,\mu} = x^{2\mu-\lambda}\Theta_{\mu,\mu}.$$

Da hier die linke Seite höchstens den Grad $2\mu - 2\lambda + 1$ hat, anderseits $\Theta_{\mu,\mu}$ den Faktor x enthält und nicht identisch verschwindet, so schließt man: $\lambda = 0$, $\Theta_{\mu,\mu} = cx$. Ferner muß wenigstens eines der Polynome $P_{\mu,\mu}$, $Q_{\mu,\mu}$ genau vom μ^{ten} Grad sein, weil sonst der Grad der linken Seite zu klein würde. Die beiden Differentialgleichungen des Satz 8 sind daher zunächst die folgenden:

$$\begin{cases} x^3(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) Q''_{\mu,\mu} \\ - x^2[2\mu\alpha_0 + \gamma_0 + (2\mu\alpha_1 - \alpha_1 + \gamma_1)x + 2(\mu - 1)\alpha_2 x^2] Q'_{\mu,\mu} + H_{\mu,\mu} Q_{\mu,\mu} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2) P''_{\mu,\mu} \\ - x^2[2\mu\alpha_0 - \gamma_0 + (2\mu\alpha_1 - \alpha_1 - \gamma_1)x + 2(\mu - 1)\alpha_2 x^2] P'_{\mu,\mu} \\ \qquad + [H_{\mu,\mu} - (1 + 2\mu)\gamma_0 x - 2\mu\gamma_1 x^2] P_{\mu,\mu} \\ = 2x^2(c_0\gamma_0 - \delta_1 x) Q'_{\mu,\mu} - x[(1 + 2\mu)c_0\gamma_0 - 2\mu\delta_1 x] Q_{\mu,\mu}. \end{cases}$$

Aus der ersten ersieht man, daß $H_{\mu,\mu}$ die Form $x^2(a+bx)$ hat, wo a, b Konstanten sind. Setzt man dies ein und sucht durch den Ansatz

$$Q_{\mu,\mu}=\sum_{r=1}^{\mu} q_r x^r, \qquad P_{\mu,\mu}=\sum_{r=1}^{\mu} p_r x^r$$

zu integrieren, so erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten q_r, p_r die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} (r+1)[(r-2\mu)\alpha_0-\gamma_0]q_{r+1}+[r(r-2\mu)\alpha_1-r\gamma_1+a]q_r \\ \qquad +[(r-1)(r-2\mu)\alpha_2+b]q_{r-1}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad (r-2\mu)[(r+1)\alpha_0+\gamma_0]p_{r+1}+[(r-2\mu)(r\alpha_1+\gamma_1)+a]p_r \\ +[(r-1)(r-2\mu)\alpha_2+b]p_{r-1}=(2r+1-2\mu)c_0\gamma_0 q_{r+1}+2(\mu-r)\delta_1 q_r, \end{cases}$$

wobei die q und p, deren Index < 0 oder $> \mu$ ist, verschwinden. Speziell für $r=\mu+1$ kommt:

$$[\mu(1-\mu)\alpha_2+b]\,q_\mu=0, \quad [\mu(1-\mu)\alpha_2+b]\,p_\mu=0.$$

Da aber wenigstens eines der Polynome $Q_{\mu,\mu}$, $P_{\mu,\mu}$ den μ^{ten} Grad wirklich erreicht, so sind q_μ, p_μ nicht beide null, und man erhält:

$$b=\mu(\mu-1)\alpha_2.$$

Setzt man diesen Wert in die Rekursionsformeln ein, so kommt speziell für $r=\mu$:

$$[-\mu(\mu\alpha_1+\gamma_1)+a]\,q_\mu=0, \quad [-\mu(\mu\alpha_1+\gamma_1)+a]\,p_\mu=0,$$

woraus aus gleichem Grunde folgt:

$$a=\mu(\mu\alpha_1+\gamma_1).$$

Damit ist das Polynom $H_{\mu,\mu}=x^2(a+bx)$ gefunden, und unsere Rekursionsformeln gehen über in:

$$\begin{cases} (r+1)[(2\mu-r)\alpha_0+\gamma_0]q_{r+1}=(\mu-r)[(\mu-r)\alpha_1+\gamma_1]q_r \\ \qquad +(\mu-r)(\mu+1-r)\alpha_2 q_{r-1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad (2\mu-r)[(r+1)\alpha_0+\gamma_0]p_{r+1}=(\mu-r)[(\mu-r)\alpha_1-\gamma_1]p_r \\ +(\mu-r)(\mu+1-r)\alpha_2 p_{r-1}+(2\mu-2r-1)c_0\gamma_0 q_{r+1}-2(\mu-r)\delta_1 q_r, \end{cases}$$

für $r=0, 1, \ldots, \mu-1$. Die Anfangskoeffizienten sind

$$q_{-1}=0, \quad p_{-1}=0, \quad q_0=Q_{\mu,\mu}(0)=1, \quad p_0=P_{\mu,\mu}(0)=c_0,$$

so daß alle q_r, p_r sich hieraus ohne Schwierigkeit der Reihe nach berechnen lassen, weil nach unserer Voraussetzung (β) der Koeffizient von q_{r+1} bezw. p_{r+1} niemals verschwinden kann.

§ 77. Die Kettenbrüche der Padéschen Tafel.

I. Sei wieder $\mathfrak{P}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ eine Potenzreihe ($c_0 \neq 0$), und $\frac{P_{\mu,\nu}(x)}{Q_{\mu,\nu}(x)}$ der irreduzible Tafelbruch des Feldes $[\mu, \nu]$, wobei $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$, $P_{\mu,\nu}(0) = c_0$ sein soll. $P_{\mu,\nu}$, $Q_{\mu,\nu}$ sind dann Polynome vom höchstens ν^{ten} bezw. μ^{ten} Grad. Wir wollen den Tafelbruch **regulär** nennen, wenn wenigstens eines der Polynome $P_{\mu,\nu}$, $Q_{\mu,\nu}$ wirklich den Grad ν bezw. μ hat. Nach Satz 1 wird dann die Reihe $\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}$ mit der Potenz $x^{\mu+\nu+1}$ oder einer höheren beginnen (es ist nämlich $\lambda = 0$). Sind daher

$$\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}, \quad \frac{P_{\mu+\sigma,\nu+\tau}}{Q_{\mu+\sigma,\nu+\tau}} \qquad (\sigma \geqq 0,\ \tau \geqq 0)$$

zwei **reguläre** Tafelbrüche, so enthält der Ausdruck

$$\begin{aligned} & P_{\mu+\sigma,\nu+\tau} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} Q_{\mu+\sigma,\nu+\tau} \\ & = (\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}) Q_{\mu+\sigma,\nu+\tau} - (\mathfrak{P} Q_{\mu+\sigma,\nu+\tau} - P_{\mu+\sigma,\nu+\tau}) Q_{\mu,\nu} \end{aligned}$$

auch keine geringere als die $(\mu + \nu + 1)^{\text{te}}$ Potenz von x. Daraus folgt:

$$P_{\mu+\sigma,\nu+\tau} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} Q_{\mu+\sigma,\nu+\tau} = x^{\mu+\nu+1} G_{\mu,\nu}^{\sigma,\tau}, \tag{1}$$

wo der Grad des Polynoms $G_{\mu,\nu}^{\sigma,\tau}$ offenbar höchstens gleich der größeren der beiden Zahlen $\sigma - 1$, $\tau - 1$ ist.

II. Wenn $\mathfrak{P}(x)$ eine seminormale Potenzreihe und

$$\mathfrak{P}(x) \sim 1 + \frac{a_1 x |}{| 1} + \frac{a_2 x |}{| 1} + \frac{a_3 x |}{| 1} + \cdots$$

ist, so hat der Näherungsbruch $(2\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ dieses Kettenbruches Zähler und Nenner höchstens vom ν^{ten} Grad, und die Potenzreihe $\mathfrak{P} B_{2\nu} - A_{2\nu}$ beginnt erst mit der Potenz $x^{2\nu+1}$. Infolgedessen ist $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ der Tafelbruch des Feldes $[\nu, \nu]$. Ferner hat der Näherungsbruch $(2\nu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ einen Zähler vom ν^{ten} und einen Nenner vom höchstens $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Grad, und die Reihe $\mathfrak{P} B_{2\nu-1} - A_{2\nu-1}$ beginnt mit der Potenz $x^{2\nu}$. Daher ist $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ der Tafelbruch des Feldes $[\nu - 1, \nu]$. Die Näherungsbrüche des korrespondierenden Kettenbruches sind also der Reihe nach die Tafelbrüche der Felder

(2) $[0, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 3]$, $[3, 4]$, ...

Wir betrachten jetzt allgemeiner die folgende Serie von Feldern

(3) $[0, \varkappa], [0, \varkappa+1], [1, \varkappa+1], [1, \varkappa+2], [2, \varkappa+2], [2, \varkappa+3], \ldots,$

die für $\varkappa = 0$ mit (2) übereinstimmt. Die Gruppierung dieser Felder ist in Fig. 5 angedeutet (für $\varkappa = 2$). Wir setzen voraus, daß keine zwei aufeinanderfolgenden Felder dieser Serie den gleichen Tafelbruch haben.

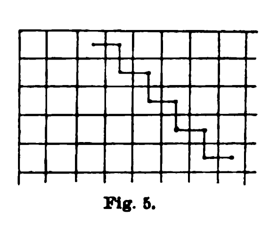


Fig. 5.

Dann sind überhaupt alle Tafelbrüche der Felder (3) voneinander verschieden; denn wären zwei gleiche darunter, so müßten nach Satz 2 auch alle dazwischenliegenden mit diesen identisch sein, also auch zwei aufeinanderfolgende, entgegen der Voraussetzung. Ferner sind diese Tafelbrüche auch alle regulär; denn wären bei einem von ihnen Zähler und Nenner beide von geringerem Grad als ihrem Feld entspricht, so würde derselbe Bruch gewiß auch dem vorangehenden Feld angehören; es würden also wieder zwei gleiche aufeinander folgen.

Nach Satz 4, Kap. VI gibt es einen Kettenbruch

$$\beta_0 + \frac{\alpha_1|}{|\beta_1} + \frac{\alpha_2|}{|\beta_2} + \frac{\alpha_3|}{|\beta_3} + \cdots, \tag{4}$$

dessen Näherungsbrüche der Reihe nach die Tafelbrüche der Felder (3) sind, also die folgenden:

$$\frac{P_{0,\varkappa}}{Q_{0,\varkappa}} = \frac{P_{0,\varkappa}}{1}, \quad \frac{P_{0,\varkappa+1}}{Q_{0,\varkappa+1}}, \quad \frac{P_{1,\varkappa+1}}{Q_{1,\varkappa+1}}, \quad \frac{P_{1,\varkappa+2}}{Q_{1,\varkappa+2}}, \quad \frac{P_{2,\varkappa+2}}{Q_{2,\varkappa+2}}, \ldots. \tag{5}$$

Wir wollen den Kettenbruch (4) unter allen äquivalenten derart auswählen, daß seine Näherungszähler und -Nenner gerade die Zähler und Nenner der Brüche (5) sind. Dann hat man:

$$\beta_0 = P_{0,\varkappa} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa, \tag{6}$$

$$\beta_0 \beta_1 + \alpha_1 = P_{0,\varkappa+1}, \quad \beta_1 = Q_{0,\varkappa+1} = 1, \tag{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\mu,\varkappa+\mu} = \beta_{2\mu} P_{\mu-1,\varkappa+\mu} + \alpha_{2\mu} P_{\mu-1,\varkappa+\mu-1} \\ Q_{\mu,\varkappa+\mu} = \beta_{2\mu} Q_{\mu-1,\varkappa+\mu} + \alpha_{2\mu} Q_{\mu-1,\varkappa+\mu-1} \end{array} \right\} \quad \mu \geqq 1, \tag{8}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\mu,\varkappa+\mu+1} = \beta_{2\mu+1} P_{\mu,\varkappa+\mu} + \alpha_{2\mu+1} P_{\mu-1,\varkappa+\mu} \\ Q_{\mu,\varkappa+\mu+1} = \beta_{2\mu+1} Q_{\mu,\varkappa+\mu} + \alpha_{2\mu+1} Q_{\mu-1,\varkappa+\mu} \end{array} \right\} \quad \mu \geqq 1. \tag{9}$$

Aus (6) und (7) folgt noch:

$$\alpha_1 = P_{0,\varkappa+1} - P_{0,\varkappa} = c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1}.$$

Ferner ergibt die Auflösung von (8) und (9) mit Rücksicht auf die wegen der Regularität der Tafelbrüche (5) anwendbare Formel (1):

$$\beta_{2\mu} = \frac{G^{1,1}_{\mu-1,\varkappa+\mu-1}}{G^{0,1}_{\mu-1,\varkappa+\mu-1}}, \qquad \alpha_{2\mu} = \frac{-G^{1,0}_{\mu-1,\varkappa+\mu}}{G^{0,1}_{\mu-1,\varkappa+\mu-1}}\, x,$$

$$\beta_{2\mu+1} = \frac{G^{1,1}_{\mu-1,\varkappa+\mu}}{G^{1,0}_{\mu-1,\varkappa+\mu}}, \qquad \alpha_{2\mu+1} = \frac{-G^{0,1}_{\mu,\varkappa+\mu}}{G^{1,0}_{\mu-1,\varkappa+\mu}}\, x,$$

wo alle G Konstanten sind (Grad 0 nach Seite 445), und zwar $\neq 0$, weil unter den Tafelbrüchen (5) keine gleichen sind. Die Teilzähler α_μ sind also von $\mu = 2$ an alle gleich x multipliziert mit Konstanten; die Teilnenner β_μ sind Konstanten. Setzt man daher in (8) und (9) speziell $x = 0$, so kommt, weil $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$ ist,

$$1 = \beta_{2\mu}, \quad 1 = \beta_{2\mu+1}.$$

Setzt man ferner $\alpha_\mu = a_\mu x (\mu \geqq 2)$, wo also die a_μ Konstanten sind, so folgt aus (8) und (9), wenn man durch x dividiert und dann x gegen Null abnehmen läßt:

$$a_{2\mu} = \lim_{x=0} \frac{Q_{\mu,\varkappa+\mu} - Q_{\mu-1,\varkappa+\mu}}{x} = Q'_{\mu,\varkappa+\mu}(0) - Q'_{\mu-1,\varkappa+\mu}(0)$$

$$a_{2\mu+1} = \lim_{x=0} \frac{Q_{\mu,\varkappa+\mu+1} - Q_{\mu,\varkappa+\mu}}{x} = Q'_{\mu,\varkappa+\mu+1}(0) - Q'_{\mu,\varkappa+\mu}(0).$$

Somit ergibt sich

Satz 9. *Wenn in der zu einer Potenzreihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ gehörigen Padéschen Tafel unter den Tafelbrüchen der Felderserie*

$$[0,\varkappa], [0,\varkappa+1], [1,\varkappa+1], [1,\varkappa+2], [2,\varkappa+2], [2,\varkappa+3], [3,\varkappa+3], \cdots$$

keine zwei aufeinanderfolgenden identisch sind, so sind sie alle voneinander verschieden und sind der Reihe nach die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa + \frac{c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} |}{| 1} + \frac{a_2 x |}{| 1} + \frac{a_3 x |}{| 1} + \frac{a_4 x |}{| 1} + \cdots,$$

wo die a_μ Konstanten sind und zwar, wenn $Q_{\mu,\nu}(x)$ der Nenner des irreduziblen Tafelbruches des Feldes $[\mu, \nu]$ ist und $Q_{\mu,\nu}(0) = 1$:

$$a_{2\mu} = Q'_{\mu,\varkappa+\mu}(0) - Q'_{\mu-1,\varkappa+\mu}(0) \qquad (\mu \geqq 1)$$

$$a_{2\mu+1} = Q'_{\mu,\varkappa+\mu+1}(0) - Q'_{\mu,\varkappa+\mu}(0) \qquad (\mu \geqq 1).$$

Speziell im Fall $\varkappa = 0$ ist es der korrespondierende Kettenbruch.

Ebenso erkennt man, daß die Tafelbrüche der Felderserie

$$[\varkappa, 0], [\varkappa+1, 0], [\varkappa+1, 1], [\varkappa+2, 1], [\varkappa+2, 2], [\varkappa+3, 2], [\varkappa+3, 3], \ldots,$$

wenn keine zwei aufeinanderfolgenden identisch sind, der Reihe nach die Näherungsbrüche eines Kettenbruches der folgenden Form sein werden (wobei der Näherungsbruch nullter Ordnung nicht mitgerechnet ist):

$$\frac{1 \mid}{\mid d_0 + d_1 x + \cdots + d_\varkappa x^\varkappa} + \frac{d_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} \mid}{\mid 1} + \frac{a_3' x \mid}{\mid 1} + \frac{a_4' x \mid}{\mid 1} + \frac{a_5' x \mid}{\mid 1} + \cdots.$$

Man kann das aber auch sofort auf Satz 9 zurückführen, indem man die Tafel der reziproken Reihe $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ betrachtet.[1])

Beispiel: Die Exponentialfunktion. Bei dieser wissen wir, daß alle Tafelbrüche normal, also voneinander verschieden sind. Ferner ist $Q_{\mu,\nu}$ in Formel (6) des § 75 angegeben, aus der man entnimmt:

$$Q'_{\mu,\nu}(0) = -\frac{\mu}{\mu+\nu}.$$

Setzt man das in die Formeln des Satz 9 ein, so kommt

$$a_{2\mu} = -\frac{\mu}{\varkappa+2\mu} + \frac{\mu-1}{\varkappa+2\mu-1} = -\frac{\varkappa+\mu}{(\varkappa+2\mu-1)(\varkappa+2\mu)},$$

$$a_{2\mu+1} = -\frac{\mu}{\varkappa+2\mu+1} + \frac{\mu}{\varkappa+2\mu} = \frac{\mu}{(\varkappa+2\mu)(\varkappa+2\mu+1)}.$$

Der Kettenbruch wird also folgender:

$$1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^\varkappa}{\varkappa!} + \frac{\frac{x^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!} \Big|}{\Big| 1} - \frac{\frac{(\varkappa+1)x}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)} \Big|}{\Big| 1} + \frac{\frac{1\cdot x}{(\varkappa+2)(\varkappa+3)} \Big|}{\Big| 1}$$
$$- \frac{\frac{(\varkappa+2)x}{(\varkappa+3)(\varkappa+4)} \Big|}{\Big| 1} + \frac{\frac{2\cdot x}{(\varkappa+4)(\varkappa+5)} \Big|}{\Big| 1} - \cdots.$$

Da jede unbegrenzte Serie von verschiedenen Tafelbrüchen nach Satz 7 gegen e^x konvergiert, so ist auch dieser Kettenbruch gleich e^x. Indem

1) Ist nämlich $\frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}}$ der irreduzible Tafelbruch des Feldes $[\mu, \nu]$ für die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, so ist $\frac{Q_{\mu,\nu}}{P_{\mu,\nu}}$ der irreduzible Tafelbruch des Feldes $[\nu, \mu]$ für die reziproke Reihe $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$. Das folgt unmittelbar aus der Definition der Tafelbrüche.

man dann zur Vermeidung der Brüche einen äquivalenten wählt, erhält man die Formel von Padé 1:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^\varkappa}{\varkappa!} + \frac{\frac{x^{\varkappa+1}}{\varkappa!}\Big|}{|\varkappa+1} - \frac{(\varkappa+1)x\,|}{|\,\varkappa+2} + \frac{1\cdot x\,|}{|\varkappa+3} - \frac{(\varkappa+2)x\,|}{|\,\varkappa+4} + \cdots,$$

die wir in § 64 bereits auf andere Weise gefunden haben (Formel (20)).

III. Wenn der unendliche Kettenbruch

$$1 + \frac{k_1 x\,|}{|1+l_1 x} + \frac{k_2 x^2\,|}{|1+l_2 x} + \frac{k_3 x^2\,|}{|1+l_3 x} + \frac{k_4 x^2\,|}{|1+l_4 x} + \cdots$$

mit der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ assoziiert ist, so hat sein Näherungsbruch ν^{ter} Ordnung $\frac{K_\nu}{L_\nu}$ Zähler und Nenner vom ν^{ten} Grad (höchstens), und außerdem fallen aus der Reihe $\mathfrak{P} L_\nu - K_\nu$ die Potenzen von x bis zur $(2\nu)^{\text{ten}}$ einschließlich heraus. Folglich ist $\frac{K_\nu}{L_\nu}$ der Tafelbruch des Feldes $[\nu, \nu]$. Die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches sind also der Reihe nach die Tafelbrüche der Felder

$$(10) \qquad [0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], \ldots.$$

Wir betrachten jetzt allgemeiner die folgende Serie von Feldern

$$(11) \qquad [0, \varkappa], [1, \varkappa+1], [2, \varkappa+2], [3, \varkappa+3], \ldots,$$

deren Gruppierung in Fig. 6 veranschaulicht ist (für $\varkappa = 2$). Wir setzen voraus, daß keine zwei aufeinanderfolgenden den gleichen Tafelbruch haben, woraus wieder folgt, daß alle Tafelbrüche dieser Serie voneinander verschieden sind und daß sie regulär sind. Ist dann

$$(12) \qquad \eta_0 + \frac{\zeta_1\,|}{|\,\eta_1} + \frac{\zeta_2\,|}{|\,\eta_2} + \frac{\zeta_3\,|}{|\,\eta_3} + \cdots$$

Fig. 6.

der Kettenbruch, dessen Näherungszähler und -Nenner der Reihe nach die Zähler und Nenner der irreduzibeln Tafelbrüche der Felder (11) sind, so hat man:

$$(13) \qquad \eta_0 = P_{0\,\varkappa} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa$$

$$(14) \qquad \eta_0 \eta_1 + \zeta_1 = P_{1,\varkappa+1}, \quad \eta_1 = Q_{1,\varkappa+1}$$

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} P_{\mu,\varkappa+\mu} &= \eta_\mu P_{\mu-1,\varkappa+\mu-1} + \zeta_\mu P_{\mu-2,\varkappa+\mu-2} \\ Q_{\mu,\varkappa+\mu} &= \eta_\mu Q_{\mu-1,\varkappa+\mu-1} + \zeta_\mu Q_{\mu-2,\varkappa+\mu-2} \end{aligned} \right\} \quad \mu \geqq 2.$$

Aus (13) und (14) folgt noch

$$(16) \qquad \zeta_1 = P_{1,\varkappa+1} - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa) Q_{1,\varkappa+1},$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(17)\qquad \zeta_1 = P_{1,\varkappa+1} - \mathfrak{P}\, Q_{1,\varkappa+1} + (c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} + c_{\varkappa+2} x^{\varkappa+2} + \cdots) Q_{1,\varkappa+1}.$$

Wegen (16) ist ζ_1 ein Polynom $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grades, wegen (17) fehlen aber die Potenzen bis zur $\varkappa^{\text{ten}}$ einschließlich, und es kommt:

$$(18)\qquad \zeta_1 = c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1}.$$

Weiter erhält man durch Auflösung von (15) unter Benutzung von (1) (weil die Tafelbrüche wieder regulär sind):

$$\eta_\mu = \frac{G^{2,2}_{\mu-2,\varkappa+\mu-2}}{G^{1,1}_{\mu-2,\varkappa+\mu-2}},\qquad \zeta_\mu = \frac{-G^{1,1}_{\mu-1,\varkappa+\mu-1}}{G^{1,1}_{\mu-2,\varkappa+\mu-2}}\, x^2,$$

so daß unter Berücksichtigung des Grades der G (siehe Seite 445) die η_μ, ζ_μ für $\mu \geqq 2$ von der Form

$$\eta_\mu = m_\mu + l_\mu x,\quad \zeta_\mu = k_\mu x^2$$

sind, wo m_μ, l_μ, k_μ Konstanten; wegen der zweiten Gleichung (14) ist auch noch $\eta_1 = m_1 + l_1 x$. Setzt man diese Werte in die zweite Gleichung von (14) und (15) ein und setzt noch

$$Q_{\mu,\varkappa+\mu} = 1 + q_1^{(\mu)} x + q_2^{(\mu)} x^2 + \cdots + q_\mu^{(\mu)} x^\mu,$$

so kommt:

$$m_1 + l_1 x = 1 + q_1^{(1)} x$$

und für $\mu \geqq 2$:

$$1 + q_1^{(\mu)} x + q_2^{(\mu)} x^2 + \cdots = (m_\mu + l_\mu x)(1 + q_1^{(\mu-1)} x + \cdots) + k_\mu x^2 (1 + \cdots)$$

also, indem man die Koeffizienten von x^0, x^1, x^2 beiderseits vergleicht:

$$m_1 = 1,\quad l_1 = q_1^{(1)}$$

$$1 = m_\mu,\ q_1^{(\mu)} = m_\mu q_1^{(\mu-1)} + l_\mu,\ q_2^{(\mu)} = m_\mu q_2^{(\mu-1)} + l_\mu q_1^{(\mu-1)} + k_\mu \qquad (\mu \geqq 2),$$

wobei $q_2^{(1)} = 0$ zu denken ist. Hieraus findet man m_μ, l_μ, k_μ, und es ergibt sich

Satz 10. *Wenn in der zu einer Potenzreihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ gehörigen* Padé*schen Tafel unter den Tafelbrüchen der Felderserie*

$$[0, \varkappa], [1, \varkappa+1], [2, \varkappa+2], [3, \varkappa+3], \ldots$$

keine zwei aufeinanderfolgenden identisch sind, so sind sie alle voneinander verschieden und sind der Reihe nach die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa + \frac{c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1}|}{|1 + l_1 x} + \frac{k_2 x^2|}{|1 + l_2 x} + \frac{k_3 x^2|}{|1 + l_3 x} + \frac{k_4 x^2|}{|1 + l_4 x} + \cdots,$$

wo die k_μ, l_μ Konstanten sind und zwar, wenn

$$Q_{\mu,\varkappa+\mu} = 1 + q_1^{(\mu)} x + q_2^{(\mu)} x^2 + \cdots + q_\mu^{(\mu)} x^\mu$$

der Nenner des irreduzibeln Tafelbruches des Feldes $[\mu, \varkappa + \mu]$ ist:

$$l_1 = q_1^{(1)}, \quad l_\mu = q_1^{(\mu)} - q_1^{(\mu-1)} \qquad (\mu \geqq 2),$$

$$k_\mu = q_2^{(\mu)} - q_2^{(\mu-1)} - (q_1^{(\mu)} - q_1^{(\mu-1)}) q_1^{(\mu-1)} \qquad (\mu \geqq 2),$$

wobei $q_2^{(1)} = 0$ zu denken ist. Speziell für $\varkappa = 0$ entsteht der assoziierte Kettenbruch.

Ebenso erkennt man, daß die Tafelbrüche der Felderserie

$$[\varkappa, 0], [\varkappa + 1, 1], [\varkappa + 2, 2], [\varkappa + 3, 3], \ldots,$$

wenn keine zwei aufeinanderfolgenden einander gleich sind, der Reihe nach die Näherungsbrüche eines Kettenbruches der folgenden Form sind (wobei wieder der Näherungsbruch nullter Ordnung nicht mitgerechnet ist):

$$\frac{1}{|d_0 + d_1 x + \cdots + d_\varkappa x^\varkappa} + \frac{d_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1}|}{|1 + l_2' x} + \frac{k_3' x^2|}{|1 + l_3' x} + \frac{k_4' x^2|}{|1 + l_4' x} + \cdots.$$

Doch kann man das auch sofort auf Satz 10 zurückführen, indem man wieder die Tafel der reziproken Reihe $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ betrachtet.

Beispiel. Es soll der assoziierte Kettenbruch hergeleitet werden für die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \left(\frac{1 + a x}{1 + b x}\right)^\lambda + \frac{c}{\lambda}\left[\left(\frac{1 + a x}{1 + b x}\right)^\lambda - 1\right] = 1 + (\lambda + c)(a - b) x + \cdots,$$

welche für $\lambda = 0$ übergeht in

$$1 + c \log \frac{1 + a x}{1 + b x}.$$

Dabei soll $\mathfrak{P}(x)$ keine rationale Funktion sein, also

$$\lambda \neq \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots; \quad \lambda + c \neq 0; \quad a \neq b.$$

Man bestätigt leicht, daß $\mathfrak{P}(x)$ der Differentialgleichung genügt:

$$(1 + ax)(1 + bx)\mathfrak{P}' + \lambda(b - a)\mathfrak{P} + c(b - a) = 0$$

und zwar auch dann, wenn $\lambda = 0$ ist. Diese ist ein Spezialfall von der im fünften Beispiel des § 76 behandelten Differentialgleichung und geht aus ihr hervor, wenn man

$$\alpha_0 = 1, \ \alpha_1 = a + b, \ \alpha_2 = ab, \ \gamma_0 = 0, \ \gamma_1 = \lambda(b - a), \ \delta_1 = c(b - a)$$

setzt. Für die Koeffizienten des Tafelbruchnenners

$$Q_{\mu,\mu}(x) = 1 + q_1^{(\mu)} x + q_2^{(\mu)} x^2 + \cdots + q_\mu^{(\mu)} x^\mu$$

besteht daher die Rekursionsformel

$$\begin{gathered}(r+1)(2\mu - r) q_{r+1}^{(\mu)} \\ = (\mu - r)[(\mu - r)(a+b) + \lambda(b-a)] q_r^{(\mu)} + (\mu - r)(\mu + 1 - r)\, a b\, q_{r-1}^{(\mu)} \\ (q_{-1}^{(\mu)} = 0,\ q_0^{(\mu)} = 1;\ r = 0, 1, \dots \mu - 1),\end{gathered}$$

aus welcher sich für $r = 0, 1$ nach leichter Reduktion ergibt:

$$q_1^{(\mu)} = \mu \frac{a+b}{2} - \lambda \frac{a-b}{2} \qquad (\mu \geqq 1)$$

$$\begin{aligned} q_2^{(\mu)} = \mu(\mu-1)\frac{(a+b)^2}{8} - (\mu - 1)\left(\frac{(a-b)^2}{16} + \lambda \frac{a^2 - b^2}{4}\right) \\ - \frac{\mu - 1}{2\mu - 1}\frac{(a-b)^2}{16}(1 - 4\lambda^2) \end{aligned} \qquad (\mu \geqq 2).$$

Doch ist die letzte Formel auch für $\mu = 1$ noch anwendbar, weil sie dann $q_2^{(1)} = 0$ gibt, wie es im Satz 10 verlangt ist. Aus diesen Formeln folgt durch eine einfache Rechnung:

$$k_\mu = q_2^{(\mu)} - q_2^{(\mu-1)} - (q_1^{(\mu)} - q_1^{(\mu-1)}) q_1^{(\mu-1)} = \frac{(a-b)^2[\lambda^2 - (\mu-1)^2]}{4(2\mu - 3)(2\mu - 1)} \qquad (\mu \geqq 2).$$

Nun ist

$$\frac{P_{0,1}}{Q_{0,1}} = 1 + (\lambda + c)(a - b) x \neq \frac{P_{0,0}}{Q_{0,0}},$$

also nach Satz 2 auch $\frac{P_{1,1}}{Q_{1,1}} \neq \frac{P_{0,0}}{Q_{0,0}}$ (wie sich natürlich durch Ausrechnen des Tafelbruches $\frac{P_{1,1}}{Q_{1,1}}$ ebenfalls bestätigen läßt). Aber auch für $\mu \geqq 2$ ist niemals $\frac{P_{\mu,\mu}}{Q_{\mu,\mu}} = \frac{P_{\mu-1,\mu-1}}{Q_{\mu-1,\mu-1}}$. Andernfalls müßte nämlich identisch $Q_{\mu,\mu} = Q_{\mu-1,\mu-1}$ sein, also der obige Ausdruck k_μ gewiß verschwinden, was aber wegen $\lambda \neq \pm 1, \pm 2, \dots$ nicht möglich ist. Hiernach ist Satz 10 anwendbar (für $\varkappa = 0$), und man erhält als assoziierten Kettenbruch den folgenden:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 + \frac{(\lambda + c)(a-b)x}{1 + \left(\frac{a+b}{2} - \lambda\frac{a-b}{2}\right)x} + \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{(\lambda^2 - 1^2)x^2}{1\cdot 3}}{1 + \frac{a+b}{2}x} \\ & + \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{(\lambda^2 - 2^2)x^2}{3\cdot 5}}{1 + \frac{a+b}{2}x} + \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \frac{(\lambda^2 - 3^2)x^2}{5\cdot 7}}{1 + \frac{a+b}{2}x} + \cdots. \end{aligned} \right.$$

Nach Satz 30, Kap. VII (mit $p_\nu = 2$) wird er in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunktes gleichmäßig konvergieren und daher nach Satz 20, Kap. VIII auch gleich der assoziierten Reihe $\mathfrak{P}(x)$ sein, also gewiß keine rationale Funktion; auch nicht, wenn man vorn beliebig viele Glieder wegläßt. Unser Kettenbruch ist aber auch limitärperiodisch und daher nach Satz 42, Kap. VII in jedem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich T, der den Nullpunkt im Innern enthält und in welchem die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 - \left(1 + \frac{a+b}{2}x\right)\varrho + \frac{1}{16}(a-b)^2x^2 = 0 \tag{20}$$

ungleiche absolute Beträge haben, wenn man vorn genügend viele Teilbrüche wegläßt, gleichmäßig konvergent[1]), also nach einem schon mehrfach angewandten Weierstraßschen Satz im Innern von T eine reguläre analytische Funktion. Diese kann aber nach dem oben Gesagten, weil T den Nullpunkt im Innern enthalten sollte, gewiß nicht rational sein. Aus den Sätzen 1 und 3, Kap. I schließt man dann, daß der Kettenbruch (19) selbst in T bis auf etwaige Pole regulär ist und daher, weil er in der Umgebung des Nullpunktes den Wert $\mathfrak{P}(x)$ hat, im ganzen Bereich T die Funktion $\mathfrak{P}(x)$ darstellt.

Es kommt demnach auf diejenigen Werte x an, für welche die Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 der Gleichung (20) gleichen absoluten Betrag haben. Um diese zu ermitteln, setze man, weil $\varrho_1\varrho_2 = \frac{1}{16}(a-b)^2x^2$ ist:

$$\varrho_1 = \frac{1}{4}(a-b)\,x\,e^{i\varphi}, \quad \varrho_2 = \frac{1}{4}(a-b)\,x\,e^{-i\varphi};$$

dann läuft die Gleichung $|\varrho_1| = |\varrho_2|$ darauf hinaus, daß φ reell ist, und es kommt:

$$1 + \frac{a+b}{2}x = \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{2}(a-b)\,x\cos\varphi,$$

also

$$\frac{1}{x} = \frac{a-b}{2}\cos\varphi - \frac{a+b}{2} = -a\sin^2\frac{\varphi}{2} - b\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Daher durchläuft $\frac{1}{x}$ die gerade Strecke von $-a$ bis $-b$, somit x selbst den Kreisbogen, der die Endpunkte $-\frac{1}{a}$ und $-\frac{1}{b}$ hat und in seiner Verlängerung den Nullpunkt trifft. Für alle x, die nicht diesem Kreisbogen angehören, ist daher, wenn man den Kettenbruch (19) durch einen äquivalenten ersetzt, $\mathfrak{P}(x)$ gleich

1) In einem solchen Bereich ist nämlich, wenn ϱ_2 die absolut kleinere Wurzel bedeutet, das Maximum von $\left|\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right|$ gewiß kleiner als 1.

$$1+\frac{(\lambda+c)(a-b)x}{\left|1+\left(\frac{a+b}{2}-\lambda\frac{a-b}{2}\right)x\right.}+\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2(\lambda^2-1^2)x^2\Big|}{\Big|\,3\left(1+\frac{a+b}{2}x\right)}+\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2(\lambda^2-2^2)x^2\Big|}{\Big|\,5\left(1+\frac{a+b}{2}x\right)}+\cdots$$

(*de Montessus de Ballore* 2). Übrigens ist das nichts Neues. Denn unser Resultat geht durch die Substitution

$$\frac{1+\frac{a+b}{2}x}{\frac{a-b}{2}x}=z$$

über in die Formeln (10) für $\lambda=\mu$, bzw. (15) für $\lambda=0$ des § 64, und zwar genau mit dem dort angegebenen Geltungsbereich.

In ganz gleicher Weise läßt sich übrigens auch für die allgemeine im fünften Beispiel des § 76 behandelte Potenzreihe der assoziierte Kettenbruch herleiten. Er wird, wenn auch die Koeffizienten eine ziemlich komplizierte Form haben, für $\alpha_0 \neq 0$ ebenfalls limitärperiodisch. An Stelle der Gleichung (20) tritt dabei (die Detailrechnung übergehen wir der Kürze halber) die folgende:

$$\varrho^2-\left(1+\frac{\alpha_1}{2\alpha_0}x\right)\varrho+\frac{\alpha_1^2-4\alpha_0\alpha_2}{16\alpha_0^2}x^2=0,$$

woraus sich wie oben schließen läßt, daß der Kettenbruch überall die Funktion $\mathfrak{P}(x)$ darstellt. Ausgenommen ist nur, wenn die Gleichung $\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2=0$ eine Doppelwurzel hat, eben diese; andernfalls der Kreisbogen, der die beiden Wurzeln dieser Gleichung miteinander verbindet und in seiner Verlängerung den Nullpunkt trifft (*de Montessus de Ballore* 2).

IV. Von ebenso einfacher Bauart sind diejenigen Kettenbrüche, deren Näherungsbrüche die Tafelbrüche einer Kolonne oder einer Zeile der Padéschen Tafel sind. Wir betrachten etwa die Tafelbrüche der $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Kolonne

$$(21)\qquad \frac{P_{0,\varkappa}}{Q_{0,\varkappa}}=\frac{P_{0,\varkappa}}{1},\ \frac{P_{1,\varkappa}}{Q_{1,\varkappa}},\ \frac{P_{2,\varkappa}}{Q_{2,\varkappa}},\ \frac{P_{3,\varkappa}}{Q_{3,\varkappa}},\ldots,$$

und nehmen an, daß keine zwei aufeinanderfolgenden identisch sind, woraus wieder ihre Regularität, also die Anwendbarkeit der Formel (1) folgt. Wenn die Zähler und Nenner dieser Brüche die Näherungszähler und -Nenner des Kettenbruches

$$(22)\qquad \delta_0+\frac{\gamma_1|}{|\delta_1}+\frac{\gamma_2|}{|\delta_2}+\cdots$$

sein sollen, so hat man:

(23) $$\delta_0 = P_{0,\varkappa} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa,$$

(24) $$\delta_0 \delta_1 + \gamma_1 = P_{1,\varkappa}, \quad \delta_1 = Q_{1,\varkappa},$$

(25) $$\left\{ \begin{array}{l} P_{\mu,\varkappa} = \delta_\mu P_{\mu-1,\varkappa} + \gamma_\mu P_{\mu-2,\varkappa} \\ Q_{\mu,\varkappa} = \delta_\mu Q_{\mu-1,\varkappa} + \gamma_\mu Q_{\mu-2,\varkappa} \end{array} \right\} \qquad (\mu \geqq 2).$$

Aus (23) und (24) folgt noch

(26) $$\gamma_1 = P_{1,\varkappa} - (c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa) Q_{1,\varkappa},$$

wofür man auch schreiben kann

(27) $$\gamma_1 = P_{1,\varkappa} - \mathfrak{P} Q_{1,\varkappa} + (c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} + c_{\varkappa+2} x^{\varkappa+2} + \cdots) Q_{1,\varkappa}.$$

Wegen (26) ist γ_1 ein Polynom vom $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grad, und daher wegen (27):

(28) $$\gamma_1 = c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1}.$$

Ferner erhält man durch Auflösung von (25) unter Berücksichtigung von (1):

$$\delta_\mu = \frac{G^{2,0}_{\mu-2,\varkappa}}{G^{1,0}_{\mu-2,\varkappa}}, \quad \gamma_\mu = \frac{-G^{1,0}_{\mu-1,\varkappa}}{G^{1,0}_{\mu-2,\varkappa}} x \qquad (\mu \geqq 2).$$

Also haben mit Rücksicht auf den Grad der G (S. 445) die δ_μ, γ_μ für $\mu \geqq 2$ die Form

$$\delta_\mu = e_\mu + h_\mu x, \quad \gamma_\mu = g_\mu x,$$

wo e_μ, h_μ, g_μ Konstanten sind. Führt man diese Werte in (25) ein und setzt dann $x = 0$, so kommt speziell: $e_\mu = 1$; die außerdem sich ergebende explizite Darstellung von h_μ, g_μ mag dem Leser überlassen bleiben. Da wegen (24) auch $\delta_1 = 1 + h_1 x$ ist, so ergibt sich für den gesuchten Kettenbruch die folgende Form:

(29) $$c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa + \frac{c_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} |}{| 1 + h_1 x} + \frac{g_2 x |}{| 1 + h_2 x} + \frac{g_3 x |}{| 1 + h_3 x} + \cdots.$$

Ebenso erkennt man, daß die Tafelbrüche der $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Zeile der Reihe nach die Näherungsbrüche eines Kettenbruches der folgenden Form sind (wobei der Näherungsbruch nullter Ordnung wieder nicht mitgerechnet ist):

(30) $$\frac{1 |}{| d_0 + d_1 x + \cdots + d_\varkappa x^\varkappa} + \frac{d_{\varkappa+1} x^{\varkappa+1} |}{| 1 + h_2' x} + \frac{g_3' x |}{| 1 + h_3' x} + \frac{g_4' x |}{| 1 + h_4' x} + \cdots.$$

Doch kann man das auch wieder auf den vorigen Fall zurückführen, indem man von der reziproken Reihe $\frac{1}{\mathfrak{P}(x)}$ ausgeht. Speziell für die erste Zeile ($\varkappa = 0$) ist der Kettenbruch (30) kein anderer als der, welcher der Reihe $0 + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ äquivalent ist; er ist daher nach Satz 7, Kap. VI gleich

$$(31)\quad \frac{c_0|}{|1} - \frac{\frac{c_1}{c_0}x\,|}{|1+\frac{c_1}{c_0}x} - \frac{\frac{c_2}{c_1}x\,|}{|1+\frac{c_2}{c_1}x} - \cdots \equiv \frac{1|}{|\frac{1}{c_0}} - \frac{\frac{c_1}{c_0^2}x\,|}{|1+\frac{c_1}{c_0}x} - \frac{\frac{c_2}{c_1}x\,|}{|1+\frac{c_2}{c_1}x} - \cdots,$$

hat also in der Tat die Form (30) für $\varkappa = 0$.

V. Selbstverständlich läßt sich auch zu jeder andern Serie von Tafelbrüchen, wenn nur keine zwei aufeinanderfolgenden identisch sind, ein entsprechender Kettenbruch konstruieren (nach Satz 4, Kap. VI), der dann allerdings von komplizierterer Bauart sein wird. Wir begnügen uns mit diesen einfachsten von *Padé* 1 angegebenen Typen, wollen aber noch auf einen wesentlichen Unterschied, der zwischen ihnen besteht, hinweisen. Es gilt nämlich zunächst der

Satz 11. *Für jeden unendlichen Kettenbruch der Form*

$$(a)\qquad c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa + \frac{c_{\varkappa+1}x^{\varkappa+1}|}{|\quad 1} + \frac{a_2 x|}{|1} + \frac{a_3 x|}{|1} + \cdots$$
$$(c_{\varkappa+1} \neq 0,\ a_\nu \neq 0)$$

bzw. der Form

$$(b)\qquad c_0 + c_1 x + \cdots + c_\varkappa x^\varkappa + \frac{c_{\varkappa+1}x^{\varkappa+1}|}{|\ 1+l_1 x} + \frac{k_2 x^2|}{|1+l_2 x} + \frac{k_3 x^2|}{|1+l_3 x} + \cdots$$
$$(c_{\varkappa+1} \neq 0,\ k_\nu \neq 0)$$

gibt es eine und nur eine Potenzreihe, zu welcher er in der Beziehung steht, die in Satz 9 bzw. 10 zum Ausdruck gebracht ist.

Beweis. Daß es nicht mehrere solche Reihen geben kann, ist ohne weiteres klar, da ja zwei Potenzreihen, die unendlich viele Tafelbrüche gemeinsam haben, bis zu beliebig hohen Potenzen übereinstimmen müssen, also identisch sind. Um den Beweis, daß es wirklich eine gibt, etwa für die Form (a) zu führen (für (b) ist er noch einfacher), zeigt man, was dem Leser überlassen sei, daß der Näherungsbruch $(2\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ höchstens einen Zähler vom $(\varkappa+\nu)^{\text{ten}}$ und einen Nenner vom ν^{ten} Grad hat; ebenso $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ einen Zähler vom $(\varkappa+\nu)^{\text{ten}}$ und einen Nenner vom $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Grad. Da außerdem

$$\frac{A_{\nu+1}}{B_{\nu+1}} - \frac{A_\nu}{B_\nu} = (-1)^\nu \frac{c_{\varkappa+1}a_2 a_3 \cdots a_{\nu+1}x^{\varkappa+\nu+1}}{B_{\nu+1}B_\nu} = \gamma_1 x^{\varkappa+\nu+1} + \gamma_2 x^{\varkappa+\nu+2} + \cdots,$$

so stimmt die Taylorsche Reihe für $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ mit einer ganz bestimmten Potenzreihe bis zur Potenz $x^{\varkappa+\nu}$ einschließlich überein, also $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ bis zur

Potenz $x^{(\varkappa+\nu)+(\nu-1)}$ und $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ bis zur Potenz $x^{(\varkappa+\nu)+\nu}$ Das besagt aber, daß $\frac{A_{2\nu-1}}{B_{2\nu-1}}$ und $\frac{A_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ für diese Reihe die Tafelbrüche der Felder $[\nu-1, \varkappa+\nu]$ bzw. $[\nu, \varkappa+\nu]$ sind. W. z. b. w.

Im Unterschied dazu gibt es für einen Kettenbruch der Form (29) bzw. (30) im allgemeinen keine Reihe, deren Padésche Tafel in ihrer $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Kolonne bzw. Zeile gerade die Näherungsbrüche dieses Kettenbruches enthält. Z. B. wird ja der Bruch

$$\frac{1|}{|d_0} + \frac{d_1 x \quad |}{|1+h_2' x} + \frac{g_3' x \quad |}{|1+h_3' x} + \frac{g_4' x \quad |}{|1+h_4' x} + \cdots,$$

der aus (30) für $\varkappa = 0$ hervorgeht, nur dann der ersten Zeile einer Padéschen Tafel entsprechen, wenn er die spezielle Form (31) hat, wenn also $d_0 h_2' + d_1 = 0$, $h_\nu' + g_\nu' = 0$ ist.

§ 78. Die Konvergenzfrage.

I. Diese Frage ist zur Zeit noch wenig geklärt. Wenn eine unbegrenzte Serie von Tafelbrüchen der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ in einem zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich T, der den Nullpunkt im Innern enthält, gleichmäßig konvergiert, so ist die Grenzfunktion nach einem schon oft benutzten Weierstraßschen Satz im Innern von T regulär und in der Umgebung des Nullpunktes auch gleich der Reihe $\mathfrak{P}(x)$. Jede in T gleichmäßig konvergente Serie von Tafelbrüchen stellt also die nämliche analytische Funktion dar.

Wenn dagegen der Bereich T nicht den Nullpunkt im Innern enthält, so versagen diese Schlüsse. In der Tat kann es dann auch vorkommen, daß zwei Serien von Tafelbrüchen gegen verschiedene analytische Funktionen konvergieren.[1]) Ist z. B. $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen, so wird der Kettenbruch

$$1 + \frac{\frac{1}{b_1}x \,\Big|}{\Big|\, 1} + \frac{\frac{1}{b_1 b_2}x \,\Big|}{\Big|\, 1} + \frac{\frac{1}{b_2 b_3}x \,\Big|}{\Big|\, 1} + \cdots \equiv 1 + \frac{1|}{\left|\frac{b_1}{x}\right.} + \frac{1|}{\left|\frac{b_2}{1}\right.} + \frac{1|}{\left|\frac{b_3}{x}\right.} + \frac{1|}{\left|\frac{b_4}{1}\right.} + \cdots$$

zwar divergieren; aber die Näherungsbrüche gerader und ungerader Ordnung werden nach Satz 6, Kap. IX je für sich konvergieren, und

1) An diesem Umstand dürfte der von *Padé* 2 unternommene Versuch scheitern, eine Theorie der divergenten Reihen auf folgende Definition zu gründen: „Wenn sich in der zu einer beständig divergenten Potenzreihe gehörigen Padéschen Tafel eine konvergente Serie von Tafelbrüchen findet, so soll definitionsgemäß die divergente Reihe gleich dem Grenzwert dieser Serie sein“

zwar gleichmäßig in jedem endlichen Bereich T, der der negativ reellen Achse nicht beliebig nahe kommt. Die Grenzwerte sind also zwei voneinander verschiedene analytische Funktionen. Betrachtet man nun die mit dem obigen Kettenbruch korrespondierende Reihe und die zugehörige Padésche Tafel, so sind nach Satz 9 die Näherungsbrüche gerader bzw. ungerader Ordnung einfach die Tafelbrüche der Felder

$$[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], \ldots$$

bzw. der Felder

$$[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], \ldots .$$

Diese beiden Serien konvergieren daher im Bereich T gleichmäßig, aber beide nach ganz verschiedenen Grenzfunktionen. Andere Serien geben möglicherweise wieder andere Funktionen; doch ist darüber nichts bekannt.

II. Positives weiß man über die Konvergenz recht wenig. Ein bemerkenswertes Einzelresultat ist unser Satz 7. Von größerer Allgemeinheit ist

Satz 12. *Die Funktion $F(x)$ sei im Kreis $|x| \leqq R$ regulär, abgesehen von μ Polen erster Ordnung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu$ im Innern des Kreises, von denen aber keiner im Nullpunkt liegt.*

Entwickelt man dann $F(x)$ in der Umgebung des Nullpunktes in die Taylorsche Reihe und konstruiert die zugehörige Padésche Tafel, so konvergieren die Tafelbrüche der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Zeile für $|x| < R$ gegen $F(x)$, und zwar gleichmäßig für

$$|x| \leqq R - \varepsilon, \quad |x - \alpha_i| \geqq \varepsilon \quad (i = 1, 2, \cdots \mu),$$

wo $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein darf.[1] (*de Montessus de Ballore* **1**.)

Der Satz bleibt übrigens richtig, wenn Pole höherer Ordnung vorhanden sind, und μ die Summe der Ordnungen bedeutet. Doch ist der Beweis zwar nicht prinzipiell, aber formal erheblich umständlicher, weshalb wir uns auf Pole erster Ordnung beschränken wollen. Wir setzen wie in § 74, II:

$$(1) \qquad \Delta_{\mu-1,\nu} = \begin{vmatrix} c_\nu & c_{\nu-1} & \ldots c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \ldots c_{\nu-\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu-1} & c_{\nu+\mu-2} & \ldots c_\nu \end{vmatrix}$$

und benötigen zunächst folgenden

---

1) Man kann sogar sagen: gleichmäßig für $|x| < R$, $|x - \alpha_i| \geqq \varepsilon$. Da nämlich $F(x)$ auf dem Kreis $|x| = R$ noch regulär vorausgesetzt ist, so bleiben die Voraussetzungen des Satzes bestehen, wenn man R durch eine etwas größere Zahl R_1 ersetzt.

Hilfssatz. *Sind die beiden Determinanten $\Delta_{\mu-1,\nu}$ und $\Delta_{\mu-1,\nu+1}$ von Null verschieden, so ist*

$$P_{\mu,\nu+1} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu} Q_{\mu,\nu+1} = (-1)^{\mu} \frac{\Delta_{\mu,\nu+1}}{\Delta_{\mu-1,\nu}} x^{\mu+\nu+1}.$$

In der Tat ist der links stehende Ausdruck ein Polynom vom höchstens $(\mu+\nu+1)^{\text{ten}}$ Grad. Anderseits ist er gleich

$$(\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu} - P_{\mu,\nu}) Q_{\mu,\nu+1} - (\mathfrak{P} Q_{\mu,\nu+1} - P_{\mu,\nu+1}) Q_{\mu,\nu}.$$

Wendet man hierauf die Formeln von Satz 6 an, was wegen $\Delta_{\mu-1,\nu} \neq 0$, $\Delta_{\mu-1,\nu+1} \neq 0$ möglich ist, so sieht man, daß die Potenzen bis zur $(\mu+\nu)^{\text{ten}}$ einschließlich herausfallen, so daß die Potenz $x^{\mu+\nu+1}$ allein übrig bleibt, und zwar mit dem Koeffizienten

$$\frac{1}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \begin{vmatrix} c_{\nu+\mu+1} & c_{\nu+\mu} & \cdots & c_{\nu+1} \\ c_{\nu+1} & c_{\nu} & \cdots & c_{\nu-\mu+1} \\ c_{\nu+2} & c_{\nu+1} & \cdots & c_{\nu-\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \cdots & c_{\nu} \end{vmatrix} = (-1)^{\mu} \frac{\Delta_{\mu,\nu+1}}{\Delta_{\mu-1,\nu}},$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Um nun den Beweis von Satz 12 in Angriff zu nehmen, seien die μ Pole α_i der absoluten Größe nach geordnet:

$$(2) \qquad 0 < |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_\mu| < R.$$

Nach den Voraussetzungen ist dann für $|x| \leqq R$:

$$(3) \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{A_i}{\alpha_i - x} + \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu x^\nu \qquad A_i \neq 0.$$

Da die letzte Reihe insbesondere für $|x| = R$ noch konvergieren muß, so ist

$$(4) \qquad |g_\nu| < CR^{-\nu},$$

wo C von ν nicht abhängt.[1]) Für $|x| < |\alpha_1|$ gilt nun die Taylorsche Reihe

$$(5) \qquad F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu,$$

wobei wegen (3)

$$(6) \qquad c_\nu = d_\nu + g_\nu,$$

---

1) Ebenso werden in der Folge alle C mit einem oder mehreren Indices Zahlen bedeuten, die von ν nicht abhängen.

$$d_\nu = \sum_{i=1}^{\mu} A_i \alpha_i^{-\nu-1} \tag{7}$$

ist. Man hat daher nach der Produktregel für Determinanten:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} d_\nu & d_{\nu-1} & \cdots & d_{\nu-\mu+1} \\ d_{\nu+1} & d_\nu & \cdots & d_{\nu-\mu+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{\nu+\mu-1} & d_{\nu+\mu-2} & \cdots & d_\nu \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} A_1\alpha_1^{\mu-1} & \cdots & A_\mu \alpha_\mu^{\mu-1} \\ A_1\alpha_1^{\mu-2} & \cdots & A_\mu \alpha_\mu^{\mu-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 & \cdots & A_\mu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^{-\nu-\mu} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-\mu} \\ \alpha_1^{-\nu-\mu+1} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{-\nu-1} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-1} \end{vmatrix} = C_1(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu)^{-\nu}, \end{cases} \tag{8}$$

wobei $C_1 \neq 0$ ist. Läßt man in jeder der beiden in (8) rechts stehenden Determinanten irgend $\mu - k$ Zeilen weg und bildet das symbolische Produkt der zwei so enstehenden k-zeiligen Matrizes, so resultiert eine k-reihige Unterdeterminante von der in (8) links stehenden Determinante, und jede Unterdeterminante kann auf diese Art hervorgebracht werden. Wendet man aber auf das symbolische Matrixprodukt die bekannte Entwicklungsformel an[1]), so findet man eine Summe von $\binom{\mu}{k}$ Gliedern, deren jedes die Form hat:

$$C_{i_1, i_2, \ldots i_k}(\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_k})^{-\nu} \qquad i_1 < i_2 < \ldots < i_k.$$

Mit Rücksicht auf die Ungleichungen (2) folgt somit, daß jede k-reihige Unterdeterminante von (8) absolut kleiner ist als $C_2|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k|^{-\nu}$. Ersetzt man daher in (8) links die d von irgend $\mu - k$ Zeilen durch g mit Beibehaltung des Index, so wird die entstehende Determinante nach dem Bewiesenen und mit Rücksicht auf (4) absolut kleiner als $C_3|\alpha_1\cdots\alpha_k R^{\mu-k}|^{-\nu}$. Dividiert man sie dann durch (8), so wird der Quotient absolut kleiner als $\frac{C_3}{C_1}\left|\frac{R}{\alpha_{k+1}}\cdots\frac{R}{\alpha_\mu}\right|^{-\nu}$, nähert sich also mit wachsendem ν der Null. Daraus folgt insbesondere auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\Delta_{\mu-1,\nu}}{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu)^{-\nu}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{\begin{vmatrix} d_\nu + g_\nu & \cdots & d_{\nu-\mu+1} + g_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{\nu+\mu-1} + g_{\nu+\mu-1} & \cdots & d_\nu + g_\nu \end{vmatrix}}{\frac{1}{C_1}\begin{vmatrix} d_\nu & \cdots & d_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{\nu+\mu-1} & \cdots & d_\nu \end{vmatrix}} = C_1,$$

1) Siehe z. B. Baltzer: Theorie und Anwendung der Determinanten. 5. Aufl., § 6, Abs. 1. — Gordan-Kerschensteiner: Vorlesungen über Invariantentheorie, I. Bd. Abs. 81.

wie man erkennt, wenn man die Zählerdeterminante in eine Summe von 2^μ Determinanten zerlegt. Für genügend große ν ist daher

$$(9)\qquad 2|C_1|\cdot|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu|^{-\nu}>|\varDelta_{\mu-1,\nu}|>\frac{1}{2}|C_1|\cdot|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu|^{-\nu}>0,$$

also gewiß die Bedingung des Hilfssatzes erfüllt.

Nun gilt weiter die Formel:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} d_\nu & \cdots & d_{\nu-\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{\nu+\mu} & \cdots & d_\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1\alpha_1^\mu & \cdots & A_\mu\alpha_\mu^\mu & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 & \cdots & A_\mu & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^{-\nu-\mu-1} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-\mu-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{-\nu-1} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-1} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und ebenso auch:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\begin{vmatrix} \alpha_i^{-\nu-1} & \cdots & \alpha_i^{-\nu+\mu-1} \\ d_{\nu+1} & \cdots & d_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{\nu+\mu} & \cdots & d_\nu \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \alpha_i^\mu & \cdots & 0 & 0 \\ A_1\alpha_1^{\mu-1} & \cdots & A_i\alpha_i^{\mu-1} & \cdots & A_\mu\alpha_\mu^{\mu-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 & \cdots & A_i & \cdots & A_\mu & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1^{-\nu-\mu-1} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-\mu-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{-\nu-1} & \cdots & \alpha_\mu^{-\nu-1} & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right.$$

Analog wie oben ist irgend eine k-reihige Unterdeterminante von (10) oder (11) wieder ein symbolisches Matrixprodukt und erweist sich absolut kleiner als $C_4|\alpha_1\ldots\alpha_k|^{-\nu}$. Ersetzt man daher in (10) oder (11) die d von $\mu-k+1$ Zeilen durch g mit Beibehaltung des Index, so wird die entstehende Determinante absolut kleiner wie $C_5|\alpha_1\ldots\alpha_k R^{\mu-k+1}|^{-\nu}$, also erst recht kleiner wie $C_5|\alpha_1\ldots\alpha_\mu R|^{-\nu}$. Infolgedessen wird auch bei Berücksichtigung von (10)[1])

$$(12)\qquad |\varDelta_{\mu,\nu}| = \text{abs}\begin{vmatrix} c_\nu & \cdots & c_{\nu-\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & \cdots & c_\nu \end{vmatrix} < C_6|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\mu R|^{-\nu}$$

und bei Berücksichtigung von (11)

$$(13)\qquad \text{abs}\begin{vmatrix} \alpha_i^{-\nu-1} & \cdots & \alpha_i^{-\nu+\mu-1} \\ c_{\nu+1} & \cdots & c_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & \cdots & c_\nu \end{vmatrix} < C_7|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu R|^{-\nu}.$$

---

1) abs bedeutet „absoluter Betrag", da Absolutstriche bei Determinanten nicht zweckmäßig sind.

Aus (13) und (9) ergibt sich dann:

$$\operatorname{abs} \frac{1}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_i & \dots & \alpha_i^\mu \\ c_{\nu+1} & c_\nu & \dots & c_{\nu-\mu+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu+\mu} & c_{\nu+\mu-1} & \dots & c_\nu \end{vmatrix} < C_8 \left| \frac{R}{\alpha_i} \right|^{-\nu},$$

wofür man aber nach Satz 6 auch schreiben kann:

$$(14) \qquad |Q_{\mu,\nu}(\alpha_i)| < C_8 \left| \frac{R}{\alpha_i} \right|^{-\nu}.$$

Setzt man daher

$$(15) \qquad Q_{\mu,\nu}(x) = 1 + q_1^{(\nu)}(x) + q_2^{(\nu)}x^2 + \cdots + q_\mu^{(\nu)}x^\mu,$$

$$(16) \quad \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_\mu}\right) = 1 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots + q_\mu x^\mu = Q(x),$$

so folgt aus (14):

$$\lim_{\nu=\infty} [(q_1^{(\nu)} - q_1)\alpha_i + (q_2^{(\nu)} - q_2)\alpha_i^2 + \cdots + (q_\mu^{(\nu)} - q_\mu)\alpha_i^\mu] = \lim_{\nu=\infty} Q_{\mu,\nu}(\alpha_i) = 0$$

für $i = 1, 2, \dots, \mu$, woraus man unschwer schließt:

$$\lim_{\nu=\infty} q_1^{(\nu)} = q_1, \ \lim_{\nu=\infty} q_2^{(\nu)} = q_2, \ \dots, \ \lim_{\nu=\infty} q_\mu^{(\nu)} = q_\mu.$$

Daher wird auch

$$(17) \qquad \lim_{\nu=\infty} Q_{\mu,\nu}(x) = Q(x),$$

und zwar gleichmäßig in jedem endlichen Bereich. Zu jedem positiven ε gibt es also ein n derart, daß $|Q_{\mu,\nu}|$ im Bereich

$$(18) \qquad |x| \leq R - \varepsilon, \quad |x - \alpha_i| \geq \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \dots, \mu)$$

für $\nu \geq n$ stets über einer positiven von x und ν unabhängigen Schranke c bleibt. Betrachten wir nun die Reihe

$$(19) \qquad \frac{P_{\mu,n}}{Q_{\mu,n}} + \sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\frac{P_{\mu,\nu+1}}{Q_{\mu,\nu+1}} - \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} \right),$$

wofür man nach dem Hilfssatz auch schreiben kann

$$(20) \qquad \frac{P_{\mu,n}}{Q_{\mu,n}} + (-1)^\mu \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\Delta_{\mu,\nu+1}}{\Delta_{\mu-1,\nu}} \frac{x^{\mu+\nu+1}}{Q_{\mu,\nu} Q_{\mu,\nu+1}},$$

so ist im Bereich (18) ihr allgemeines Glied absolut kleiner als

$$\left|\frac{\Delta_{\mu,\nu+1}}{\Delta_{\mu-1,\nu}}\right| \frac{(R-\varepsilon)^{\mu+\nu+1}}{c^2},$$

nach (9) und (12) also kleiner wie $C_9\left(\frac{R-\varepsilon}{R}\right)^\nu$. Die Reihe (19) ist daher gleichmäßig konvergent, d. h. es existiert der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{P_{\mu,\nu}}{Q_{\mu,\nu}} \tag{21}$$

gleichmäßig im Bereich (18). Da dieser Bereich den Nullpunkt im Innern enthält, so ist der Grenzwert (21) auch gleich $F(x)$, womit Satz 12 bewiesen ist.

III. Ist ϱ der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{\Delta_{\mu,\nu+1}}{\Delta_{\mu-1,\nu}} x^{\mu+\nu+1}, \tag{22}$$

so wird mit Rücksicht auf (17) auch die Reihe (20) für $|x|<\varrho$, $|x-\alpha_i|\geqq\varepsilon$ konvergieren, für $|x|>\varrho$ aber divergieren. Dieser Konvergenzradius ist leicht zu bestimmen, wenn $F(x)$ noch im Kreisring $R\leqq|x|\leqq R_1$ regulär ist, abgesehen von einem einfachen Pol $\alpha_{\mu+1}$ im Innern. Dann kommen nämlich zu den seitherigen Überlegungen noch diejenigen hinzu, welche daraus hervorgehen, wenn man μ durch $\mu+1$ und R durch R_1 ersetzt. Dadurch gelangt man neben (9) für große ν zu der analogen Formel:

$$2|C_1'|\cdot|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu+1}|^{-\nu-1} > |\Delta_{\mu,\nu+1}| > \frac{1}{2}|C_1'|\cdot|\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu+1}|^{-\nu-1}. \tag{23}$$

Aus (9) und (23) folgt dann:

$$\frac{4|C_1'|}{|C_1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu|}\cdot|\alpha_{\mu+1}|^{-\nu-1} > \left|\frac{\Delta_{\mu,\nu+1}}{\Delta_{\mu-1,\nu}}\right| > \frac{1}{4}\frac{|C_1'|}{|C_1\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu|}\cdot|\alpha_{\mu+1}|^{-\nu-1},$$

so daß der Konvergenzradius ϱ gleich $|\alpha_{\mu+1}|$ ist. Hieraus ergibt sich insbesondere noch

Satz 13. *Sei $F(x)$ eine meromorphe Funktion mit den unendlich vielen einfachen Polen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ und sei*

$$0<|\alpha_1|<|\alpha_2|<|\alpha_3|<\cdots.$$

Konstruiert man dann die Padésche Tafel zu der Potenzreihe, welche in der Umgebung des Nullpunktes gleich $F(x)$ ist, so konvergiert für $\mu=1, 2, 3, \ldots$ allgemein die μ^{te} Zeile der Tafelbrüche für $|x|<|\alpha_\mu|$ gegen $F(x)$ (die Pole ausgenommen), und divergiert für $|x|>|\alpha_\mu|$. (de Montessus de Ballore 1.)

Bei einer meromorphen Funktion $F(x)$ mit höchstens einfachen Polen sieht man leicht, daß es auch Tafelbruchserien gibt, die für alle regulären Stellen gegen $F(x)$ konvergieren. Wenn nämlich gar kein Pol vorhanden, so ist $F(x)$ eine ganze Funktion, und die Tafelbrüche der ersten Zeile leisten daher das Verlangte. Ist eine endliche Anzahl von Polen vorhanden, etwa μ, so sind es nach Satz 12, wo man dann R beliebig groß denken kann, die Tafelbrüche der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Zeile. Hat aber $F(x)$ unendlich viele Pole $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und ist

$$0<|\alpha_1|\leqq|\alpha_2|\leqq|\alpha_3|\leqq\cdots,$$

so muß hier unendlich oft Ungleichheit statthaben, weil die Funktion sonst nicht meromorph wäre. Sei etwa

$$|\alpha_{\mu_i}|<|\alpha_{\mu_i+1}| \qquad (i=1,2,3,\ldots).$$

Ist dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine Serie positiver Zahlen mit dem Grenzwert Null, so wird nach Satz 12 die $(\mu_i+1)^{\text{te}}$ Zeile für

$$\text{(24)} \qquad |x|\leqq|\alpha_{\mu_i+1}|-2\varepsilon_i, \; |x-\alpha_1|\geqq\varepsilon_i, \; \ldots, \; |x-\alpha_{\mu_i}|\geqq\varepsilon_i$$

gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergieren. Es gibt daher einen Index ν_i derart, daß im Bereich (24)

$$\left|F(x)-\frac{P_{\mu_i,\nu_i}(x)}{Q_{\mu_i,\nu_i}(x)}\right|<\varepsilon_i$$

wird. Da aber eine beliebig gewählte reguläre Stelle sicher dem Bereich (24) angehört, wenn nur i genügend groß, so folgt hieraus für jede reguläre Stelle:

$$\lim_{i=\infty}\frac{P_{\mu_i,\nu_i}(x)}{Q_{\mu_i,\nu_i}(x)}=F(x). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

IV. Satz 13 legt die Vermutung nahe, daß bei einer beliebigen Padéschen Tafel jede folgende Zeile in mindestens dem gleichen Bereich konvergiert wie die vorausgehende, allenfalls abgesehen von der Grenze des Bereiches. Das ist aber keineswegs der Fall. Vielmehr kann es sogar vorkommen, *daß zwar die Potenzreihe selbst, also die erste Zeile der Tafelbrüche einen endlichen oder auch unendlichen Konvergenzradius hat, und trotzdem schon die zweite Zeile mindestens in einer überall dichten Punktmenge des Konvergenzkreises divergiert*, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ eine abzählbare Menge von Zahlen $\neq 0$, die in der ganzen Zahlenebene überall dicht liegen, und außerdem komme jede einzelne unendlich oft vor. Wir wählen dann die Koeffizienten $c_{2\nu}$ von

Null verschieden und derart, daß die Reihe $\Sigma c_{3\nu} x^{3\nu}$ einen vorgeschriebenen Konvergenzradius ϱ (eventuell ∞) hat. Sodann setzen wir

$$c_{3\nu\pm1} = \begin{cases} \gamma_\nu c_{3\nu} & \text{für } |\gamma_\nu| \leqq 1 \\ \dfrac{c_{3\nu}}{\gamma_\nu} & \text{für } |\gamma_\nu| > 1, \end{cases}$$

so daß der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x) = \Sigma c_\nu x^\nu$ ebenfalls gleich ϱ ist. Nun lehrt Satz 6 für $c_\nu \neq 0$:

$$Q_{1,\nu}(x) = 1 - \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} x,$$

also in unserm Fall speziell:

$$Q_{1,3\nu}(x) = 1 - \frac{1}{\gamma_\nu} x \quad \text{für } |\gamma_\nu| > 1,$$

$$Q_{1,3\nu-1}(x) = 1 - \frac{1}{\gamma_\nu} x \quad \text{für } |\gamma_\nu| \leqq 1.$$

Da jedes γ_ν unendlich oft auftritt, so gibt es also unter den Tafelbruchnennern der zweiten Zeile unendlich viele, welche für $x = \gamma_\nu$ verschwinden. Die zweite Zeile der Tafelbrüche kann daher für kein γ_ν konvergieren, weil unendlich viele für $x = \gamma_\nu$ einen Pol haben. Da die γ_ν überall dicht liegen, so ist damit unsere Behauptung erwiesen. Ob für andere Werte von x vielleicht Konvergenz eintritt, mag dahingestellt bleiben.

Elftes Kapitel.

Über Kettenbrüche, deren Teilzähler und -Nenner rationale Funktionen ihres Stellenzeigers sind.

§ 79. Die Konvergenz dieser Kettenbrüche.

I. Die Elemente des unendlichen Kettenbruches

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \tag{1}$$

mögen die Form haben

$$\begin{cases} a_\nu = \alpha_0 + \alpha_1 \nu + \cdots + \alpha_p \nu^p & \alpha_p \neq 0 \\ b_\nu = \beta_0 + \beta_1 \nu + \cdots + \beta_q \nu^q & \beta_q \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

und speziell alle Teilzähler mögen von Null verschieden sein. Für $p < 2q$ ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = 0, \qquad \text{also:} \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| < \frac{1}{4}$$

für genügend große ν. Nach Satz 27, Kap. VII wird daher der Kettenbruch

$$b_n + \frac{a_{n+1}|}{|b_{n+1}} + \frac{a_{n+2}|}{|b_{n+2}} + \cdots \tag{3}$$

für genügend große n gewiß konvergieren, so daß auch der Kettenbruch (1) noch mindestens im weiteren Sinne konvergiert (Satz 2, Kap. VII).

Für $p = 2q$ ist zu beachten, daß b_ν für hinreichend große ν gewiß $\neq 0$ sein wird. Ist das etwa für $\nu > n$ der Fall, so betrachten wir den mit (3) äquivalenten Kettenbruch

$$b_n + \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\Big|}{|\;1} + \frac{\frac{a_{n+2}}{b_{n+1} b_{n+2}}\Big|}{|\;1} + \frac{\frac{a_{n+3}}{b_{n+2} b_{n+3}}\Big|}{|\;1} + \cdots.$$

Dieser ist jetzt limitärperiodisch, und zwar ist

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu} = \frac{\alpha_p}{\beta_q^2}.$$

Nach Satz 41, Kap. VII konvergiert er daher noch mindestens im weiteren Sinne, wenn die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\varrho^2 - \varrho - \frac{\alpha_p}{\beta_q^2} = 0$$

ungleiche absolute Beträge haben. Dann wird also auch der Kettenbruch (1) noch mindestens im weiteren Sinne konvergieren. Die Wurzeln sind

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\beta_q^2 + 4\alpha_p}{\beta_q^2}}\right);$$

sie haben also ungleiche absolute Beträge dann und nur dann, wenn der Radikand nicht der negativ reellen Achse inkl. Null angehört.

Ist endlich $p > 2q$, so setzen wir den Kettenbruch (1) in die äquivalente Form

$$b_0 + \frac{1|}{|d_1} + \frac{1|}{|d_2} + \frac{1|}{|d_3} + \cdots, \tag{4}$$

wobei nach § 42, II, C

$$d_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad d_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} b_{2\nu}, \quad d_{2\nu+1} = \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu+1}} b_{2\nu+1} \tag{5}$$

ist, und untersuchen die unendliche Reihe $\Sigma|d_\nu|$, auf welche wir das Kriterium anwenden[1]):

$$\lim_{\nu=\infty} \nu\left(1 - \left|\frac{d_{\nu+2}}{d_\nu}\right|\right) \begin{cases} > 2\text{: Konvergenz} \\ < 2\text{: Divergenz.} \end{cases} \tag{6}$$

Nun ist nach (5) für gerade und ungerade ν:

$$\frac{d_{\nu+2}}{d_\nu} = \frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu+2}} \frac{b_{\nu+2}}{b_\nu} = \left(1 - \frac{p}{\nu} + \cdots\right)\left(1 + \frac{2q}{\nu} + \cdots\right) = 1 + \frac{2q-p}{\nu} + \cdots,$$

so daß der Grenzwert (6) gleich $p - 2q$ ist. Die Reihe $\Sigma|d_\nu|$ konvergiert daher für $p - 2q > 2$. Dann ist aber nach Satz 5, Kap. VII der Kettenbruch (4), also auch der äquivalente (1) divergent und nicht einmal im weiteren Sinne konvergent.

---

1) Es ist das nichts anderes als das bekannte Kriterium von Raabe, angewandt auf die beiden Partialreihen $\Sigma|d_{2\nu}|$ und $\Sigma|d_{2\nu+1}|$.

Es bleiben noch die Fälle $p = 2q + 1$ und $p = 2q + 2$ zu erledigen. Beschränken wir uns dabei auf den Fall positiver a_ν, b_ν, so finden wir:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}} = \begin{cases} \frac{\beta_q}{\sqrt{\alpha_p}} & \text{für } p = 2q+2 \\ \infty & \text{für } p = 2q+1. \end{cases}$$

In beiden Fällen wird also die Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ divergieren, und daher nach Satz 10, Kap. VII der Kettenbruch (1) konvergieren. Sind die a_ν, b_ν nicht sämtlich, sondern nur für genügend große ν positiv, so ist der Kettenbruch dann noch mindestens im weiteren Sinne konvergent. Es tritt das ein, wenn die α_ι, β_ι reell sind, und speziell $\alpha_p > 0$, $\beta_q > 0$. Dabei kann man aber die Bedingung $\beta_q > 0$ nachträglich wieder fallen lassen, indem man, falls $\beta_q < 0$ ist, den Kettenbruch (1) durch den äquivalenten

$$b_0 - \frac{a_1|}{|-b_1} + \frac{a_2|}{|-b_2} + \frac{a_3|}{|-b_3} + \frac{a_4|}{|-b_4} + \cdots$$

ersetzt. Wir fassen diese Resultate zusammen in

Satz 1. *Der unendliche Kettenbruch* $b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots$, *dessen Elemente die Form haben:*

$$a_\nu = \alpha_0 + \alpha_1 \nu + \cdots + \alpha_p \nu^p \neq 0 \qquad (\alpha_p \neq 0),$$

$$b_\nu = \beta_0 + \beta_1 \nu + \cdots + \beta_q \nu^q \qquad (\beta_q \neq 0),$$

ist für $p > 2q + 2$ divergent und nicht einmal im weiteren Sinne konvergent. Er konvergiert dagegen mindestens im weiteren Sinne in folgenden drei Fällen:

1) *Wenn $p < 2q$ ist.*

2) *Wenn $p = 2q$ ist, und die Zahl $\frac{\beta_q^2 + 4\alpha_p}{\beta_q^2}$ nicht der negativ reellen Achse inkl. Null angehört.*

3) *Wenn $p = 2q + 1$ oder $p = 2q + 2$ ist, und zugleich $\alpha_p > 0$ und die anderen α_ι, β_ι reell sind.*

In allen drei Fällen konvergiert der Kettenbruch, wenn man vorn genügend viele Teilbrüche wegläßt, sogar im engeren Sinne.

In den wenigen noch übrig bleibenden Fällen lassen wir die Konvergenzfrage offen. Indes werden wir in § 82 speziell den Fall $p = 2$, $q = 1$, auch wenn $\beta_q^2 + 4\alpha_p = 0$ ist, noch in ziemlichem Umfang erledigen können.

II. Der Fall, daß die Elemente a_ν, b_ν rationale gebrochene Funktionen von ν sind, ist nur scheinbar allgemeiner als der behandelte. Denn bringt man a_ν, b_ν auf gemeinsamen Nenner und setzt demgemäß

$$a_\nu = \frac{a_\nu'}{c_\nu'}, \quad b_\nu = \frac{b_\nu'}{c_\nu'},$$

wo a_ν', b_ν', c_ν' rationale ganze Funktionen von ν sind, so besteht die Äquivalenz

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots \equiv b_0 + \frac{a_1'|}{|b_1'} + \frac{c_1'a_2'|}{|b_2'} + \frac{c_2'a_3'|}{|b_3'} + \frac{c_3'a_4'|}{|b_4'} + \cdots,$$

wodurch der ursprüngliche Kettenbruch auf einen andern zurückgeführt wird, dessen Elemente nun rationale ganze Funktionen von ν sind.

§ 80. Zusammenhang mit Differentialgleichungen.

Die Kettenbrüche von dem im vorigen Paragraphen behandelten Typus lassen sich auf mehrfache Art mit gewissen Differentialgleichungen in Zusammenhang bringen. Bereits Euler hat in den meisten seiner Arbeiten, die von Kettenbrüchen handeln, einen Zusammenhang mit der Riccatischen Differentialgleichung hergestellt. Da aber eine Riccatische Differentialgleichung sich bekanntlich durch eine einfache Transformation in eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung verwandeln läßt und umgekehrt, so kann auch zwischen dieser letzteren und den Kettenbrüchen leicht ein Zusammenhang konstruiert werden. Wir bewerkstelligen dies nach *A. Steen* **1** in folgender Weise.

Sei

$$y = Q_0 y' + P_1 y'' \tag{1}$$

die Differentialgleichung, wobei die Akzente Differentiation nach der unabhängig Veränderlichen x andeuten, und wo Q_0, P_1 irgendwelche analytische Funktionen von x sind. Aus (1) folgt durch Differentiation

$$y' = Q_0' y' + Q_0 y'' + P_1' y'' + P_1 y''';$$

oder einfacher:

$$y' = Q_1 y'' + P_2 y''',$$

wobei

$$Q_1 = \frac{Q_0 + P_1'}{1 - Q_0'}, \quad P_2 = \frac{P_1}{1 - Q_0'}.$$

Durch wiederholte Differentiation erhält man so:

$$y^{(\nu)} = Q_\nu y^{(\nu+1)} + P_{\nu+1} y^{(\nu+2)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

wobei die Q_ν, $P_{\nu+1}$ sich rekursorisch aus folgenden Formeln ergeben:

$$(3)\qquad Q_\nu = \frac{Q_{\nu-1} + P'_\nu}{1 - Q'_{\nu-1}}, \quad P_{\nu+1} = \frac{P_\nu}{1 - Q'_{\nu-1}}.$$

Das Verfahren kann fortgesetzt werden, solange dabei $Q'_{\nu-1} \neq 1$ bleibt.

Aus dem Gleichungssystem (2) folgt nun nach § 57 unter gewissen Umständen:

$$\frac{y}{y'} = Q_0 + \frac{P_1|}{|Q_1} + \frac{P_2|}{|Q_2} + \cdots,$$

womit der gedachte Zusammenhang zwischen den Kettenbrüchen und den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung hergestellt ist.

Erstes Beispiel. Die Differentialgleichung

$$y = \frac{x}{n} y' + \frac{1}{n} y'',$$

wo n eine positive ganze Zahl, hat, wie man sofort verifiziert, das partikuläre Integral

$$y = x^n + 1\cdot\binom{n}{2} x^{n-2} + 1\cdot 3\binom{n}{4} x^{n-4} + 1\cdot 3\cdot 5\binom{n}{6} x^{n-6} + \cdots,$$

welches ein Polynom n^{ten} Grades ist. Es wird also $y^{(n)} \neq 0$, $y^{(n+1)} = 0$. Das Gleichungssystem (2) läßt sich nun hier am bequemsten bilden, indem man die gegebene Differentialgleichung ν-mal differenziert. Dadurch erhält man:

$$y^{(\nu)} = \frac{x}{n} y^{(\nu+1)} + \frac{\nu}{n} y^{(\nu)} + \frac{1}{n} y^{(\nu+2)},$$

oder einfacher und mit Rücksicht auf $y^{(n+1)} = 0$,

$$y^{(\nu)} = \frac{x}{n-\nu} y^{(\nu+1)} + \frac{1}{n-\nu} y^{(\nu+2)} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-2),$$

$$y^{(n-1)} = \frac{x}{1} y^{(n)}.$$

Nach Satz 44, Kap. VII folgt hieraus, weil $y^{(n)} \neq 0$ ist:

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{n} + \frac{\frac{1}{n}\Big|}{\Big|\frac{x}{n-1}} + \frac{\frac{1}{n-1}\Big|}{\Big|\frac{x}{n-2}} + \cdots + \frac{\frac{1}{2}\Big|}{\Big|\frac{x}{1}}$$

$$= \frac{x}{n} + \frac{\frac{n-1}{n}\Big|}{|\,x} + \frac{n-2\,|}{|\,x} + \frac{n-3\,|}{|\,x} + \cdots + \frac{1\,|}{|\,x}.$$

Oder, indem man mit n multipliziert und für y das obige Polynom einsetzt:

$$(4)\quad \begin{cases} x + \dfrac{n-1|}{|x} + \dfrac{n-2|}{|x} + \cdots + \dfrac{1|}{|x} \\[2ex] = \dfrac{x^n + 1\cdot\binom{n}{2}x^{n-2} + 1\cdot 3\binom{n}{4}x^{n-4} + 1\cdot 3\cdot 5\binom{n}{6}x^{n-6} + \cdots}{x^{n-1} + 1\cdot\binom{n-1}{2}x^{n-3} + 1\cdot 3\binom{n-1}{4}x^{n-5} + 1\cdot 3\cdot 5\binom{n-1}{6}x^{n-7} + \cdots}, \end{cases}$$

mit der Einschränkung, daß der Kettenbruch für die Nullstellen des rechts stehenden Nenners sinnlos wird.

Zweites Beispiel. Aus der Differentialgleichung

$$y = -\frac{x}{\alpha}y' + \frac{1}{\alpha}y''$$

folgt durch ν-malige Differentiation:

$$y^{(\nu)} = \frac{-x}{\alpha+\nu}y^{(\nu+1)} + \frac{1}{\alpha+\nu}y^{(\nu+2)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist also α positiv, x negativ, und y ein partikuläres Integral, das mit allen seinen Ableitungen positiv ist, so kommt nach Satz 46, Kap. VII (Bedingung A):

$$(5)\quad \frac{y}{y'} = \frac{-x}{\alpha} + \frac{\frac{1}{\alpha}\Big|}{\Big|\frac{-x}{\alpha+1}} + \frac{\frac{1}{\alpha+1}\Big|}{\Big|\frac{-x}{\alpha+2}} + \cdots \equiv \frac{-x}{\alpha} + \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha}\Big|}{|-x} + \frac{\alpha+2|}{|-x} + \frac{\alpha+3|}{|-x} + \cdots,$$

da ja dieser Kettenbruch nach Satz 10, Kap. VII sich als konvergent erweist. Ein partikuläres Integral von der verlangten Beschaffenheit ist nun wirklich vorhanden, nämlich

$$y = \int_0^\infty e^{ux - \frac{u^2}{2}} u^{\alpha-1}\, du.$$

Denn aus dieser Formel folgt einerseits durch ν-malige Differentiation[1]):

$$y^{(\nu)} = \int_0^\infty e^{ux - \frac{u^2}{2}} u^{\nu+\alpha-1}\, du,$$

---

1) Es würde zu weit führen, wenn wir hier ausführlich begründen wollten, daß die Differentiation unter dem Integralzeichen erlaubt ist. Es kann das auch um so eher dem Leser überlassen werden, als wir die Schlußformel (6) in § 83 noch auf eine zweite Art beweisen werden.

so daß also alle Ableitungen positiv sind; anderseits durch partielle Integration:

$$y = \frac{1}{\alpha_0}\int_0^\infty e^{ux-\frac{u^2}{2}}\,d(u^\alpha) = -\frac{1}{\alpha_0}\int_0^\infty e^{ux-\frac{u^2}{2}}(x-u)u^\alpha du = -\frac{x}{\alpha}y' + \frac{1}{\alpha}y'',$$

wie es sein soll. Da x negativ vorausgesetzt war, setzen wir $x = -\xi$ und erhalten dann aus (5) nach Multiplikation mit α:

$$(6)\quad \xi + \frac{\alpha+1|}{|\ \xi} + \frac{\alpha+2|}{|\ \xi} + \frac{\alpha+3|}{|\ \xi} + \cdots = \alpha \frac{\int\limits_0^\infty e^{-u\xi-\frac{u^2}{2}}u^{\alpha-1}du}{\int\limits_0^\infty e^{-u\xi-\frac{u^2}{2}}u^{\alpha}du} \qquad \begin{pmatrix}\alpha>0\\ \xi>0\end{pmatrix}$$

§ 81. Die Kettenbrüche mit dem allgemeinen Glied $\frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{a+b\nu|}{|c+d\nu}$.

I. Die Methode des vorigen Paragraphen soll jetzt speziell auf die Differentialgleichung

$$(1)\qquad \beta y = (\gamma - x)y' + xy'',$$

angewandt werden, wo β, γ Konstanten sind. Sucht man durch den Ansatz $y = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$ zu integrieren, so findet man für die Koeffizienten die Rekursionsformel:

$$(\beta + \nu)D_\nu = (\gamma + \nu)(1 + \nu)D_{\nu+1}.$$

Gehören daher die Zahlen β und $\gamma - \beta$ beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ an, so gibt es zwei Integrale dieser Form, nämlich

$$y_1 = \sum_{\nu=0}^{-\beta} D_\nu x^\nu, \quad y_2 = \sum_{\nu=-\gamma+1}^{\infty} D_\nu x^\nu.$$

Wir wollen diesen Fall in der Folge ausschließen. Dann gibt es ein und nur ein Integral, welches im Nullpunkt regulär ist, nämlich nach der obigen Rekursionsformel das folgende:

$$(2)\qquad y = \Phi_1(\beta, \gamma; x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\beta}{\Gamma(\gamma+1)}\frac{x}{1!} + \frac{\beta(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+2)}\frac{x^2}{2!} + \cdots;$$

dabei ist $\frac{1}{\Gamma(\varrho)} = 0$ zu setzen für $\varrho = 0, -1, -2, \ldots$. Φ_1 verschwindet identisch nur in dem ausgeschlossenen Fall; andernfalls ist die Reihe (2) beständig konvergent, also Φ_1 eine ganze Funktion von x und nicht identisch null.

Differenziert man Gleichung (1) ν-mal und setzt dann für y das Partikulärintegral Φ_1 ein, so kommt:

$$(3)\quad \begin{cases} (\beta+\nu)\Phi_1^{(\nu)}(\beta,\gamma;x) = (\gamma - x + \nu)\Phi_1^{(\nu+1)}(\beta,\gamma;x) + x\Phi_1^{(\nu+2)}(\beta,\gamma;x) \\ \qquad\qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Hier sei zunächst $\beta = -n$ eine negative ganze Zahl, also, damit nicht der ausgeschlossene Fall vorliegt: $\gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots$. Dann ist $\Phi_1(-n, \gamma; x)$ ein Polynom genau vom n^{ten} Grad, also

$$\Phi_1^{(n)}(-n,\gamma;x) \neq 0, \qquad \Phi_1^{(n+1)}(-n,\gamma;x) = 0,$$

so daß man aus (3) erhält:

$$\Phi_1^{(\nu)}(-n,\gamma;x) = -\frac{\gamma - x + \nu}{n-\nu}\Phi_1^{(\nu+1)}(-n,\gamma;x) - \frac{x}{n-\nu}\Phi_1^{(\nu+2)}(-n,\gamma;x)$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n-2),$$

$$\Phi_1^{(n-1)}(-n,\gamma;x) = -\frac{\gamma - x + n - 1}{1}\Phi_1^{(n)}(-n,\gamma;x).$$

Nach Satz 44, Kap. VII folgt hieraus:

$$\frac{\Phi_1(-n,\gamma;x)}{\Phi_1'(-n,\gamma;x)} = -\frac{\gamma - x}{n} - \frac{\frac{x}{n}\,|}{\left|-\frac{\gamma - x + 1}{n-1}\right.} - \frac{\frac{x}{n-1}\,|}{\left|-\frac{\gamma - x + 2}{n-2}\right.} - \cdots - \frac{\frac{x}{2}\,|}{\left|-\frac{\gamma - x + n - 1}{1}\right.}$$

$$= \frac{\gamma - x}{-n} + \frac{\frac{n-1}{n}x\,|}{|\gamma - x + 1} - \frac{(n-2)x\,|}{|\gamma - x + 2} - \frac{(n-3)x\,|}{|\gamma - x + 3} - \cdots - \frac{1 \cdot x\,|}{|\gamma - x + n - 1},$$

oder nach Multiplikation mit $-n$:

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma - x - \dfrac{(n-1)x\,|}{|\gamma - x + 1} - \dfrac{(n-2)x\,|}{|\gamma - x + 2} - \cdots - \dfrac{1 \cdot x\,|}{|\gamma - x + n - 1} = -n\dfrac{\Phi_1(-n,\gamma;x)}{\Phi_1'(-n,\gamma;x)} \\ \qquad\qquad (\gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots), \end{cases}$$

wobei für die Nullstellen des rechts stehenden Nenners der Kettenbruch sinnlos ist; außerdem folgt aus dem genannten Satz, daß für alle von $x = 0$ verschiedenen Nullstellen des Nenners der Zähler nicht auch verschwinden kann, weil die Teilzähler des Kettenbruches alle von Null verschieden sind. Übrigens läßt sich auch für die ausgeschlossenen Werte von γ der Kettenbruch in ähnlicher Weise berechnen (*Perron* 4); man braucht bloß statt Φ_1 das oben angedeutete Integral y_1 zu setzen, welches ja auch ein Polynom vom Grad $-\beta = n$ ist, worauf wir aber nicht weiter eingehen wollen.

Wir wenden uns jetzt dem Fall $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ zu. Dann folgt aus (3):

$$(5)\quad \Phi_1^{(\nu)}(\beta, \gamma; x) = \frac{\gamma - x + \nu}{\beta + \nu} \Phi_1^{(\nu+1)}(\beta, \gamma; x) + \frac{x}{\beta + \nu} \Phi_1^{(\nu+2)}(\beta, \gamma; x) \quad (\nu \geqq 0)$$

Auf dieses Gleichungssystem kann man für $x \neq 0$ den Satz 46, Kap. VII anwenden, und zwar das Kriterium D mit $\varrho_2 = 0$, sobald sich zeigen läßt, daß nicht alle $\Phi_1^{(\nu)}$ verschwinden, und daß

$$(6)\qquad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|\Phi_1^{(\nu)}(\beta, \gamma; x)|} = \text{endlich}$$

ist. Würden aber alle Ableitungen $\Phi_1^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ für einen gewissen Wert $x = x_0$ verschwinden, so wäre Φ_1, wie die Entwicklung nach Potenzen von $x - x_0$ zeigt, identisch Null, entgegen unserer ausdrücklichen Feststellung. Ferner sieht man ohne weiteres, es ist identisch

$$(7)\qquad \Phi_1'(\beta, \gamma; x) = \beta \Phi_1(\beta + 1, \gamma + 1; x);$$

also auch für große ν:

$$\Phi_1^{(\nu)}(\beta, \gamma; x) = \beta(\beta + 1) \ldots (\beta + \nu - 1) \Phi_1(\beta + \nu, \gamma + \nu; x)$$

$$= \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\Gamma(\gamma+\nu)} \left(1 + \frac{\beta+\nu}{\gamma+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{(\beta+\nu)(\beta+\nu+1)}{(\gamma+\nu)(\gamma+\nu+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots\right).$$

Ist nun m irgendeine ganze Zahl größer als $|\beta|$ und größer als $2|\gamma|$, so ist für $\lambda \geqq m$:

$$\left|\frac{\beta+\lambda}{\gamma+\lambda}\right| \leqq \frac{\lambda + |\beta|}{\lambda - |\gamma|} < \frac{\lambda + \lambda}{\lambda - \frac{1}{2}\lambda} = 4.$$

Daher für $\nu > m$:

$$|\Phi_1^{(\nu)}(\beta, \gamma; x)| = \left|\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{\Gamma(\gamma+m)} \frac{\beta+m}{\gamma+m} \cdots \frac{\beta+\nu-1}{\gamma+\nu-1}\right|$$

$$\times \left|1 + \frac{\beta+\nu}{\gamma+\nu}\frac{x}{1!} + \frac{\beta+\nu}{\gamma+\nu}\frac{\beta+\nu+1}{\gamma+\nu+1}\frac{x^2}{2!} + \cdots\right|$$

$$< \left|\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{\Gamma(\gamma+m)}\right| \cdot 4^{\nu-m}\left(1 + \frac{|4x|}{1!} + \frac{|4x|^2}{2!} + \cdots\right)$$

$$= \left|\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}{4^m \Gamma(\gamma+m)}\right| e^{4|x|} \cdot 4^\nu.$$

Zieht man die ν^{te} Wurzel, so ergibt sich die zu beweisende Beziehung (6), so daß man wirklich den Satz 46, Kap. VII auf das Gleichungssystem (5) anwenden darf. Dadurch erhält man für $x \neq 0$:

$$\frac{\Phi_1(\beta,\gamma;x)}{\Phi_1'(\beta,\gamma;x)} = \frac{\gamma-x}{\beta} + \frac{\frac{x}{\beta}\,|}{|\frac{\gamma-x+1}{\beta+1}} + \frac{\frac{x}{\beta+1}\,|}{|\frac{\gamma-x+2}{\beta+2}} + \cdots$$

$$= \frac{\gamma-x}{\beta} + \frac{\frac{(\beta+1)x}{\beta}\,|}{|\gamma-x+1} + \frac{(\beta+2)x\,|}{|\gamma-x+2} + \cdots,$$

oder nach Multiplikation mit β und mit Rücksicht auf (7):

$$(8)\begin{cases} \gamma-x+\dfrac{(\beta+1)x\,|}{|\gamma-x+1}+\dfrac{(\beta+2)x\,|}{|\gamma-x+2}+\dfrac{(\beta+3)x\,|}{|\gamma-x+3}+\cdots=\dfrac{\Phi_1(\beta,\gamma;x)}{\Phi_1(\beta+1,\gamma+1;x)} \\ \qquad (x \neq 0;\ \beta \neq -1,-2,-3,\ldots) \qquad (\textit{Perron } 4), \end{cases}$$

wobei für die Nullstellen des rechts stehenden Nenners der Zähler nicht verschwindet, und der Kettenbruch unwesentlich divergiert. Nach unserm Beweis ist zwar in (8) der Wert $\beta = 0$ auch auszuschließen; doch kann dieser nachträglich wieder zugelassen werden, sogar zusammen mit $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$. Die Gleichung (5) geht nämlich für $\nu = 0$ wegen (7) über in

$$\Phi_1(\beta,\gamma;x) = (\gamma-x)\,\Phi_1(\beta+1,\gamma+1;x) + (\beta+1)x\,\Phi_1(\beta+2,\gamma+2;x),$$

und diese gilt, wie man durch Einsetzen der Potenzreihen für Φ_1 leicht verifiziert, auch für $\beta = 0$. Es ist daher

$$\frac{\Phi_1(0,\gamma;x)}{\Phi_1(1,\gamma+1;x)} = \gamma - x + \frac{x\,|}{|\frac{\Phi_1(1,\gamma+1;x)}{\Phi_1(2,\gamma+2;x)}},$$

und wenn man hier rechts den Kettenbruch (8) für $\beta = 1$ einsetzt, wobei γ um eine Einheit zu erhöhen ist, so geht gerade die Formel (8) für $\beta = 0$ hervor.[1] Speziell für $\beta = 0$, $\gamma = -m$ kommt die Formel

$$(9)\qquad\begin{cases} -m-x+\dfrac{x\,|}{|1-m-x}+\dfrac{2x\,|}{|2-m-x}+\dfrac{3x\,|}{|3-m-x}+\cdots=0 \\ \qquad (x \neq 0;\ m = 0,1,2,\ldots) \qquad (\textit{Perron } 4), \end{cases}$$

die sich übrigens für $x = 1$ schon bei *Euler* 12 und *Trembley* 1, für $x = -1$ bei *Euler* 2 findet.

---

1) Nach Satz 1, Kap. I. Die Sache bleibt richtig, der Beweis bedarf aber, um bei der benutzten letzten Hilfsformel Nullen als Nenner zu vermeiden, einer kleinen formalen Modifikation, die dem Leser überlassen sei, wenn x eine Nullstelle von $\Phi_1(1,\gamma+1;x)$ oder $\Phi_1(2,\gamma+2;x)$ ist. Beide Funktionen zugleich können nicht verschwinden, wie oben bei Formel (8) bemerkt wurde.

Die Formel (4) geht bei Berücksichtigung von (7) über in:

$$(10)\quad \begin{cases} \gamma - x + \cfrac{(-n+1)x|}{|\gamma - x + 1} + \cfrac{(-n+2)x|}{|\gamma - x + 2} + \cdots + \cfrac{(-1)\cdot x\quad|}{|\gamma - x + n - 1} \\ = \dfrac{\Phi_1(-n, \gamma; x)}{\Phi_1(-n+1, \gamma+1; x)} \qquad (\gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots); \end{cases}$$

das besagt aber, die Formel (8) ist auch richtig für negative ganze β, vorausgesetzt, daß man dann den Kettenbruch bei dem verschwindenden Teilzähler abbricht. Mit diesem Vorbehalt ist also in (8) nur mehr der Fall auszuschließen, daß die Zahlen $\beta + 1$ und $\gamma - \beta$ beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören; das ist auch ganz naturgemäß, weil in diesem Fall die rechte Seite von (8) die bedeutungslose Form $\frac{0}{0}$ hat.

II. Wenn man Gleichung (8) mit einer willkürlichen Zahl $\delta(\neq 0)$ multipliziert, erhält man

$$(11)\quad (\gamma - x)\delta + \frac{(\beta+1)x\delta^2\;|}{|(\gamma - x + 1)\delta} + \frac{(\beta+2)x\delta^2\;|}{|(\gamma - x + 2)\delta} + \cdots = \delta\, \frac{\Phi_1(\beta, \gamma; x)}{\Phi_1(\beta+1, \gamma+1; x)}.$$

Mit diesem Kettenbruch suchen wir nun den folgenden zu identifizieren:

$$c + \frac{a+b\,|}{|c+d} + \frac{a+2b\,|}{|c+2d} + \frac{a+3b\,|}{|c+3d} + \cdots \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0).$$

Es ergibt sich dabei:

$$a = \beta x \delta^2,\quad b = x\delta^2,\quad c = (\gamma - x)\delta,\quad d = \delta;$$

also durch Auflösung:

$$x = \frac{b}{d^2},\quad \beta = \frac{a}{b},\quad \gamma = \frac{b + cd}{d^2},\quad \delta = d.$$

Somit erhält man aus (11):

Satz 2. *Der Kettenbruch*

$$c + \frac{a+b\,|}{|c+d} + \frac{a+2b\,|}{|c+2d} + \frac{a+3b\,|}{|c+3d} + \cdots \qquad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

ist gleich dem Quotienten

$$d \cdot \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b+cd}{d^2}\right)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+b)\ldots(a+(\nu-1)b)}{d^{2\nu}\nu!\,\Gamma\left(\frac{b+cd}{d^2}+\nu\right)} \right)$$

$$: \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{b+cd}{d^2}+1\right)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a+b)(a+2b)\ldots(a+\nu b)}{d^{2\nu}\nu!\,\Gamma\left(\frac{b+cd}{d^2}+\nu+1\right)} \right),$$

vorausgesetzt, daß die Zahlen $\frac{a+b}{b}$ *und* $\frac{b+cd}{d^2} - \frac{a}{b}$ *nicht beide der Reihe* $0, -1, -2, \ldots$ *angehören. Verschwindet dabei ein Teilzähler, so ist der Kettenbruch bei diesem abzubrechen. Verschwindet der Nenner des Quotienten, so kann der Zähler nicht verschwinden, und der Kettenbruch ist dann unwesentlich divergent bezw., wenn er abbricht, sinnlos.* (*Perron* **4**.)

Beispiel. Für $a = 0$, $c = 1 - b$, $d = 1$ erhält man

$$(12) \qquad 1 - b + \frac{b\,|}{|2-b} + \frac{2b\,|}{|3-b} + \frac{3b\,|}{|4-b} + \cdots = \frac{b}{e^b - 1}$$

in Übereinstimmung mit der Formel (14) des § 45 für $x = -b$.

Allgemeiner erhält man für $a = 0$, $c = n - b$, $d = 1$ die Formel von *Padé* **1**:

$$(13) \qquad \begin{cases} n - b + \dfrac{b\,|}{|n+1-b} + \dfrac{2b\,|}{|n+2-b} + \dfrac{3b\,|}{|n+3-b} + \cdots \\[2ex] = \dfrac{b^n}{(n-1)!\left(e^b - 1 - \dfrac{b}{1!} - \cdots - \dfrac{b^{n-1}}{(n-1)!}\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

die für $b = 1$ schon *Euler* **2** kennt. Dagegen kommt für $a = 0$, $c = -n - b$, $d = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ wieder die Formel (9).

Der Satz 2 bleibt auch für $b = 0$ im wesentlichen richtig. Das läßt sich leicht mit Hilfe der Differentialgleichung

$$y = \gamma y' + x y''$$

herleiten, wobei man zunächst zu der Formel

$$(14) \qquad \gamma + \frac{x\,|}{|\gamma+1} + \frac{x\,|}{|\gamma+2} + \frac{x\,|}{|\gamma+3} + \cdots = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{1}{\Gamma(\gamma+\nu)} \dfrac{x^\nu}{\nu!}}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \dfrac{1}{\Gamma(\gamma+\nu+1)} \dfrac{x^\nu}{\nu!}} \quad (x \neq 0)$$

gelangt. Da diese aber mit der Gleichung (20) des § 57 identisch ist, so wollen wir auf die angedeutete neue Herleitung verzichten. Multiplizieren wir (14) mit der willkürlichen Zahl $d\,(\neq 0)$, so geht der Kettenbruch über in

$$\gamma d + \frac{xd^2\,|}{|\gamma d + d} + \frac{xd^2\,|}{|\gamma d + 2d} + \frac{xd^2\,|}{|\gamma d + 3d} + \cdots.$$

Setzen wir daher $\gamma d = c$, $xd^2 = a \neq 0$, also $\gamma = \frac{c}{d}$, $x = \frac{a}{d^2}$, so ergibt sich

Satz 3. *Für $a \neq 0$, $d \neq 0$ gilt die Formel*

$$c + \frac{a \mid}{\mid c + d} + \frac{a \mid}{\mid c + 2d} + \frac{a \mid}{\mid c + 3d} + \cdots$$

$$= d \cdot \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{d^{2\nu} \nu! \, \Gamma\left(\frac{c}{d} + \nu\right)} \right) : \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{d^{2\nu} \nu! \, \Gamma\left(\frac{c}{d} + \nu + 1\right)} \right),$$

mit der Einschränkung, daß der Kettenbruch unwesentlich divergiert, wenn der Nenner der rechten Seite verschwindet; der Zähler kann in diesem Falle nicht verschwinden. (*Euler* 4, *Perron* 4.)

Das ist nun gerade die Formel des Satz 2 für $b = 0$.

III. Die Differentialgleichung (1) geht durch die Transformation $y = e^x z$ über in die folgende:

$$(15) \qquad (\beta - \gamma) z = (\gamma + x) z' + x z''.$$

Diese hat das partikuläre Integral

$$z = \Phi_1(\gamma - \beta, \gamma; -x),$$

und das ist die einzige im Nullpunkt reguläre Funktion, welche der Differentialgleichung (15) genügt, wenn man wieder den Fall ausschließt, daß die Zahlen β und $\gamma - \beta$ beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören. Daher ist

$$(16) \qquad \Phi_1(\beta, \gamma; x) = C e^x \Phi_1(\gamma - \beta, \gamma; -x);$$

den Wert der Konstanten C findet man, indem man $x = 0$ setzt, wobei aber, falls $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$ ist, zuvor durch $x^{1-\gamma}$ zu dividieren ist. Es kommt in allen Fällen: $C = 1$.

Durch logarithmische Differentiation folgt aus (16):

$$\frac{\Phi_1'(\beta, \gamma; x)}{\Phi_1(\beta, \gamma; x)} = 1 - \frac{\Phi_1'(\gamma - \beta, \gamma; -x)}{\Phi_1(\gamma - \beta, \gamma; -x)}$$

oder mit Rücksicht auf (7):

$$\frac{\beta \Phi_1(\beta + 1, \gamma + 1; x)}{\Phi_1(\beta, \gamma; x)} = 1 - \frac{(\gamma - \beta) \Phi_1(\gamma - \beta + 1, \gamma + 1; -x)}{\Phi_1(\gamma - \beta, \gamma; -x)}.$$

Wendet man auf beide Seiten dieser Gleichung die Formel (8) an und multipliziert mit x, so kommt:

$$(17) \begin{cases} \dfrac{\beta x \mid}{\mid \gamma - x} + \dfrac{(\beta + 1) x \mid}{\mid \gamma - x + 1} + \dfrac{(\beta + 2) x \mid}{\mid \gamma - x + 2} + \cdots \\[2ex] = x - \dfrac{(\gamma - \beta) x}{\gamma + x} - \dfrac{(\gamma - \beta + 1) x \mid}{\mid \gamma + x + 1} - \dfrac{(\gamma - \beta + 2) x \mid}{\mid \gamma + x + 2} - \cdots \quad (\textit{Perron } 4), \end{cases}$$

wobei im Fall eines verschwindenden Teilzählers der betreffende Kettenbruch bei diesem abzubrechen ist, und wobei die Gleichheit auch in der Weise stattfinden kann, daß jeder der beiden Kettenbrüche unwesentlich divergent bzw. sinnlos ist. Unsere Bedingung, daß die Zahlen β und $\gamma - \beta$ nicht beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören dürfen, läßt sich dann dahin aussprechen, daß wenigstens einer der beiden Kettenbrüche (17) nicht abbricht. Übrigens läßt sich auch umgekehrt zeigen, wovon wir aber absehen wollen, daß die Formel (17) für $x \neq 0$ niemals richtig ist, wenn beide Kettenbrüche abbrechen (*Perron* 4). Am interessantesten und nützlichsten ist nun der Fall, daß einer der beiden abbricht. Setzt man etwa $\beta - \gamma = n = 0, 1, 2, \ldots$, so kommt

Satz 4. *Der unendliche Kettenbruch*

$$\frac{(\gamma+n)x|}{|\gamma - x} + \frac{(\gamma+n+1)x|}{|\gamma - x + 1} + \frac{(\gamma+n+2)x|}{|\gamma - x + 2} + \cdots,$$

wobei $n = 0, 1, 2, \ldots$ *ist, während* γ *und* x *ganz beliebige Zahlen sind, nur so, daß kein Teilzähler verschwindet, ist gleich dem endlichen Kettenbruch*

$$x + \frac{nx|}{|\gamma + x} + \frac{(n-1)x|}{|\gamma + x + 1} + \frac{(n-2)x}{|\gamma + x + 2} + \cdots + \frac{1 \cdot x|}{|\gamma + x + n - 1}.$$

Falls dieser letztere sinnlos ist, ist der erste unwesentlich divergent.

Erstes Beispiel. Für $n = 0$ und $n = 1$ erhält man:

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\gamma x|}{|\gamma - x} + \dfrac{(\gamma+1)x|}{|\gamma - x + 1} + \dfrac{(\gamma+2)x|}{|\gamma - x + 2} + \cdots = x \\ (\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots;\ x \neq 0), \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{(\gamma+1)x|}{|\gamma - x} + \dfrac{(\gamma+2)x|}{|\gamma - x + 1} + \dfrac{(\gamma+3)x|}{|\gamma - x + 2} + \cdots = \dfrac{x(\gamma+1+x)}{\gamma + x} \\ (\gamma \neq -1, -2, -3, \ldots;\ x \neq 0). \end{cases}$$

Da in (19) für $x = -\gamma$ der Nenner rechts verschwindet, wird der Kettenbruch unwesentlich divergieren. Geht man also zum reziproken Wert über, so kommt:

$$(20)\quad \begin{cases} 2\gamma - \dfrac{(\gamma+2)\gamma|}{|2\gamma + 1} - \dfrac{(\gamma+3)\gamma}{|2\gamma + 2} - \dfrac{(\gamma+4)\gamma|}{2\gamma + 3} - \cdots = 0 \\ (\gamma \neq -2, -3, -4, \ldots) \qquad (\textit{Perron } 4). \end{cases}$$

Wir haben hierbei den Wert $\gamma = -1$ nicht ausgeschlossen, weil er nachträglich wieder zugelassen werden kann; dann geht nämlich die bereits bewiesene Formel (9) für $m = x = 1$ hervor. Auch der Fall $\gamma = 0$, der allerdings kein Interesse bietet, ist offenbar zulässig.

Zweites Beispiel. Für $\gamma = x = 1$ erhält man, wenn $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist:

$$\frac{n+1\,|}{|\,0} + \frac{n+2\,|}{|\,1} + \frac{n+3\,|}{|\,2} + \cdots = 1 + \frac{n\,|}{|\,2} + \frac{n-1\,|}{|\,3} + \cdots + \frac{1\,|}{|\,n+1},$$

woraus sogleich auch folgt:

$$(21)\begin{cases} \dfrac{n+2\,|}{|\,1} + \dfrac{n+3\,|}{|\,2} + \dfrac{n+4\,|}{|\,3} + \cdots = \dfrac{n+1\,|}{|\,1} + \dfrac{n\,|}{|\,2} + \dfrac{n-1\,|}{|\,3} + \cdots + \dfrac{1\,|}{|\,n+1} \\ \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad\qquad (\textit{Euler } \mathbf{12}). \end{cases}$$

Der unendliche Kettenbruch links ist also für $n = 0, 1, 2, \ldots$ stets rational. Dagegen ist das für $n = -1$ nicht mehr der Fall, da er dann nach (12) für $b = 1$ den Wert $\frac{1}{e-1}$ hat.

IV. In der Theorie der Gammafunktion setzt man

$$(22) \qquad P_x(\gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{x^{\gamma+\nu}}{\gamma+\nu} \qquad (\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots),$$

wofür man, wenn γ oder wenigstens der reelle Teil von γ positiv ist, auch schreiben kann:

$$(23) \qquad P_x(\gamma) = \int_0^x e^{-u} u^{\gamma-1} du \qquad (\Re(\gamma) > 0).$$

Das ergibt sich einfach, indem man für e^{-u} die gewöhnliche Reihe setzt und dann gliedweise integriert. Aus (22) folgt sogleich durch Vergleich mit (2):

$$(24) \qquad P_x(\gamma) = \Gamma(\gamma) x^\gamma \Phi_1(\gamma, \gamma+1; -x),$$

und daher nach (16) auch, weil dort $C = 1$ sein mußte:

$$(25) \qquad P_x(\gamma) = \Gamma(\gamma) x^\gamma e^{-x} \Phi_1(1, \gamma+1; x).$$

Demnach ergibt sich aus (8) für $\beta = 0$, wenn man zum reziproken Wert übergeht:

$$(26) \quad e^x x^{-\gamma} P_x(\gamma) = \frac{1\,|}{|\,\gamma - x} + \frac{1x\,|}{|\,\gamma - x + 1} + \frac{2x\,|}{|\,\gamma - x + 2} + \frac{3x\,|}{|\,\gamma - x + 3} + \cdots$$

(*Schlömilch* **2**, *Perron* **4**).

Einen zweiten Kettenbruch für $P_x(\gamma)$ erhält man, wenn man in (17) β, γ ersetzt durch $1, \gamma + 1$; dadurch kommt zunächst:

$$\frac{x\,|}{|\,\gamma - x + 1} + \frac{2x\,|}{|\,\gamma - x + 2} + \frac{3x\,|}{|\,\gamma - x + 3} + \cdots$$

$$= x - \frac{\gamma x\,|}{|\,\gamma + x + 1} - \frac{(\gamma+1)x\,|}{|\,\gamma + x + 2} - \frac{(\gamma+2)x\,|}{|\,\gamma + x + 3} - \cdots.$$

Addiert man beiderseits $\gamma - x$ und geht dann zum reziproken Wert über, so kommt links gerade der Kettenbruch (26), und man erhält also auch:

$$(27)\quad e^x x^{-\gamma} P_x(\gamma) = \frac{1|}{|\gamma} - \frac{\gamma x|}{|\gamma + x + 1} - \frac{(\gamma+1)x|}{|\gamma + x + 2} - \frac{(\gamma+2)x|}{|\gamma + x + 3} - \cdots$$

(*Nachreiner* 1, *Lerch* 1, *Perron* 4).

§ 82. Die Kettenbrüche mit dem allgemeinen Glied $\frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{a + b\nu + c\nu^2|}{|d + e\nu}$.

I. Wir behandeln jetzt nach der gleichen Methode die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(1)\qquad \alpha\beta y = [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' + (x - x^2)y''.$$

Eine versuchsweise Integration durch den Ansatz $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu x^\nu$ liefert für die Koeffizienten D_ν die Rekursionsformel

$$(\alpha + \nu)(\beta + \nu)D_\nu = (\gamma + \nu)(1 + \nu)D_{\nu+1}.$$

Wenn daher die Zahlen α und $\gamma - \alpha$ beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören, so gibt es zwei Integrale dieser Form, nämlich:

$$y_1 = \sum_{\nu=0}^{-\alpha} D_\nu x^\nu, \quad y_2 = \sum_{\nu=-\gamma+1}^{\infty} D_\nu x^\nu.$$

Das gleiche tritt ein, wenn die Zahlen β und $\gamma - \beta$ beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören. Diese zwei Fälle schließen wir von nun an aus. Dann gibt es ein und nur ein im Nullpunkt reguläres Integral unserer Differentialgleichung, nämlich nach der obigen Rekursionsformel das folgende:

$$(2)\quad y = F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \frac{\alpha\beta}{\Gamma(\gamma+1)}\frac{x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\Gamma(\gamma+2)}\frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

Diese Reihe verschwindet identisch nur in den ausgeschlossenen Fällen. Andernfalls hat sie den Konvergenzradius 1; nur wenn mindestens eine der Zahlen α, β gleich $0, -1, -2, \ldots$ ist, bricht sie ab, ohne identisch zu verschwinden. Außerdem genügt sie, wie man sofort verifiziert, der Funktionalgleichung

$$(3)\qquad F_1'(\alpha, \beta, \gamma; x) = \alpha\beta F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x),$$

wo der Akzent Differentiation nach x bedeutet.

Die Differentialgleichung (1) hat im Endlichen nur die singulären Stellen $x = 0$ und $x = 1$. Schneiden wir also die x-Ebene längs der reellen Achse von $+1$ bis $+\infty$ auf, so ist die Reihe (2), da sie für $x = 0$ regulär ist, eine in der aufgeschnittenen Ebene überall reguläre und eindeutig fortsetzbare analytische Funktion; wir wollen sie überall mit F_1 bezeichnen. In der Umgebung einer beliebigen Stelle ξ, die nicht dem Schnitt angehört, gilt dann die Taylorsche Reihe

$$(4) \qquad F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} F_1^{(\nu)}(\alpha, \beta, \gamma; \xi)(x - \xi)^{\nu}.$$

Ihr Konvergenzradius ist, wenn α, β von $0, -1, -2, \ldots$ verschieden sind, endlich, da F_1 alsdann keine ganze Funktion ist. Weil aber die Differentialgleichung im Endlichen nur die singulären Punkte $x = 0$ und $x = 1$ hat, weil das Partikulärintegral F_1 für $x = 0$ regulär ist, weil endlich jede Stelle ξ in der aufgeschnittenen Ebene geradlinig vom Nullpunkt aus erreicht werden kann, wird der Konvergenzkreis der Reihe (4) gerade bis zum Punkt $x = 1$ reichen. Der Konvergenzradius ist also gleich $|1 - \xi|$ und nach der Cauchy-Hadamardschen Formel für den Konvergenzradius ergibt sich somit:

$$(5) \quad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{\nu!} F_1^{(\nu)}(\alpha, \beta, \gamma; \xi)\right|} = \frac{1}{|1 - \xi|} \quad (\text{für } \alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

Nach diesen Vorbereitungen differenzieren wir die Gleichung (1) ν-mal und setzen dann für y das Partikulärintegral F_1 ein; so ergibt sich:

$$(6) \quad \begin{cases} \quad (\alpha + \nu)(\beta + \nu) F_1^{(\nu)}(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ = [\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x] F_1^{(\nu+1)}(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ + (x - x^2) F_1^{(\nu+2)}(\alpha, \beta, \gamma; x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Nun seien zunächst die Zahlen α, β von Null verschieden, aber wenigstens eine von beiden negativ ganz. Wegen der Symmetrie in α, β dürfen wir annehmen, daß etwa $\alpha = -n$, und β von $0, -1, \ldots -(n-1)$ verschieden ist; zugleich muß auch, damit nicht einer der ausgeschlossenen Fälle vorliegt, $\gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots$ vorausgesetzt werden, aber weitere Einschränkungen sind nicht nötig. Dann ist F_1 ein Polynom vom n^{ten} (nicht geringeren) Grad, also

$$F_1^{(n)}(-n, \beta, \gamma; x) \neq 0, \quad F_1^{(n+1)}(-n, \beta, \gamma; x) = 0,$$

so daß aus (6) speziell hervorgeht:

$$F_1^{(\nu)}(-n, \beta, \gamma; x) = -\frac{\gamma + \nu - (2\nu + 1 - n + \beta)x}{(n-\nu)(\beta+\nu)} F_1^{(\nu+1)}(-n, \beta, \gamma; x)$$

$$-\frac{x - x^2}{(n-\nu)(\beta+\nu)} F_1^{(\nu+2)}(-n, \beta, \gamma; x) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-2),$$

$$F_1^{(n-1)}(-n, \beta, \gamma; x) = -\frac{\gamma + n - 1 - (n - 1 + \beta)x}{1 \cdot (\beta + n - 1)} F_1^{(n)}(-n, \beta, \gamma; x).$$

Nach Satz 44, Kap. VII folgt hieraus:

$$\frac{F_1(-n, \beta, \gamma; x)}{F_1'(-n, \beta, \gamma; x)} = -\frac{\gamma - (1 - n + \beta)x}{n \cdot \beta} - \frac{\frac{x - x^2}{n \cdot \beta}}{\left| -\frac{\gamma + 1 - (3 - n + \beta)x}{(n-1)(\beta+1)} \right.} - \cdots$$

$$-\frac{\frac{x - x^2}{2 \cdot (\beta + n - 2)}}{\left| -\frac{\gamma + n - 1 - (n - 1 + \beta)x}{1 \cdot (\beta + n - 1)} \right.} = \frac{\gamma - (1 - n + \beta)x}{-n \cdot \beta} + \frac{\frac{(n-1)(\beta+1)(x-x^2)}{n \cdot \beta}\Big|}{|\, \gamma + 1 - (3 - n + \beta)x}$$

$$-\frac{(n-2)(\beta+2)(x-x^2)\,|}{|\, \gamma + 2 - (5 - n + \beta)x} - \cdots - \frac{1 \cdot (\beta + n - 1)(x - x^2)\,|}{|\, \gamma + n - 1 - (n - 1 + \beta)x},$$

oder nach Multiplikation mit $-n\beta$ und mit Rücksicht auf (3):

$$(7)\begin{cases} \gamma - (1 - n + \beta)x - \dfrac{(n-1)(\beta+1)(x-x^2)\,|}{|\, \gamma + 1 - (3 - n + \beta)x} - \dfrac{(n-2)(\beta+2)(x-x^2)\,|}{|\, \gamma + 2 - (5 - n + \beta)x} - \cdots \\ \qquad - \dfrac{1 \cdot (\beta + n - 1)(x - x^2)\,|}{|\, \gamma + n - 1 - (n - 1 + \beta)x} = \dfrac{F_1(-n, \beta, \gamma; x)}{F_1(-n + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x)} \\ \qquad (\beta \neq 0, -1, \ldots -(n-1);\ \gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots). \end{cases}$$

Dabei ist für die Nullstellen des rechts stehenden Nenners der Kettenbruch sinnlos. Für die von $x = 0$ und $x = 1$ verschiedenen Nullstellen dieses Nenners kann außerdem nach dem gleichen Satz der Zähler nicht verschwinden, weil dann alle Teilzähler des Kettenbruches von Null verschieden sind.

Wir wenden uns jetzt dem Fall $\alpha, \beta \neq 0, -1, -2, \ldots$ zu. Alsdann läßt sich das Gleichungssystem (6) folgendermaßen schreiben:

$$(8)\begin{cases} \dfrac{1}{\nu!} F_1^{(\nu)}(\alpha,\beta,\gamma;x) = \dfrac{(\nu+1)[\gamma + \nu - (2\nu + 1 + \alpha + \beta)x]}{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)} \dfrac{1}{(\nu+1)!} F_1^{(\nu+1)}(\alpha,\beta,\gamma;x) \\ + \dfrac{(\nu+1)(\nu+2)(x-x^2)}{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)} \dfrac{1}{(\nu+2)!} F_1^{(\nu+2)}(\alpha, \beta, \gamma; x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Da F_1 nicht identisch Null ist, so können nicht alle Ableitungen $F_1^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ verschwinden. Folglich ist auf (8) für $x - x^2 \neq 0$ der Satz 46, Kap. VII anwendbar, und zwar das Kriterium D, vorausgesetzt daß

$$\limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{\left|\frac{1}{\nu!} F_1^{(\nu)}(\alpha, \beta, \gamma; x)\right|} < \frac{1}{|\varrho_2|}$$

ist, unter ϱ_2 die absolut kleinere Wurzel der Gleichung

$$\varrho^2 = (1 - 2x)\varrho + x - x^2 \tag{9}$$

verstanden. Wegen (5) läßt sich dieser Bedingung die einfachere Form geben:

$$|1 - x| > |\varrho_2|.$$

Da die Wurzeln der Gleichung (9) aber $1 - x$ und $-x$ sind, so besagt das soviel wie $|1 - x| > |x|$. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß der reelle Teil von x kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; alsdann wird man also den Satz 46, Kap. VII auf das Gleichungssystem (8) anwenden können und erhält daher für $x \neq 0$ und $\Re(x) < \frac{1}{2}$:

$$\frac{F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F_1'(\alpha, \beta, \gamma; x)}$$

$$= \frac{1 \cdot [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]}{\alpha\beta} + \frac{\frac{1 \cdot 2(x - x^2)}{\alpha\beta}}{\left|\frac{2[\gamma + 1 - (3 + \alpha + \beta)x]}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}\right.} + \frac{\frac{2 \cdot 3(x - x^2)}{(\alpha + 1)(\beta + 1)}\Big|}{\left|\frac{3[\gamma + 2 - (5 + \alpha + \beta)x]}{(\alpha + 2)(\beta + 2)}\right.} + \cdots$$

$$= \frac{\gamma - (1 + \alpha + \beta)x}{\alpha\beta} + \frac{\frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(x - x^2)}{\alpha\beta}}{|\gamma + 1 - (3 + \alpha + \beta)x} + \frac{(\alpha + 2)(\beta + 2)(x - x^2)\,|}{|\,\gamma + 2 - (5 + \alpha + \beta)x} + \cdots;$$

oder nach Multiplikation mit $\alpha\beta$ und mit Rücksicht auf (3):

$$\text{(10)}\begin{cases} \gamma - (1 + \alpha + \beta)x + \dfrac{(\alpha + 1)(\beta + 1)(x - x^2)\,|}{|\,\gamma + 1 - (3 + \alpha + \beta)x} + \dfrac{(\alpha + 2)(\beta + 2)(x - x^2)\,|}{|\,\gamma + 2 - (5 + \alpha + \beta)x} \\ + \dfrac{(\alpha + 3)(\beta + 3)(x - x^2)\,|}{|\,\gamma + 3 - (7 + \alpha + \beta)x} + \cdots = \dfrac{F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x)} \\ \qquad (x \neq 0,\ \Re(x) < \frac{1}{2};\ \alpha, \beta \neq -1, -2, -3, \ldots), \end{cases}$$

wobei für die Nullstellen des rechtsstehenden Nenners der Zähler nicht verschwindet, und der Kettenbruch unwesentlich divergiert. Der Wert 0 für α oder β war zwar bei unserm Beweis auch auszuschließen; er kann aber nachträglich wieder zugelassen werden, sogar zusammen mit $\gamma = 0, -1, -2, \cdots$. Die Formel (8) ist nämlich für $\nu = 0$ wegen (3) gleichbedeutend mit:

$$F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x] F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x)$$
$$+ (\alpha + 1)(\beta + 1)(x - x^2) F_1(\alpha + 2, \beta + 2, \gamma + 2; x),$$

und diese Gleichung gilt, wie man durch Einsetzen der Potenzreihen für F_1 leicht verifiziert, auch für $\alpha\beta = 0$. Ist etwa $\beta = 0$, so folgt daraus:

$$\frac{F_1(\alpha, 0, \gamma; x)}{F_1(\alpha+1, 1, \gamma+1; x)} = \gamma - (1+\alpha)x + \frac{(\alpha+1)\cdot 1\cdot(x-x^2)\,|}{|\,\frac{F_1(\alpha+1, 1, \gamma+1; x)}{F_1(\alpha+2, 2, \gamma+2; x)}},$$

und wenn man hier rechts den Kettenbruch (10) für $\beta = 1$ einsetzt, wobei α und γ um eine Einheit zu erhöhen sind, so geht gerade die Formel (10) für $\beta = 0$ hervor.[1]) Genau so zeigt man auch, daß in der Formel (7) der dort ausgeschlossene Wert $\beta = 0$ tatsächlich noch erlaubt ist.

Schließlich sind in (10) auch noch die negativen ganzen Zahlen für α und β zulässig, vorausgesetzt, daß man dann den Kettenbruch bei dem ersten verschwindenden Teilzähler abbricht; alsdann geht nämlich (10) über in die schon bewiesene Formel (7). Mit diesem Vorbehalt sind somit in (10) endgültig nur die folgenden zwei Fälle auszuschließen:

1. Die Zahlen $\alpha + 1, \gamma - \alpha$ gehören beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ an.
2. Die Zahlen $\beta + 1, \gamma - \beta$ gehören beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ an.

In diesen Fällen würde ja auch die rechte Seite von (10) die bedeutungslose Form $\frac{0}{0}$ haben.

Wir bemerken hier noch die für $\beta = 0$, $\gamma = -m$ aus (10) hervorgehende Spezialformel:

$$(11)\quad \begin{cases} -m - (1+\alpha)x + \dfrac{1(\alpha+1)(x-x^2)\,|}{|\,1-m-(3+\alpha)x} + \dfrac{2(\alpha+2)(x-x^2)\,|}{|\,2-m-(5+\alpha)x} \\ \qquad + \dfrac{3(\alpha+3)(x-x^2)\,|}{|\,3-m-(7+\alpha)x} + \cdots = 0 \\ \text{für } m = 0, 1, 2, \ldots;\ \alpha \neq -1, -2, -3, \ldots;\ x \neq 0,\ \Re(x) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

II. Aus der Gleichung (10) entsteht durch Multiplikation mit einer willkürlichen Zahl $\delta (\neq 0)$:

$$[\gamma - (1+\alpha+\beta)x]\delta + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(x-x^2)\delta^2\,|}{|\,[\gamma+1-(3+\alpha+\beta)x]\delta}$$
$$+ \frac{(\alpha+2)(\beta+2)(x-x^2)\delta^2\,|}{|\,[\gamma+2-(5+\alpha+\beta)x]\delta} + \cdots = \delta\,\frac{F_1(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F_1(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1; x)}.$$

Mit diesem Kettenbruch suchen wir nun den folgenden zu identifizieren:

$$d + \frac{a+b+c\,|}{|\,d+e} + \frac{a+2b+4c\,|}{|\,d+2e} + \frac{a+3b+9c\,|}{|\,d+3e} + \frac{a+4b+16c\,|}{|\,d+4e} + \cdots.$$

1) Hier ist die Fußnote von Seite 475 sinngemäß zu wiederholen.

Dabei ergibt sich

$$(12)\qquad a = \alpha\beta(x - x^2)\delta^2$$

$$(13)\qquad b = (\alpha + \beta)(x - x^2)\delta^2$$

$$(14)\qquad c = (x - x^2)\delta^2$$

$$(15)\qquad d = [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]\delta$$

$$(16)\qquad e = (1 - 2x)\delta.$$

Aus (14) und (16) folgt auch noch:

$$(17)\qquad e^2 + 4c = \delta^2.$$

Da $\delta \neq 0$, $\Re(x) < \frac{1}{2}$, $x \neq 0$ sein muß, so ist wegen (14), (16), (17) jedenfalls

$$c \neq 0, \quad e \neq 0, \quad e^2 + 4c \neq 0$$

vorauszusetzen. Aus (16) und (17) folgt dann weiter

$$(18)\qquad x = \frac{1}{2} - \frac{e}{2\delta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{e}{\sqrt{e^2 + 4c}}.$$

Da $\Re(x) < \frac{1}{2}$ sein muß, so ist demnach auch der Fall auszuschließen, daß die Zahl $\frac{e^2}{e^2 + 4c}$ negativ reell ist; und das Vorzeichen der Wurzel in (18) ist dann so zu wählen, daß der reelle Teil von $\frac{e}{\sqrt{e^2 + 4c}}$ positiv wird. Die Zahlen α, β gehen aus (12), (13), (14) als die Wurzeln der quadratischen Gleichung $cz^2 - bz + a = 0$ hervor; endlich γ ergibt sich aus (15):

$$\gamma = (1 + \alpha + \beta)x + \frac{d}{\delta} = \left(1 + \frac{b}{c}\right)x + \frac{d}{\delta}$$

$$= \left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{e}{\sqrt{e^2 + 4c}}\right) + \frac{d}{\sqrt{e^2 + 4c}}.$$

Somit kommt schließlich, wenn wir uns der bequemeren Formulierung halber auf nicht abbrechende Kettenbrüche beschränken:

Satz 5. *Der unendliche Kettenbruch*

$$d + \frac{a + b + c|}{|d + e} + \frac{a + 2b + 4c|}{|d + 2e} + \frac{a + 3b + 9c|}{|d + 3e} + \frac{a + 4b + 16c|}{|d + 4e} + \cdots$$

mit lauter von Null verschiedenen Teilzählern, bei welchem außerdem $c \neq 0$, $e \neq 0$, $e^2 + 4c \neq 0$ *und die Zahl* $\frac{e^2 + 4c}{e^2}$ *nicht negativ reell ist, ist gleich dem Quotienten*

$$\sqrt{e^2 + 4c} \cdot F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) : F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x).$$

Dabei bedeutet F_1 die durch Formel (2) definierte Reihe und deren analytische Fortsetzung für $\Re(x) < \frac{1}{2}$. Ferner sind α, β die Wurzeln der quadratischen Gleichung $cz^2 - bz + a = 0$; endlich ist

$$\gamma = \frac{b+c}{2c}\left(1 - \frac{e}{\sqrt{e^2+4c}}\right) + \frac{d}{\sqrt{e^2+4c}}; \quad x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e}{\sqrt{e^2+4c}}\right),$$

und das Vorzeichen der Quadratwurzel muß überall so gewählt werden, daß $\Re\left(\frac{e}{\sqrt{e^2+4c}}\right) > 0$ wird.

Verschwindet der Nenner des Quotienten, so kann der Zähler nicht verschwinden, und der Kettenbruch ist dann unwesentlich divergent.

Beispiel. Bei dem Kettenbruch

$$1 + \frac{1\cdot 2|}{|2} + \frac{2\cdot 3|}{|3} + \frac{3\cdot 4|}{|4} + \frac{4\cdot 5|}{|5} + \cdots$$

ist $a = 0$, $b = c = d = e = 1$. Man erhält also:

$$\alpha = 0, \ \beta = 1, \ \gamma = 1, \ x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

und der Kettenbruch ist daher gleich

$$\sqrt{5}\,\frac{F_1\left(0, 1, 1; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)}{F_1\left(1, 2, 2; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)} = \frac{\sqrt{5}}{F_1\left(1, 2, 2; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)}.$$

Nun ist aber

$$F_1\left(1, 2, 2; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right) = 1 + \frac{1\cdot 2}{2!\,1!}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \frac{(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)}{3!\,2!}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)^2$$

$$+ \frac{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3\cdot 4)}{4!\,3!}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)^3 + \cdots = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}.$$

Der Kettenbruch wird also gleich

$$\sqrt{5} : \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

In der Tat ist er auch äquivalent mit $1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots$.

III. Die Differentialgleichung (1) geht durch die Transformation $y = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} z$ über in die folgende:

$$(19)\quad (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z = [\gamma-(1+\gamma-\alpha+\gamma-\beta)x]z' + (x-x^2)z'',$$

die von gleicher Bauart ist und das partikuläre Integral hat:

$$(20)\qquad z = F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x).$$

Die Funktion (20) ist nicht identisch Null und ist das einzige im Nullpunkt reguläre Integral der Differentialgleichung (19), wenn wir wieder die Fälle ausschließen, daß jede der Zahlen α, $\gamma-\alpha$ oder jede der Zahlen β, $\gamma-\beta$ der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehört. Es ist daher

$$(21)\quad F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = C(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x).$$

Die Konstante C ist wieder gleich 1, was wir übrigens nicht brauchen. Durch logarithmische Differentiation folgt aus (21):

$$\frac{F_1'(\alpha,\beta,\gamma;x)}{F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)} = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{1-x} + \frac{F_1'(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x)}{F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x)},$$

oder unter Berücksichtigung von (3):

$$\frac{\alpha\beta F_1(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1;x)}{F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)}$$

$$= \frac{\alpha+\beta-\gamma}{1-x} + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F_1(\gamma-\alpha+1,\gamma-\beta+1,\gamma+1;x)}{F_1(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;x)}.$$

Auf beide Seiten dieser Gleichung wenden wir die Formel (10) an und ersetzen die entstehenden Kettenbrüche durch äquivalente, indem wir jedem Teilnenner den Multiplikator $\frac{1}{1-x}$ beifügen. Multiplizieren wir dann noch mit x und machen die Substitution $\frac{x}{1-x} = \xi$, wodurch die Bedingung $\Re(x) < \frac{1}{2}$ sich transformiert in $|\xi| < 1$, so kommt schließlich die schon von *Euler* 2 angegebene Formel:

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{\alpha\beta\xi\,|}{|\gamma-(1+\alpha+\beta-\gamma)\xi} + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\xi\,|}{|\gamma+1-(2+\alpha+\beta-\gamma)\xi} + \frac{(\alpha+2)(\beta+2)\xi\,|}{|\gamma+2-(3+\alpha+\beta-\gamma)\xi} + \cdots \\ = (\alpha+\beta-\gamma)\xi + \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\xi\,|}{|\gamma-(1-\alpha-\beta+\gamma)\xi} + \frac{(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta+1)\xi\,|}{|\gamma+1-(2-\alpha-\beta+\gamma)\xi} + \cdots, \end{cases}$$

wobei folgendes vorauszusetzen ist:

1) Es ist $|\xi| < 1$.

2) Nicht jede der zwei Zahlen $\alpha, \gamma - \alpha$ und auch nicht jede der zwei Zahlen $\beta, \gamma - \beta$ gehört der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ an.

3) Wenn nicht alle Teilzähler von Null verschieden sind, so ist der betreffende Kettenbruch beim ersten verschwindenden Teilzähler abzubrechen (bei dieser Festsetzung braucht offenbar auch $\xi = 0$ nicht mehr ausgeschlossen zu werden).

Übrigens kann die Gleichheit (22) auch wieder in der Weise stattfinden, daß jeder der beiden Kettenbrüche unwesentlich divergiert bzw. wenn er abbricht, sinnlos ist. Im Gegensatz zu der analogen Formel (17) des vorigen Paragraphen kann es aber hier vorkommen, daß beide Kettenbrüche abbrechen; denn es ist nicht ausgeschlossen, daß die Zahlen α und $\gamma - \beta$ beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören; nur darf dann weder $\gamma - \alpha$ noch β dieser Reihe angehören. Am nützlichsten ist der Fall, daß einer der beiden Kettenbrüche wirklich abbricht. Setzt man etwa $\alpha - \gamma = n = 0, 1, 2, \ldots$, so kommt

Satz 6. *Der Kettenbruch*

$$\frac{(\gamma+n)\beta\xi\,|}{|\,\gamma-(\beta+n+1)\xi} + \frac{(\gamma+n+1)(\beta+1)\xi\,|}{|\,\gamma+1-(\beta+n+2)\xi} + \frac{(\gamma+n+2)(\beta+2)\xi\,|}{|\,\gamma+2-(\beta+n+3)\xi} + \cdots$$

wobei $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist, während β, γ, ξ ganz beliebige Zahlen sind, nur so, daß $\gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots$ und daß $|\xi| < 1$, ist gleich dem endlichen Kettenbruch

$$(\beta+n)\xi - \frac{n(\gamma-\beta)\xi\,|}{|\,\gamma+(\beta+n-1)\xi} - \frac{(n-1)(\gamma-\beta+1)\xi\,|}{|\,\gamma+1+(\beta+n-2)\xi}$$
$$- \frac{(n-2)(\gamma-\beta+2)\xi\,|}{|\,\gamma+2+(\beta+n-3)\xi} - \cdots - \frac{1\cdot(\gamma-\beta+n-1)\xi\,|}{|\,\gamma+n-1+\beta\xi}.$$

Falls dabei ein Teilzähler verschwindet, ist der betreffende Kettenbruch bei diesem abzubrechen. Ist der zweite Kettenbruch sinnlos, so ist der erste unwesentlich divergent, bzw. wenn er abbricht, ebenfalls sinnlos.[1])

Beispiel. Für $n = 0$ erhält man die Formel

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\beta\gamma\xi\,|}{|\,\gamma-(\beta+1)\xi} + \dfrac{(\beta+1)(\gamma+1)\xi\,|}{|\,\gamma+1-(\beta+2)\xi} + \dfrac{(\beta+2)(\gamma+2)\xi\,|}{|\,\gamma+2-(\beta+3)\xi} + \cdots = \beta\xi \\ \text{für } |\xi| < 1,\ \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, \end{cases}$$

welche bei *Euler* **2**, *Trembley* **1**, *Stern* **2** vorkommt. Wenn hier speziell $\gamma = \beta + 1$, so ist der Kettenbruch äquivalent mit dem periodischen

$$\frac{\beta\xi\,|}{|\,1-\xi} + \frac{\xi\,|}{|\,1-\xi} + \frac{\xi\,|}{|\,1-\xi} + \cdots,$$

---

1) Die Bedingung, daß β und $\gamma - \beta$ nicht beide der Reihe $0, -1, -2, \ldots$ angehören dürfen, konnte hier unterdrückt werden, da ihr Gegenteil mit unserer Forderung $\gamma + n \neq 0, -1, -2, \ldots$ ohnedies nicht verträglich ist.

und dieser hat für $|\xi| < 1$ den Wert $\beta\xi$, wie man in der Tat auch mit Hilfe von Satz 8, Kap. VI oder von Satz 38, Kap. VII leicht bestätigt.

Ist $\beta = -n$ eine negative ganze Zahl, so folgt aus (23):

$$(24)\begin{cases} \frac{n\gamma\xi\ |}{|\gamma+(n-1)\xi} - \frac{(n-1)(\gamma+1)\xi\ |}{|\gamma+1+(n-2)\xi} - \frac{(n-2)(\gamma+2)\xi\ |}{|\gamma+2+(n-3)\xi} - \cdots - \frac{1\cdot(\gamma+n-1)\xi\ |}{|\ \gamma+n-1} = n\xi, \\ \text{für } \gamma \neq 0, -1, -2, \ldots, -(n-1). \end{cases}$$

Nach unserem Beweis dieser Formel sind zwar zunächst **alle** negativen ganzen Zahlen für γ auszuschließen, und ist $|\xi| < 1$ vorauszusetzen. Allein beide Seiten der Gleichung (24) sind rationale Funktionen von ξ und γ (speziell γ tritt, wie die rechte Seite zeigt, nur scheinbar auf). Dann müssen offenbar nur solche Werte von ξ und γ ausgeschlossen werden, welche nach Verwandlung des Kettenbruches in einen gewöhnlichen Bruch dessen Nenner und Zähler zum Verschwinden bringen. Für solche Werte verschwindet aber stets auch ein Teilzähler; es können daher nur die Werte $\xi = 0$ und $\gamma = 0, -1, \ldots -(n-1)$ sein; doch ist der triviale Wert $\xi = 0$ offenbar noch zulässig. Die Formel (24) ergibt sich übrigens auch unschwer aus (7) für $\beta = \gamma$.

IV. Nach Satz 1 wird der Kettenbruch mit dem allgemeinen Glied $\frac{a+b\nu+c\nu^2\ |}{|\ d+e\nu}$, wobei $c \neq 0$, $e \neq 0$ sein soll, gewiß konvergieren, wenn die Zahl $\frac{e^2+4c}{e^2}$ nicht Null und nicht negativ ist. Das ist nun gerade die Bedingung, welche wir auch in Satz 5 in Kauf nehmen mußten. Indes ist der Kettenbruch auch im Fall $e^2 + 4c = 0$ einer Behandlung zugänglich, wenn wir uns an früher erlangte Resultate erinnern. Nach § 57, Formel (12) ist nämlich, wenn $\frac{1}{z}$ statt x, und $\alpha + 1$ statt α geschrieben wird:

$$(25)\quad 1 + \frac{\alpha+1\ |}{|\ z} + \frac{\beta+1\ |}{|\ 1} + \frac{\alpha+2\ |}{|\ z} + \frac{\beta+2\ |}{|\ 1} + \cdots = \beta\,\frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{\beta-1}}{(z+u)^{\alpha+1}}\,du}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-u}u^{\beta}}{(z+u)^{\alpha+1}}\,du}$$

für reelle $\alpha \neq -1, -2, -3, \ldots$ und positive β, z. Wenn dabei auch α positiv, so ist der Kettenbruch mit einem Stieltjesschen äquivalent und, da er für positive z konvergiert, wird er nach Satz 6, Kap. IX für alle z, die nicht der negativ reellen Achse inklusive 0 angehören, konvergieren und eine reguläre analytische Funktion darstellen. Da aber für diese z auch die Integrale in (25) offenbar reguläre analytische Funktionen sind, wofür wir den ausführlichen Beweis übergehen wollen, so gilt für alle diese z auch die Gleichung (25).

Wir wollen jetzt auf den Kettenbruch (25) die Kontraktionsformel (8) des § 43 anwenden, sodann die entstehende Gleichung mit $z\delta$ multiplizieren, wo δ irgend eine von Null verschiedene Zahl bedeutet, und dann noch beiderseits die Zahl $\beta\delta$ hinzu addieren. Dadurch entsteht die Formel:

$$(26)\quad \begin{cases} (z+\alpha+\beta+1)\delta - \dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)\delta^2|}{|(z+\alpha+\beta+3)\delta} - \dfrac{(\alpha+2)(\beta+2)\delta^2|}{|(z+\alpha+\beta+5)\delta} - \cdots \\ = \beta\delta\left(1+z\dfrac{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{\beta-1}}{(z+u)^{\alpha+1}}du}{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{\beta}}{(z+u)^{\alpha+1}}du}\right) = \beta\delta\dfrac{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{\beta-1}}{(z+u)^{\alpha}}du}{\int\limits_0^\infty \frac{e^{-u}u^{\beta}}{(z+u)^{\alpha+1}}du} \end{cases}$$

für $\alpha > 0$, $\beta > 0$, z nicht Null und nicht negativ. Mit diesem Kettenbruch läßt sich nun der folgende identifizieren:

$$(27)\quad d + \frac{a+b+c|}{|d+e} + \frac{a+2b+4c|}{|d+2e} + \frac{a+3b+9c|}{|d+3e} + \cdots \quad (c \neq 0,\ e \neq 0),$$

vorausgesetzt, daß die Wurzeln der Gleichung $cz^2 - bz + a = 0$ positiv sind, daß $e^2 + 4c = 0$ ist, und daß die Zahl $\frac{4b+2de-e^2}{e^2}$ nicht der negativ reellen Achse inklusive Null angehört. Dabei ergibt sich nämlich in der Tat:

$$a = -\alpha\beta\delta^2,\quad b = -(\alpha+\beta)\delta^2,\quad c = -\delta^2$$

$$d = (z+\alpha+\beta+1)\delta,\quad e = 2\delta.$$

Somit ist $\delta = \frac{e}{2}$. α, β sind die Wurzeln der Gleichung $cz^2 - bz + a = 0$, also nach Voraussetzung positiv; ferner wird $e^2 + 4c = 0$, wie es sein soll, und endlich ist

$$z = -(\alpha+\beta+1) + \frac{d}{\delta} = -\left(\frac{b}{c}+1\right) + \frac{2d}{e} = \frac{4b - e^2 + 2de}{e^2},$$

so daß z nach Voraussetzung nicht der negativ reellen Achse angehört. Die Identifizierung des Kettenbruchs (27) mit (26) ist damit geleistet.

Endlich läßt sich noch der soeben ausgeschlossene Fall vollständig erledigen, daß gleichzeitig

$$(28)\quad e^2 + 4c = 0,\quad 4b + 2de - e^2 = 0$$

ist, wobei wir gar nichts weiteres vorauszusetzen brauchen. Aus Satz 10, Kap. VI folgt nämlich, wenn wir zu dem dortigen Kettenbruch noch die Zahl $\beta + z$ hinzu addieren, sodann die Zahlen α, β, z resp. ersetzen

durch $\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2}$ (was eine Spezialisierung bedeutet) und schließlich mit einer willkürlichen Zahl $2\delta\ (\neq 0)$ multiplizieren:

$$(\alpha+\beta+1)\delta - \frac{(\alpha+1)(\beta+1)\delta^2|}{|(\alpha+\beta+3)\delta} - \frac{(\alpha+2)(\beta+2)\delta^2|}{|(\alpha+\beta+5)\delta} - \cdots$$

$$= \begin{cases} \alpha\delta, \text{ wenn } \Re(\alpha) > \Re(\beta), \text{ oder } \alpha = \beta \\ \beta\delta, \text{ wenn } \Re(\alpha) < \Re(\beta), \text{ oder } \alpha = \beta \\ \text{divergent, wenn } \alpha \neq \beta, \Re(\alpha) = \Re(\beta). \end{cases}$$

Dabei findet im Divergenzfall stets „wesentliche Divergenz“ statt, d. h. der Kettenbruch ist nicht einmal im weitern Sinne konvergent. Suchen wir nun hiermit den Kettenbruch (27) zu identifizieren, so kommt:

$$(29)\qquad \begin{cases} a = -\alpha\beta\delta^2, \quad b = -(\alpha+\beta)\delta^2, \quad c = -\delta^2, \\ \quad d = (\alpha+\beta+1)\delta, \quad e = 2\delta. \end{cases}$$

Daher ist wieder $\delta = \frac{e}{2}$, und α, β sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung $cz^2 - bz + a = 0$. Die übrigen Forderungen (29) sind dann wegen der Voraussetzungen (28) von selbst erfüllt. Somit ergibt sich

Satz 7. *Der Kettenbruch*

$$d + \frac{a+b+c|}{|d+e} + \frac{a+2b+4c|}{|d+2e} + \frac{a+3b+9c|}{|d+3e} + \frac{a+4b+16c|}{|d+4e} + \cdots,$$

dessen Teilzähler alle von Null verschieden sind, und bei welchem außerdem

$$c \neq 0, \quad e \neq 0, \quad e^2 + 4c = 0, \quad 4b + 2de - e^2 = 0$$

ist, hat den Wert $\frac{e}{2}z$, wo z diejenige Wurzel der Gleichung $cz^2 - bz + a = 0$ bedeutet, welche den größeren reellen Teil hat. Haben beide Wurzeln gleichen reellen Teil, so konvergiert der Kettenbruch nur, wenn z eine Doppelwurzel ist, und zwar wieder gegen den Wert $\frac{e}{2}z$. Andernfalls divergiert er und ist nicht einmal im weitern Sinne konvergent.

§ 83. Die Methode von Cesàro.

I. In anderer Weise hat *Cesàro* 1 gewisse Kettenbrüche mit Differentialgleichungen in Zusammenhang gebracht; doch wurde die gleiche Methode schon etwas früher von *Tannery* 1 in einem sehr speziellen Fall angewandt. Wir schicken zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Die Potenzreihen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

mögen für $|x| < \varrho$ konvergieren. Die Koeffizienten Q_n seien von einem gewissen n-Wert an alle positiv, und außerdem sei

$$\lim_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha, \quad \lim_{x=\varrho} \varphi(x) = \infty,$$

wenn sich x wachsend dem Wert ϱ nähert. Unter diesen Voraussetzungen ist auch

$$\lim_{x=\varrho} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \alpha.$$

Hilfssatz 2. *Die Potenzreihen*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

seien für alle x konvergent. Ferner seien die Koeffizienten Q_n von einem gewissen n-Wert an positiv, und $\lim\limits_{n=\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \alpha$. Unter diesen Voraussetzungen ist auch

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \alpha.$$

Beweis. Sei ε eine beliebig kleine positive Zahl. Nach Voraussetzung ist dann für hinreichend große n, etwa $n \geqq p$:

$$Q_n > 0, \quad P_n = (\alpha + \varepsilon_n) Q_n, \quad |\varepsilon_n| < \varepsilon.$$

Daher

$$(1) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \alpha = \frac{\sum\limits_{n=0}^{p-1} P_n x^n + \sum\limits_{n=p}^{\infty} (\alpha + \varepsilon_n) Q_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{p-1} Q_n x^n + \sum\limits_{n=p}^{\infty} Q_n x^n} - \alpha = \frac{\sum\limits_{n=0}^{p-1} (P_n - \alpha Q_n) x^n + \sum\limits_{n=p}^{\infty} \varepsilon_n Q_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{p-1} Q_n x^n + \sum\limits_{n=p}^{\infty} Q_n x^n}.$$

Im Fall des Hilfssatz 1 folgt hieraus für $0 < x < \varrho$:

$$(2) \qquad \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - \alpha \right| \leqq \frac{\sum\limits_{n=0}^{p-1} |P_n - \alpha Q_n| \varrho^n + \varepsilon \sum\limits_{n=p}^{\infty} Q_n x^n}{-\sum\limits_{n=0}^{p-1} |Q_n| \varrho^n + \sum\limits_{n=p}^{\infty} Q_n x^n},$$

sobald der Nenner positiv ist. Wegen $\lim\limits_{x=\varrho} \varphi(x) = \infty$ hat aber die Summe $\sum\limits_{n=p}^{\infty} Q_n x^n$ für $x = \varrho$ den Grenzwert ∞. Die rechte Seite der Ungleichung (2) hat also den Grenzwert ε, woraus die Behauptung des Hilfssatz 1 folgt, weil ja ε beliebig klein angenommen werden darf.

Im Fall des Hilfssatz 2 folgern wir aus (1) für $x > 1$:

$$(3)\begin{cases} \left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \alpha\right| \\ = \frac{\left|\sum_{n=0}^{p-1}(P_n - \alpha Q_n)x^{n-p} + \sum_{n=p}^{\infty}\varepsilon_n Q_n x^{n-p}\right|}{\left|\sum_{n=0}^{p-1} Q_n x^{n-p} + \sum_{n=p}^{\infty} Q_n x^{n-p}\right|} \leqq \frac{\sum_{n=0}^{p-1}|P_n - \alpha Q_n| + \varepsilon\sum_{n=p}^{\infty} Q_n x^{n-p}}{-\sum_{n=0}^{p-1}|Q_n| + \sum_{n=p}^{\infty} Q_n x^{n-p}}, \end{cases}$$

sobald der letzte Nenner positiv ist. Da aber offenbar

$$\lim_{x=\infty} \sum_{n=p}^{\infty} Q_n x^{n-p} = \infty,$$

so hat die rechte Seite von (3) für $\lim x = \infty$ den Grenzwert ε, woraus die Behauptung des Hilfssatz 2 folgt.

II. Wir untersuchen jetzt den Kettenbruch

$$(4) \qquad \frac{\alpha\beta|}{|\gamma} + \frac{(\alpha+\alpha_1)(\beta+\beta_1)|}{|\gamma+\gamma_1} + \frac{(\alpha+2\alpha_1)(\beta+2\beta_1)|}{|\gamma+2\gamma_1} + \frac{(\alpha+3\alpha_1)(\beta+3\beta_1)|}{|\gamma+3\gamma_1} + \cdots,$$

wobei wir

$$(5) \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha_1 > 0,\ \beta_1 \geqq 0,\ \gamma_1 \geqq 0$$

voraussetzen, so daß alle Elemente von (4) gewiß positiv sind (nur das Anfangsglied ist Null). Nach Satz 1 für $p = 1, 2$; $q = 0, 1$ ist der Kettenbruch (4) mindestens im weitern Sinne konvergent; da aber seine Elemente positiv sind, konvergiert er auch im engern Sinne. Wir bringen ihn jetzt auf die äquivalente limitärperiodische Form

$$(6) \qquad \frac{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\alpha_1}\Big|}{\Big|\frac{\gamma}{\alpha+\alpha_1}} + \frac{\frac{\beta+\beta_1}{\alpha+2\alpha_1}\Big|}{\Big|\frac{\gamma+\gamma_1}{\alpha+2\alpha_1}} + \frac{\frac{\beta+2\beta_1}{\alpha+3\alpha_1}\Big|}{\Big|\frac{\gamma+2\gamma_1}{\alpha+3\alpha_1}} + \frac{\frac{\beta+3\beta_1}{\alpha+4\alpha_1}\Big|}{\Big|\frac{\gamma+3\gamma_1}{\alpha+4\alpha_1}} + \cdots$$

und bezeichnen die Näherungszähler und -Nenner ν^{ter} Ordnung von (6) mit A_ν, B_ν. Dann sind alle A_ν, B_ν positiv (nur $A_0 = 0$), und es ist

$$(7)\begin{cases} A_0 = 0,\ A_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\alpha_1},\ A_n = \frac{\gamma+(n-1)\gamma_1}{\alpha+n\alpha_1} A_{n-1} + \frac{\beta+(n-1)\beta_1}{\alpha+n\alpha_1} A_{n-2} \quad (n \geqq 2) \\ B_0 = 1,\ B_1 = \frac{\gamma}{\alpha+\alpha_1},\ B_n = \frac{\gamma+(n-1)\gamma_1}{\alpha+n\alpha_1} B_{n-1} + \frac{\beta+(n-1)\beta_1}{\alpha+n\alpha_1} B_{n-2} \quad (n \geqq 2). \end{cases}$$

Aus diesen Rekursionsformeln erkennt man leicht, daß die beiden Reihen

$$(8) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

formal die folgenden linearen Differentialgleichungen befriedigen:

$$(9)\qquad \begin{cases} x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)f' + [\alpha - \gamma x - (\beta + \beta_1)x^2]f = \alpha\beta x \\ x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)\varphi' + [\alpha - \gamma x - (\beta + \beta_1)x^2]\varphi = \alpha . \end{cases}$$

Die zugehörige homogene Gleichung ist für beide die gleiche, nämlich:

$$(10)\qquad x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)y' + [\alpha - \gamma x - (\beta + \beta_1)x^2]y = 0 .$$

Da nach (5) nun $\alpha_1 > 0$ ist, so sind die Quotienten

$$\frac{\gamma + (n-1)\gamma_1}{\alpha + n\alpha_1}, \quad \frac{\beta + (n-1)\beta_1}{\alpha + n\alpha_1}$$

kleiner als eine von n unabhängige Schranke G, und aus (7) folgt daher

$$A_n < G(A_{n-1} + A_{n-2}),$$

also a fortiori

$$A_n + A_{n-1} < (G+1)(A_{n-1} + A_{n-2}) .$$

Hieraus schließt man aber sogleich

$$A_n + A_{n-1} < (G+1)^{n-1}(A_1 + A_0)$$

und daher erst recht

$$A_n < (G+1)^{n-1}(A_1 + A_0) .$$

Ebenso ist auch

$$B_n < (G+1)^{n-1}(B_1 + B_0) .$$

Infolgedessen hat jede der Reihen (8) einen von Null verschiedenen Konvergenzradius. Diese Reihen sind also wirkliche Integrale von (9) und konvergieren als solche mindestens in einem Kreis, der durch den dem Nullpunkt am nächsten gelegenen singulären Punkt der Gleichung (10) hindurchgeht. Ist ϱ ($\leqq \infty$) der Radius dieses Kreises, und ist, falls ϱ endlich, zugleich

$$\lim_{x=\varrho} \varphi(x) = \infty ,$$

so wird der Kettenbruch (4) oder (6), da seine Konvergenz ja feststeht, nach den Hilfssätzen 1 und 2 den Wert

$$(11)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{x=\varrho} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

haben. Der Grenzwert der rechten Seite kann aber durch Integration der Gleichungen (9) direkt berechnet werden. Ist y ein Integral der homogenen Gleichung (10), so erhält man die Integrale der Gleichungen (9), indem man $f(x) = yu$, $\varphi(x) = yv$ in (9) einsetzt. Dadurch ergibt sich:

$$x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)yu' = \alpha\beta x;$$
$$x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)yv' = \alpha .$$

Folglich

$$u = C_1 + \alpha\beta \int \frac{dx}{(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)\, y},$$

$$v = C_2 + \alpha \int \frac{dx}{x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2) y},$$

wo C_1, C_2 Integrationskonstanten sind. Schließlich kommt also

$$(12) \qquad \begin{cases} f(x) = y\left(C_1 + \alpha\beta \int \frac{dx}{(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2)\, y}\right) \\ \varphi(x) = y\left(C_2 + \alpha \int \frac{dx}{x(\alpha_1 - \gamma_1 x - \beta_1 x^2) y}\right). \end{cases}$$

Dabei sind nach willkürlicher Annahme einer unteren Integrationsgrenze die Konstanten C_1, C_2 noch passend zu bestimmen, damit $f(x)$, $\varphi(x)$ wirklich die Funktionen (8) werden. Wir wollen jetzt verschiedene Fälle im einzelnen durchrechnen.

III. Wir setzen zuerst

$$\beta_1 = \gamma_1 = 0; \quad \alpha_1 = \beta = 1.$$

Die Gleichung (10) lautet dann

$$(13) \qquad xy' + (\alpha - \gamma x - x^2)\, y = 0;$$

sie hat außer $x = 0$ keinen singulären Punkt im Endlichen, so daß der Konvergenzradius der Reihen (8) gleich ∞ ist. Bringt man (13) auf die Form

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\alpha}{x} + \gamma + x,$$

so folgt sogleich durch Integration

$$y = x^{-\alpha} e^{\gamma x + \frac{x^2}{2}}.$$

Daher nach (12):

$$f(x) = x^{-\alpha} e^{\gamma x + \frac{x^2}{2}} \left(C_1 + \alpha \int_0^x x^{\alpha} e^{-\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx\right),$$

$$\varphi(x) = x^{-\alpha} e^{\gamma x + \frac{x^2}{2}} \left(C_2 + \alpha \int_0^x x^{\alpha - 1} e^{-\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx\right);$$

denn, da α positiv, ist es offenbar erlaubt, die untere Integrationsgrenze 0 zu wählen. Da nun die außerhalb der Klammern stehenden Faktoren für $\lim x = 0$ unendlich werden, da aber die Funktionen $f(x)$, $\varphi(x)$

nach ihrer Definition (8) für $x = 0$ regulär sind, müssen die Klammergrößen für $x = 0$ verschwinden; dies gibt $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Daher ist

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\int\limits_0^x x^\alpha e^{-\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx}{\int\limits_0^x x^{\alpha-1} e^{-\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx}.$$

Der Kettenbruch ist nun nach dem Bewiesenen gleich dem Grenzwert dieses Quotienten für $x = \infty$. Also kommt:

$$\text{(14)} \qquad \frac{\alpha|}{|\gamma} + \frac{\alpha+1|}{|\gamma} + \frac{\alpha+2|}{|\gamma} + \cdots = \frac{\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx}{\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\gamma x - \frac{x^2}{2}} dx} \qquad (\alpha > 0, \gamma > 0),$$

da ja diese Integrale offenbar existieren. Damit ist die Formel (6) des § 80 zum zweitenmal bewiesen; man braucht nur, um sie genau zu erhalten, zum reziproken Wert überzugehen.

IV. Wir wenden uns jetzt zum Fall

$$\beta_1 = 0; \quad \alpha_1 = \gamma_1 = 1.$$

Die Differentialgleichung (10) lautet dann

$$\text{(15)} \qquad x(1-x)y' + (\alpha - \gamma x - \beta x^2)y = 0.$$

Sie hat im Endlichen nur die singulären Stellen $x = 0$ und $x = 1$, so daß der Konvergenzradius der Reihen $f(x)$, $\varphi(x)$ also mindestens 1 ist. Die Gleichung (15) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha - \beta - \gamma}{1-x} - \beta,$$

woraus durch Integration folgt:

$$y = x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta-\gamma} e^{-\beta x}.$$

Daher nach (12)

$$f(x) = x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta-\gamma} e^{-\beta x}\left(C_1 + \alpha\beta\int\limits_0^x x^\alpha (1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x} dx\right),$$

$$\varphi(x) = x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-\beta-\gamma} e^{-\beta x}\left(C_2 + \alpha\int\limits_0^x x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x} dx\right),$$

da die untere Integrationsgrenze 0 offenbar wieder erlaubt ist. Die außerhalb der Klammern stehenden Faktoren werden für $\lim x = 0$ wieder

unendlich, so daß die Klammergrößen selbst für $x = 0$ verschwinden müssen. Das ergibt wieder $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Setzt man dann noch

$$\beta + \gamma - \alpha > 0$$

voraus, so wird $\lim\limits_{x=1} \varphi(x) = \infty$, woraus auch folgt, daß der Konvergenzradius der Reihe $\varphi(x)$ nicht größer als 1, sondern also gleich 1 ist. Der Kettenbruch ist dann nach dem Bewiesenen gleich

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=1} \frac{\alpha\beta \int\limits_0^x x^{\alpha}(1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x}\, dx}{\alpha \int\limits_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x}\, dx}.$$

Da diese Integrale wegen $\beta + \gamma - \alpha > 0$ bis zur Stelle $x = 1$ erstreckt werden können, ergibt sich also:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta|}{|\gamma} + \dfrac{\alpha\beta+\beta|}{|\gamma+1} + \dfrac{\alpha\beta+2\beta|}{|\gamma+2} + \dfrac{\alpha\beta+3\beta|}{|\gamma+3} + \cdots \\ = \beta \cdot \dfrac{\int\limits_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x}\, dx}{\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x}\, dx} \quad \text{für} \begin{cases} \alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0, \\ \beta+\gamma-\alpha>0 \end{cases} \end{cases}$$

(*Euler* **5**, **10**, *Perron* **4**). Ein Spezialfall dieser Formel findet sich auch bei *Cesàro* **1**. Übrigens läßt sich die Formel (16) auch aus dem allgemeinen Satz 2 herleiten, sogar mit einem etwas weiteren Geltungsbereich (*Perron* **4**).

Wir wollen noch einen bemerkenswerten Spezialfall aus (16) herleiten. Setzt man $\alpha = 1$ und ersetzt γ durch $\gamma - \beta + 1$, so kommt, wenn man noch beiderseits die Zahl $\gamma - \beta$ hinzuaddiert:

$$(17)\quad \begin{cases} \gamma - \beta + \dfrac{\beta|}{|\gamma-\beta+1} + \dfrac{2\beta|}{|\gamma-\beta+2} + \cdots = \dfrac{\int\limits_0^1 (1-x)^{\gamma-1} e^{\beta x}(\gamma-\beta+\beta x)\, dx}{\int\limits_0^1 (1-x)^{\gamma-1} e^{\beta x}\, dx} \\ \qquad (\beta>0,\ \gamma>0,\ \gamma+1>\beta). \end{cases}$$

Hier ist aber der Integrand des Zählers die Ableitung von $-(1-x)^{\gamma} e^{\beta x}$; das Zählerintegral ist also gleich 1. Das Integral des Nenners aber geht durch die Substitution $x = 1 - \frac{u}{\beta}$ über in

$$e^{\beta}\beta^{-\gamma}\int_0^{\beta} e^{-u}u^{\gamma-1}du = e^{\beta}\beta^{-\gamma}P_{\beta}(\gamma)$$

(vgl. § 81, Formel (23)). Geht man also in (17) zum reziproken Wert über, so kommt:

$$(18)\begin{cases}\frac{1}{|\gamma-\beta} + \frac{\beta}{|\gamma-\beta+1} + \frac{2\beta}{|\gamma-\beta+2} + \frac{3\beta}{|\gamma-\beta+3} + \cdots = e^{\beta}\beta^{-\gamma}P_{\beta}(\gamma) \\ (\beta > 0,\ \gamma > 0,\ \gamma+1 > \beta).\end{cases}$$

Damit ist die Schlömilchsche Formel (26) des § 81 für den Fall positiver Elemente zum zweitenmal bewiesen.

V. Wir nehmen jetzt den Fall

$$\beta_1 > 0, \quad \gamma_1 = \alpha_1 - \beta_1 \geqq 0.$$

Die Differentialgleichung (10) lautet dann:

$$(19) \qquad x(1-x)(\alpha_1 + \beta_1 x)y' + [\alpha - \gamma x - (\beta + \beta_1)x^2]y = 0.$$

Der dem Nullpunkt am nächsten gelegene singuläre Punkt ist also $x = 1$, so daß die Reihen $f(x)$, $\varphi(x)$ mindestens den Konvergenzradius 1 haben. Die Gleichung (19) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} + \frac{C\beta_1}{\alpha_1 + \beta_1 x},$$

wobei

$$(20) \qquad A = \frac{\alpha}{\alpha_1}; \quad B = \frac{\beta + \beta_1 + \gamma - \alpha}{\alpha_1 + \beta_1}; \quad C = \frac{\alpha\beta_1^2 + \gamma\alpha_1\beta_1 - (\beta + \beta_1)\alpha_1^2}{\alpha_1\beta_1(\alpha_1 + \beta_1)}$$

ist. Durch Integration kommt

$$y = x^{-A}(1-x)^{-B}(\alpha_1 + \beta_1 x)^C,$$

und daher nach (12):

$$f(x) = x^{-A}(1-x)^{-B}(\alpha_1 + \beta_1 x)^C\left(C_1 + \alpha\beta\int_0^x x^A(1-x)^{B-1}(\alpha_1 + \beta_1 x)^{-C-1}dx\right),$$

$$\varphi(x) = x^{-A}(1-x)^{-B}(\alpha_1 + \beta_1 x)^C\left(C_2 + \alpha\int_0^x x^{A-1}(1-x)^{B-1}(\alpha_1 + \beta_1 x)^{-C-1}dx\right);$$

denn es ist $A > 0$, und daher die untere Integrationsgrenze 0 gestattet. Da die Terme außerhalb der Klammern für $\lim x = 0$ unendlich werden, muß wieder $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ sein. Setzt man ferner $B > 0$ voraus, so wird $\lim_{x=1} \varphi(x) = \infty$, so daß der Konvergenzradius der Reihe $\varphi(x)$ nur gleich 1 sein kann. Der Kettenbruch wird dann gleich

$$\lim_{x=1} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x=1} \frac{\alpha\beta\int\limits_0^x x^A(1-x)^{B-1}(\alpha_1+\beta_1 x)^{-C-1}dx}{\alpha\int\limits_0^x x^{A-1}(1-x)^{B-1}(\alpha_1+\beta_1 x)^{-C-1}dx};$$

also, da die Integrale wegen $B > 0$ wieder bis $x = 1$ erstreckt werden dürfen:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta|}{|\gamma} + \dfrac{(\alpha+\alpha_1)(\beta+\beta_1)|}{|\gamma+(\alpha_1-\beta_1)} + \dfrac{(\alpha+2\alpha_1)(\beta+2\beta_1)|}{|\gamma+2(\alpha_1-\beta_1)} + \cdots \\ = \beta \dfrac{\int\limits_0^1 x^A(1-x)^{B-1}(\alpha_1+\beta_1 x)^{-C-1}dx}{\int\limits_0^1 x^{A-1}(1-x)^{B-1}(\alpha_1+\beta_1 x)^{-C-1}dx} \quad \begin{pmatrix}\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0, \\ \alpha_1 \geqq \beta_1 > 0,\ B>0\end{pmatrix}, \end{cases}$$

wobei A, B, C die Werte (20) sind (*Euler* **3**, **5**).

Speziell für $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ kommt:

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta|}{|\gamma} + \dfrac{(\alpha+1)(\beta+1)|}{|\gamma} + \dfrac{(\alpha+2)(\beta+2)|}{|\gamma} + \cdots \\ = \beta \dfrac{\int\limits_0^1 x^\alpha(1-x)^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha+\gamma-1)}(1+x)^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha-\gamma-1)}dx}{\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha+\gamma-1)}(1+x)^{\frac{1}{2}(\beta-\alpha-\gamma-1)}dx} \\ (\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \beta-\alpha+\gamma+1>0), \end{cases}$$

und wenn man auch noch $\alpha = \beta = 1$ setzt:

$$(23)\quad \frac{1|}{|\gamma} + \frac{4|}{|\gamma} + \frac{9|}{|\gamma} + \frac{16|}{|\gamma} + \cdots = \frac{\int\limits_0^1 x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{dx}{1+x}}{\int\limits_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{dx}{1+x}} \quad (\gamma>0)$$

(*Euler* **5**).

Für $\beta = \alpha + 1$ folgt aus (22), wenn man durch α dividiert und 2γ statt γ schreibt:

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha+1|}{|2\gamma} + \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)|}{|2\gamma} + \dfrac{(\alpha+2)(\alpha+3)|}{|2\gamma} + \dfrac{(\alpha+3)(\alpha+4)|}{|2\gamma} + \cdots \\ \qquad = \dfrac{(\alpha+1)\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} dx}{\alpha \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} dx} \qquad \begin{pmatrix}\alpha>0\\ \gamma>0\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Hier formen wir den Nenner durch partielle Integration um in

$$\int_{x=0}^{1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} d(x^{\alpha}) = -\int_{x=0}^{1} x^{\alpha}\, d\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} = 2\gamma \int_0^1 x^{\alpha}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} \frac{dx}{1-x^2}.$$

In gleicher Weise läßt sich der Zähler umformen. Addiert man dann noch beiderseits die Zahl 1, so entsteht die Formel von *Cesàro* **1**:

$$(25)\quad \begin{cases} 1 + \dfrac{\alpha+1|}{|2\gamma} + \dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)|}{|2\gamma} + \dfrac{(\alpha+2)(\alpha+3)|}{|2\gamma} + \dfrac{(\alpha+3)(\alpha+4)|}{|2\gamma} + \cdots \\ \qquad = \dfrac{\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} \frac{dx}{1-x}}{\displaystyle\int_0^1 x^{\alpha}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\gamma} \frac{dx}{1-x^2}} \qquad \begin{pmatrix}\alpha>0\\ \gamma>0\end{pmatrix}. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Formel (21) lassen sich auch einige früher erlangte Resultate von neuem bestätigen. Setzt man nämlich

$$\alpha = p, \quad \beta = q\xi, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = \xi, \quad \gamma = r - (1+p+q-r)\xi,$$

so wird nach (20)

$$A = p, \quad B = r - p, \quad C = r - q - 1,$$

und die Formel (21) geht über in:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{pq\xi \quad |}{|r-(1+p+q-r)\xi} + \dfrac{(p+1)(q+1)\xi \quad |}{|r+1-(2+p+q-r)\xi} + \dfrac{(p+2)(q+2)\xi \quad |}{|r+2-(3+p+q-r)\xi} + \cdots \\ = \dfrac{q\xi \displaystyle\int_0^1 x^{p}(1-x)^{r-p-1}(1+\xi x)^{q-r} dx}{\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{r-p-1}(1+\xi x)^{q-r} dx} \qquad \begin{pmatrix} r>p>0,\ q>0,\ 1\geqq\xi>0, \\ r>(1+p+q-r)\xi \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Führt man hier eine neue Integrationsvariable y ein mittels der Substitution

$$x = \frac{1-y}{1+\xi y},$$

so geht die rechte Seite von (26) zunächst über in

$$\text{(27)} \qquad \frac{q\xi\int\limits_0^1 y^{r-p-1}(1-y)^p(1+\xi y)^{-q-1}dy}{\int\limits_0^1 y^{r-p-1}(1-y)^{p-1}(1+\xi y)^{-q}dy}\,{}^{1)}.$$

Der Zähler in (27) läßt sich aber anders schreiben. Es ist nämlich identisch

$$q\int\limits_0^1 y^{r-p-1}(1-y)^p(1+\xi y)^{-q-1}dy$$

$$= (p+q-r)\int\limits_0^1 y^{r-p-1}(1-y)^{p-1}(1+\xi y)^{-q}dy$$

$$+ (r-q)\int\limits_0^1 y^{r-p}(1-y)^{p-1}(1+\xi y)^{-q}dy,$$

wovon man sich leicht überzeugt, wenn man alle Glieder auf die linke Seite bringt und unter ein Integralzeichen vereinigt; dann ist der Integrand nämlich einfach die Ableitung nach y von $y^{r-p}(1-y)^p(1+\xi y)^{-q}$; das Integral also Null. Der Ausdruck (27) ist daher auch gleich

$$(p+p-r)\xi + \frac{(r-q)\xi\int\limits_0^1 y^{r-p}(1-y)^{p-1}(1+\xi y)^{-q}dy}{\int\limits_0^1 y^{r-p-1}(1-y)^{p-1}(1+\xi y)^{-q}dy}.$$

Der hier auftretende Bruch unterscheidet sich nun von dem in (26) auftretenden nur dadurch, daß die Zahlen p, q durch $r-p$, $r-q$ ersetzt sind. Er läßt sich also, wenn noch $r > q$ und $r > (1-p-q+r)\xi$ vorausgesetzt wird, durch den analogen Kettenbruch ausdrücken, wodurch man schließlich erhält:

---

1) Führt man dies in (26) ein und setzt noch $y = e^{-2u}$, so entsteht eine für $\xi = 1$ bei *Stieltjes* 8 vorkommende Formel.

$$(28)\quad\begin{cases} \dfrac{pq\xi\,|}{|r-(1+p+q-r)\xi} + \dfrac{(p+1)(q+1)\xi\,|}{|r+1-(2+p+q-r)\xi} + \dfrac{(p+2)(q+2)\xi\,|}{|r+2-(3+p+q-r)\xi} + \cdots \\ = (p+q-r)\xi + \dfrac{(r-p)(r-q)\xi\,|}{|r-(1-p-q+r)\xi} + \dfrac{(r-p+1)(r-q+1)\xi\,|}{|r+1-(2-p-q+r)\xi} + \cdots \\ \text{für } 0 < \xi \leqq 1,\ r > p > 0,\ r > q > 0, \\ r > (1+p+q-r)\xi,\ r > (1-p-q+r)\xi. \end{cases}$$

Das ist nun wieder die Formel (22) des vorigen Paragraphen, die allerdings dort in viel weiterem Umfang bewiesen wurde. Nur an einer Stelle reicht auch der jetzt erlangte Geltungsbereich über den früheren hinaus, indem der Wert $\xi = 1$ jetzt zulässig ist. Gleichwohl liefert uns auch dieser Wert kein neues Resultat, sondern nur eine interessante Bestätigung der Formel (32) des § 47, welche nämlich durch die Substitution

$$p = \frac{a+b+c}{c}, \quad q = \frac{a-b+c}{c}, \quad r = \frac{a+h+2c}{c}$$

nach Multiplikation mit c entsteht.

§ 84. Die Formel von Pincherle.

I. Wir wenden uns jetzt den allgemeinen Kettenbrüchen der Form

$$(1)\qquad b_0 + \frac{a_1\,|}{|b_1} + \frac{a_2\,|}{|b_2} + \cdots \quad (a_\nu \neq 0,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu, bei denen a_ν, b_ν ganze rationale Funktionen von ν sind. Dabei soll, wenn a_ν vom p^{ten}, b_ν vom q^{ten} Grad ist, $0 < p \leqq 2q$ sein. Ohne weitere Beschränkung der Allgemeinheit darf dann auch $p \geqq q$ vorausgesetzt werden. Denn wenn das nicht von vornherein der Fall ist, so läßt sich der Kettenbruch doch durch einen äquivalenten mit dieser Eigenschaft ersetzen, z. B. wenn alle $b_\nu \neq 0$, durch

$$b_0 + \frac{a_1 b_2\,|}{|b_1 b_2} + \frac{a_2 b_2 b_3\,|}{|b_2 b_3} + \frac{a_3 b_3 b_4\,|}{|b_3 b_4} + \cdots.$$

Wir wollen daher schon bei dem Kettenbruch (1) die Ungleichungen $0 < q \leqq p \leqq 2q$ voraussetzen. Dann zerlegen wir das Polynom a_ν irgendwie in zwei Faktoren: $a_\nu = c_{\nu-1} d_\nu$, wobei $c_{\nu-1}$ genau vom q^{ten} Grad sein soll, also d_ν vom $(p-q)^{\text{ten}}$, d. h. höchstens q^{ten} Grad. Der Kettenbruch (1) schreibt sich dann folgendermaßen:

$$(2)\qquad b_0 + \frac{c_0 d_1\,|}{|b_1} + \frac{c_1 d_2\,|}{|b_2} + \frac{c_2 d_3\,|}{|b_3} + \cdots \quad \begin{pmatrix} c_\nu \neq 0,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ d_\nu \neq 0,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

und ist daher äquivalent mit dem limitärperiodischen

$$(3)\qquad b_0 + \frac{d_1\,|}{\left|\dfrac{b_1}{c_0}\right.} + \frac{\dfrac{d_2}{c_0}\,\Big|}{\left|\dfrac{b_2}{c_1}\right.} + \frac{\dfrac{d_3}{c_1}\,\Big|}{\left|\dfrac{b_3}{c_2}\right.} + \frac{\dfrac{d_4}{c_2}\,\Big|}{\left|\dfrac{b_4}{c_3}\right.} + \cdots.$$

Wir setzen nun

$$(4)\begin{cases} b_\nu = \beta_0 + \beta_1\nu + \beta_2\nu(\nu-1) + \cdots + \beta_q\nu(\nu-1)\cdots(\nu-q+1) & \beta_q \neq 0 \\ c_\nu = \gamma_0 + \gamma_1\nu + \gamma_2\nu(\nu-1) + \cdots + \gamma_q\nu(\nu-1)\cdots(\nu-q+1) & \gamma_q \neq 0 \\ d_\nu = \delta_0 + \delta_1\nu + \delta_2\nu(\nu-1) + \cdots + \delta_q\nu(\nu-1)\cdots(\nu-q+1), \end{cases}$$

da sich auf diese Form ja offenbar jedes Polynom q^{ten} Grades bringen läßt; δ_q darf auch Null sein. Sind ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(5)\qquad \gamma_q z^2 - \beta_q z - \delta_q = 0,$$

so wollen wir noch $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ voraussetzen. Wenn sich dann gewisse Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ bestimmen lassen, die den Rekursionsformeln

$$(6)\qquad x_0 = b_0 x_1 + d_1 x_2,$$

$$(7)\qquad x_\nu = \frac{b_\nu}{c_{\nu-1}} x_{\nu+1} + \frac{d_{\nu+1}}{c_{\nu-1}} x_{\nu+2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

genügen, und zwar derart, daß

$$(8)\qquad \limsup_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{|x_\nu|} \begin{cases} < |\varrho_2|^{-1} & \text{für } \varrho_2 \neq 0 \\ = \text{endlich} & \text{für } \varrho_2 = 0 \end{cases}$$

ist, so wird nach Satz 46, Kap. VII der Kettenbruch (3) gleich $\frac{x_0}{x_1}$ sein, falls x_1 nicht verschwindet. Wenn aber die Gleichungen (7) nur für $\nu \geqq n$ bestehen, und wenn $x_{n+1} \neq 0$ ist, so wird entsprechend immer noch

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{b_n}{c_{n-1}} + \frac{\frac{d_{n+1}}{c_{n-1}}\Big|}{\Big|\frac{b_{n+1}}{c_n}} + \frac{\frac{d_{n+2}}{c_n}\Big|}{\Big|\frac{b_{n+2}}{c_{n+1}}} + \cdots,$$

also auch

$$(9)\qquad c_{n-1}\frac{x_n}{x_{n+1}} = b_n + \frac{c_n d_{n+1}\,|}{|\, b_{n+1}} + \frac{c_{n+1} d_{n+2}\,|}{|\, b_{n+2}} + \frac{c_{n+2} d_{n+3}\,|}{|\, b_{n+3}} + \cdots$$

sein. Natürlich brauchen in diesem letzteren Fall die Bedingungen $c_{\nu-1} \neq 0$, $d_{\nu+1} \neq 0$ auch nur für $\nu \geqq n$ erfüllt zu sein.

II. Dem Rekursionssystem (7) suchen wir nun wenigstens für hinreichend große ν $(\nu \geqq n)$ durch folgenden Ansatz zu genügen:

$$(10)\qquad x_\nu = \int_l \varphi(z) z^{-\nu} dz \qquad (\nu \geqq n),$$

wobei die Funktion $\varphi(z)$ und der Integrationsweg l noch geeignet zu bestimmen sind (sog. Laplacesche Transformation, nach *Laplace* 2).

Die ersten Bedingungen, welche wir dem Weg l auferlegen wollen, sind die folgenden:

$$\int_l d[\varphi^{(\lambda)}(z) z^{-\nu+1+\lambda}] = 0 \qquad (\nu \geqq n;\ \lambda = 0, 1, \ldots, q-2). \tag{11}$$

D. h. die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke sollen am Ende des Wegs l den gleichen Wert haben wie am Anfang; für $q = 1$ fallen diese $q - 1$ Bedingungen weg. Aus (10) folgt dann durch wiederholte partielle Integration mit Rücksicht auf (11) sukzessive:

$$\left\{\begin{array}{ll} (\nu-1)x_\nu = \int_l \varphi'(z) z^{-\nu+1} dz & (\nu \geqq n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-q+1)x_\nu = \int_l \varphi^{(q-1)}(z) z^{-\nu+q-1} dz & (\nu \geqq n), \end{array}\right. \tag{12}$$

$$\left|\begin{array}{l} (\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-q)x_\nu \\ = \int_l \varphi^{(q)}(z) z^{-\nu+q} dz - \int_l d[\varphi^{(q-1)}(z) z^{-\nu+q}] \end{array}\right. \qquad (\nu \geqq n). \tag{13}$$

Addiert man die $q + 1$ Gleichungen (10), (12), (13) zueinander, nachdem man sie zuvor der Reihe nach mit $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_q$ multipliziert hat, so kommt für $\nu \geqq n$:

$$c_{\nu-1} x_\nu = \int_l z^{-\nu}(\gamma_0 \varphi + \gamma_1 z \varphi' + \cdots + \gamma_q z^q \varphi^{(q)}) dz - \int_l d[\varphi^{(q-1)}(z) \gamma_q z^{-\nu+q}].$$

Setzt man statt der γ_i die β_i bzw. δ_i und ersetzt ν durch $\nu + 1$ bzw. $\nu + 2$, so ergibt sich analog:

$$b_\nu x_{\nu+1} = \int_l z^{-\nu-1}(\beta_0 \varphi + \beta_1 z \varphi' + \cdots + \beta_q z^q \varphi^{(q)}) dz - \int_l d[\varphi^{(q-1)}(z) \beta_q z^{-\nu-1+q}],$$

$$d_{\nu+1} x_{\nu+2} = \int_l z^{-\nu-2}(\delta_0 \varphi + \delta_1 z \varphi' + \cdots + \delta_q z^q \varphi^{(q)}) dz - \int_l d[\varphi^{(q-1)}(z) \delta_q z^{-\nu-2+q}].$$

Führt man diese Werte in die Gleichung

$$c_{\nu-1} x_\nu - b_\nu x_{\nu+1} - d_{\nu+1} x_{\nu+2} = 0,$$

welche ja mit (7) identisch ist, ein, so kommt:

$$\int_l z^{-\nu-2}\Big[\sum_{\lambda=0}^{q} (\gamma_\lambda z^2 - \beta_\lambda z - \delta_\lambda) z^\lambda \varphi^{(\lambda)}(z)\Big] dz$$

$$= \int_l d[\varphi^{(q-1)}(z) z^{-\nu-2+q}(\gamma_q z^2 - \beta_q z - \delta_q)].$$

Das Rekursionssystem (7) wird daher für $\nu \geqq n$ durch die Werte (10) sicher befriedigt, wenn die Funktion $\varphi(z)$ ein Integral der linearen Differentialgleichung q^{ter} Ordnung

$$(14) \qquad \sum_{\lambda=0}^{q} (\gamma_\lambda z^2 - \beta_\lambda z - \delta_\lambda) z^\lambda \varphi^{(\lambda)}(z) = 0$$

ist und außer den Nebenbedingungen (11) noch der folgenden genügt:

$$(15) \qquad \int_l d[\varphi^{(q-1)}(z) z^{-\nu-2+q}(\gamma_q z^2 - \beta_q z - \delta_q)] = 0 \qquad (\nu \geqq n).$$

Weil $\gamma_q \neq 0$, so ist nach der allgemeinen Theorie der linearen Differentialgleichungen der Punkt ∞ für die Gleichung (14) eine sogenannte Stelle der Bestimmtheit, d. h. es gibt eine ganze Zahl m derart, daß für jedes Integral von (14)

$$(16) \qquad [\varphi(z) z^{-m+1}]_{z=\infty} = 0$$

ist. Alsdann wird, wie aus der bekannten Form des allgemeinen Integrals hervorgeht, auch

$$(17) \qquad [\varphi^{(\lambda)}(z) z^{-m+1+\lambda}]_{z=\infty} = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

sein. Vergleicht man aber damit unsere Bedingungsgleichungen (11), so liegt es nahe, $n \geqq m$ zu wählen und den Anfangs- und Endpunkt des Wegs l ins Unendliche zu legen, wodurch dann die Forderungen (11) und (15) erfüllt sind. Da die x_ν nach (10) im Integranden den Faktor $z^{-\nu}$ enthalten und da sie, um der Forderung (8) zu genügen, nicht allzu groß werden dürfen, wird man gut tun, den ganzen Weg l möglichst vom Nullpunkt entfernt zu halten. Anderseits darf aber der Weg l auch nicht so beschaffen sein, daß er sich auf den Punkt ∞ zusammenziehen läßt, ohne dabei über eine im Endlichen gelegene singuläre Stelle von $\varphi(z)$ gezogen zu werden; denn sonst wäre das Integral (10) einfach Null für alle ν. Als singuläre Stellen von $\varphi(z)$ kommen nun, da $\varphi(z)$ der Differentialgleichung (14) genügt, außer 0 und ∞ nur die Wurzeln der Gleichung (5) in Betracht, also ϱ_1 und ϱ_2. Da wir $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ vorausgesetzt haben, so ist ϱ_1 die vom Nullpunkt am weitesten entfernte singuläre Stelle, und unsere Überlegungen führen dazu, den Weg l in der Weise zu fixieren, daß er längs der Verlängerung der Verbindungsstrecke $\overrightarrow{0\varrho_1}$ aus dem Unendlichen kommt, den Punkt ϱ_1 mit einem sehr kleinen Radius ε umkreist und dann längs derselben Geraden ins Unendliche zurückkehrt (Fig. 7).

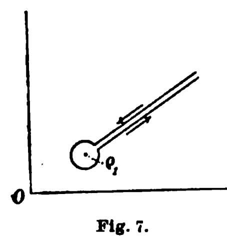


Fig. 7.

Alsdann sind auch in der Tat alle Forderungen erfüllt. Zunächst (11) und (15), weil Anfangs- und Endpunkt im Unendlichen liegen. Aber auch (8); denn auf dem Weg l ist überall $|z| \geqq |\varrho_1| - \varepsilon$, und nach (16) bleibt

$|\varphi(z)z^{-m}|$ auf l unter einer Schranke G (die übrigens von ε abhängt). Dann ist aber für $\nu > m + 2$:

$$|x_\nu| = \left|\int_l \varphi(z) z^{-\nu} dz\right|$$

$$= \left|\int_l \frac{\varphi(z) z^{-m}}{z^{\nu - m - 2}} \frac{dz}{z^2}\right| \leqq \frac{G}{(|\varrho_1| - \varepsilon)^{\nu - m - 2}} \int_l \frac{|dz|}{|z|^2} = \frac{H}{(|\varrho_1| - \varepsilon)^\nu},$$

wo H von ν nicht abhängt. Hieraus ersieht man, wenn nur der Radius ε kleiner als $|\varrho_1| - |\varrho_2|$ gewählt wird, daß gewiß auch die Forderung (8) erfüllt ist. Es wird daher sicher die Gleichung (9) gelten, wenn nur $x_{n+1} \neq 0$ ist.

Wenn $\varphi(z)$ im Punkt ϱ_1 von höherer als $(q - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwindet, d. h. wenn $\varphi(z)(z - \varrho_1)^{-q+2}$ für $\lim z = \varrho_1$ verschwindet, so kann als Weg l auch einfach die gerade Linie von ϱ_1 bis ∞ gewählt werden, in der dem Nullpunkt entgegengesetzten Richtung. In der Tat ist dann

$$\varphi(z)_{z=\varrho_1} = 0, \quad \varphi'(z)_{z=\varrho_1} = 0, \ldots, \varphi^{(q-2)}(z)_{z=\varrho_1} = 0,$$

$$\varphi^{(q-1)}(z)(\gamma_q z^2 - \beta_q z - \delta_q)_{z=\varrho_1} = 0,$$

letzteres weil $\gamma_q z^2 - \beta_q z - \delta_q$ den Faktor $z - \varrho_1$ enthält und weil $\varphi^{(q-1)}(z)$ nicht so stark wie $(z - \varrho_1)^{-1}$ unendlich wird. Für unsern neuen Weg l sind also die Forderungen (11) und (15) wieder erfüllt. Daß das gleiche auch von der Forderung (8) gilt, ergibt sich ebenso wie vorhin. Zusammenfassend erhalten wir das Theorem von *Pincherle* **1**:

Satz 8. *Ist $q \geqq 1$ eine ganze Zahl und setzt man*

$$b_\nu = \beta_0 + \beta_1 \nu + \beta_2 \nu(\nu - 1) + \cdots + \beta_q \nu(\nu - 1) \cdots (\nu - q + 1) \quad \beta_q \neq 0,$$

$$c_\nu = \gamma_0 + \gamma_1 \nu + \gamma_2 \nu(\nu - 1) + \cdots + \gamma_q \nu(\nu - 1) \cdots (\nu - q + 1) \quad \gamma_q \neq 0,$$

$$d_\nu = \delta_0 + \delta_1 \nu + \delta_2 \nu(\nu - 1) + \cdots + \delta_q \nu(\nu - 1) \cdots (\nu - q + 1),$$

wo wenigstens ein $\delta_i \neq 0$, und bezeichnet man mit ϱ_1, ϱ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung $\gamma_q z^2 - \beta_q z - \delta_q = 0$, wobei $|\varrho_1| > |\varrho_2|$ sein soll, so gibt es eine ganze Zahl $n \geqq 1$ derart, daß $c_{\nu-1} \neq 0$, $d_{\nu+1} \neq 0$ für $\nu \geqq n$, und daß

$$[\varphi(z) z^{-n+1}]_{z=\infty} = 0$$

ist für jedes Integral $\varphi(z)$ der linearen Differentialgleichung

$$\sum_{\lambda=0}^{q} (\gamma_\lambda z^2 - \beta_\lambda z - \delta_\lambda) z^\lambda \varphi^{(\lambda)}(z) = 0.$$

Außerdem gilt die Formel

$$b_n + \frac{c_n d_{n+1}|}{|\, b_{n+1}} + \frac{c_{n+1} d_{n+2}|}{|\, b_{n+2}} + \frac{c_{n+2} d_{n+3}|}{|\, b_{n+3}} + \cdots = c_{n-1} \frac{\int\limits_l \varphi_1(z) z^{-n} dz}{\int\limits_l \varphi_1(z) z^{-n-1} dz},$$

wenn $\varphi_1(z)$ ein solches Integral der Differentialgleichung ist, für welches der Nenner nicht verschwindet.[1]) *Dabei ist der Integrationsweg l eine Linie, die in der Verlängerung der Strecke $\overrightarrow{0\varrho_1}$ aus dem Unendlichen kommt, den Punkt ϱ_1 in einem kleinen Kreis umläuft und längs der nämlichen Geraden ins Unendliche zurückkehrt.*

Falls aber $\varphi_1(z)(z-\varrho_1)^{2-q}$ für $\lim z = \varrho_1$ verschwindet, kann für l auch einfach der gerade Halbstrahl gewählt werden, der vom Punkt ϱ_1 in der Verlängerung der Strecke $\overrightarrow{0\varrho_1}$ ins Unendliche führt.

III. Wir behandeln jetzt einige Beispiele.

Erstes Beispiel. Sei

$$b_\nu = \gamma - 1 + \nu, \quad c_\nu = \alpha + \nu, \quad d_\nu = \beta + 0.$$

Hier ist $q = 1$; die Differentialgleichung lautet

$$(z^2 - z) z \varphi'(z) + [\alpha z^2 - (\gamma - 1) z - \beta] \varphi(z) = 0$$

und hat das Integral

$$\varphi(z) = z^{-\beta-\gamma+1}(z-1)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\frac{\beta}{z}}.$$

Setzt man $\Re(\alpha) > 0$ voraus, so wird, $\varphi(z)_{z=\infty} = 0$; man kann also $n = 1$ wählen. Die Wurzeln der Gleichung $z^2 - z = 0$ sind $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$. Setzt man noch $\Re(\beta + \gamma - \alpha) > 0$ voraus, so ist auch $[\varphi(z)(z-1)]_{z=1} = 0$. Also darf man als Integrationsweg die gerade Strecke von 1 bis ∞ wählen. Es kommt so:

$$\gamma + \frac{(\alpha+1)\beta|}{|\, \gamma+1} + \frac{(\alpha+2)\beta|}{|\, \gamma+2} + \cdots = \alpha \frac{\int\limits_1^\infty z^{-\beta-\gamma}(z-1)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\frac{\beta}{z}} dz}{\int\limits_1^\infty z^{-\beta-\gamma-1}(z-1)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\frac{\beta}{z}} dz},$$

oder, indem man $z = \frac{1}{x}$ setzt:

---

1) Der Satz gilt, wenn ein solches Integral vorhanden ist; es soll damit nicht behauptet werden, daß ein solches immer vorhanden ist. Tatsächlich läßt sich zwar beweisen, daß, von genau angebbaren Grenzfällen abgesehen, ein solches Integral wirklich existiert; doch kann diese Frage hier unerörtert bleiben.

$$(18)\begin{cases} \gamma + \frac{(\alpha+1)\beta|}{|\gamma+1} + \frac{(\alpha+2)\beta|}{|\gamma+2} + \cdots = \alpha \frac{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x}\,dx}{\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta+\gamma-\alpha-1} e^{\beta x}\,dx}, \\ \text{für } \Re(\beta+\gamma) > \Re(\alpha) > 0, \quad \beta \neq 0, \end{cases}$$

sofern das Nennerintegral nicht verschwindet. Damit ist die Eulersche Formel (16) des vorigen Paragraphen wieder gewonnen, und zwar mit einem erheblich weiteren Geltungsbereich.

Zweites Beispiel. Sei

$$b_\nu = r - 1 + \nu - (\nu + p + q - r)\xi, \quad c_\nu = p + \nu, \quad d_\nu = (q - 1 + \nu)\xi$$

Die Differentialgleichung lautet dann

$$[z^2 - (1-\xi)z - \xi]z\varphi'(z)$$
$$+ [pz^2 - (r-1)z + (p+q-r)\xi z - (q-1)\xi]\varphi(z) = 0$$

und hat das Integral

$$\varphi(z) = z^{1-q}(z-1)^{r-p-1}(z+\xi)^{q-r}.$$

Setzt man $\Re(p) > 0$ voraus, so wird $\varphi(z)_{z=\infty} = 0$, so daß, wenn auch $d_\nu \neq 0$ für $\nu \geqq 2$, wieder $n = 1$ gewählt werden darf. Die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 - (1-\xi)z - \xi = 0$$

sind $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = -\xi$, und zwar ist 1 die absolut größere, wenn man $|\xi| < 1$ voraussetzt. Ist auch noch $\Re(r-p) > 0$, so wird

$$[\varphi(z)(z-1)]_{z=1} = 0,$$

und als Integrationsweg darf daher die gerade Strecke von 1 bis ∞ gewählt werden. Man erhält alsdann:

$$r - (1+p+q-r)\xi + \frac{(p+1)(q+1)\xi|}{|r+1-(2+p+q-r)\xi} + \frac{(p+2)(q+2)\xi|}{|r+2-(3+p+q-r)\xi} + \cdots$$

$$= p\,\frac{\int_1^\infty z^{-q}(z-1)^{r-p-1}(z+\xi)^{q-r}\,dz}{\int_1^\infty z^{-q-1}(z-1)^{r-p-1}(z+\xi)^{q-r}\,dz},$$

oder, indem man wieder $z = \frac{1}{x}$ setzt:

$$(19)\begin{cases} r-(1+p+q-r)\xi+\dfrac{(p+1)(q+1)\xi\,|}{|\,r+1-(2+p+q-r)\xi}+\dfrac{(p+2)(q+2)\xi\,|}{|\,r+2-(3+p+q-r)\xi}+\cdots \\ =p\dfrac{\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{r-p-1}(1+\xi x)^{q-r}\,dx}{\int\limits_0^1 x^{p}(1-x)^{r-p-1}(1+\xi x)^{q-r}\,dx} \qquad \begin{pmatrix}\Re(r)>\Re(p)>0,\ 0<|\xi|<1\\ q\neq-1,\,-2,\,-3,\ldots\end{pmatrix}, \end{cases}$$

sofern das Nennerintegral nicht verschwindet. Damit ist die Eulersche Formel (26) des vorigen Paragraphen wiedergewonnen und zwar mit einem Geltungsbereich, der erheblich über den früheren hinausreicht, allerdings in einem Punkt auch zurückbleibt, indem früher noch der Wert $\xi = 1$ zulässig war. Im wesentlichen auf unserem zweiten Weg wurde die Formel (19) von *Andoyer* 1 gewonnen.

Bekanntlich ist

$$\int\limits_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}(1-\xi x)^{-\alpha}\,dx = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma;\,\xi),$$
$$\text{für } \Re(\gamma)>\Re(\beta)>0,\quad |\xi|<1,$$

wo F wieder die hypergeometrische Reihe (siehe Seite 311) bedeutet. Man bestätigt das leicht, indem man in dem Integranden den Faktor $(1-\xi x)^{-\alpha}$ durch die binomische Reihe ersetzt und gliedweise integriert, was sich leicht rechtfertigen läßt. Demnach kann man die Integrale in (19) auch durch hypergeometrische Reihen ausdrücken, und es ergibt sich, wenn man p, q, r, ξ bzw. durch $\beta, \gamma-\alpha, \gamma, -\xi$ ersetzt:

$$(20)\begin{cases} \gamma+(1+\beta-\alpha)\xi-\dfrac{(\beta+1)(\gamma-\alpha+1)\xi\,|}{|\,\gamma+1+(2+\beta-\alpha)\xi}-\dfrac{(\beta+2)(\gamma-\alpha+2)\xi\,|}{|\,\gamma+2+(3+\beta-\alpha)\xi}-\cdots \\ =\gamma\dfrac{F(\alpha,\beta,\gamma;\,\xi)}{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1;\,\xi)} \qquad (\text{vgl. § 59, Formel (11)}) \\ (\Re(\gamma)>\Re(\beta)>0,\ 0<|\xi|<1,\ \alpha-\gamma\neq1,2,3,\ldots). \end{cases}$$

Diese Formel wurde ebenfalls von *Andoyer* 1 angegeben. Aus ihr geht im wesentlichen wieder die Formel (10) des § 82 hervor, wenn man rechts auf Zähler und Nenner die bekannte Transformationsformel

$$F(\alpha,\beta,\gamma;\,\xi)=(1-\xi)^{-\beta}F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma;\,\frac{\xi}{\xi-1}\right)$$

anwendet (vgl. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 1, § 74).

Literatur.

(Die Zahlen in [] bezeichnen die Seiten, wo die betreffende Schrift zitiert ist. Ein † bedeutet, daß die betreffende Schrift nichts mit Kettenbrüchen zu tun hat.)

Abkürzungen der Zeitschriftentitel.

Abh. Münch. = Abhandlungen der kgl. bayr. Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse.
A. Math. = Acta mathematica.
Ann. éc. n. = Annales scientifiques de l'école normale supérieure.
Ann. Toul. = Annales de la faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques.
Arch. = Archiv der Mathematik und Physik.
Bull. Pét. = Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.
Bull. s. m. = Bulletin des sciences mathématiques.
Bull. S. M. F. = Bulletin de la société mathématique de France.
C. Gott. rec. = Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores.
C. Pet. = Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae.
C. R. = Comptes rendus hébdomadaires des séances de l'Académie des sciences.
J. de math. = Journal de mathématiques pures et appliquées.
J. éc. pol. = Journal de l'école polytechnique.
J. f. Math. = Journal für die reine und angewandte Mathematik.
Linc. = Atti della reale Accademia dei Lincei. Rendiconti.
Math. Ann. = Mathematische Annalen.
Mém. Berl. = Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres (de Berlin).
Mém. Pét. = Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg.
Monh. = Monatshefte für Mathematik und Physik.
Nachr. Gött. = Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse.
N. C. Pet. = Novi commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae.
N. Mém. Berl. = Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin.
Ph. mag. = The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science.
Proc. Ed. = Proceedings of the royal society of Edinburgh.
Proc. Lond. = Proceedings of the London mathematical society
Rend. Pal. = Rendiconti del circolo matematico di Palermo.
Sb. Münch. = Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der kgl. bayr. Akademie der Wissenschaften zu München.
Trans. A. M. S. = Transactions of the American mathematical society.
Ztschr. = Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Andoyer, H. 1. Sur une classe de fractions continues. Bull. s. m. (2) 32, première partie, 1908. [510].

Bauer, G. 1. Von einem Kettenbruch Eulers und einem Theorem von Wallis. Abh. Münch. 11, 1872. [218, 220, 224].

Bernoulli, D. 1. Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis. N. C. Pet. 20, pro anno 1775. [273]. — 2. Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum. N. C. Pet. 20, pro anno 1775. [198].

Bessel, F. W. 1. Untersuchung des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, § 11. Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1824 = Abhandlungen von Friedr. Wilh. Bessel, Bd. 1. [299].

Blumenthal, O. 1. Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches für $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{z-\xi}$. Diss. Göttingen, 1898. [381, 382].

Borel, É. 1. Contribution à l'analyse arithmétique du continu. J. de math. (5) 9, 1903. [49].

Boutin. 1. Développement de $\sqrt{x}$ en fraction continue. Mathesis (2) 7, 1897. [100].

Broman, K. E. 1. Om konvergensen och divergensen af kedjebråk. Diss. Upsala 1877. [233, 238, 242].

Bruno, G. 1. Sopra un punto della teoria delle frazioni continue. Atti della reale Accademia delle scienze di Torino 21, 1885. [57].

Cesàro, E. 1. Sur quelques fractions continues. Nouvelles annales de mathématiques (3) 6, 1887. [209, 492, 498, 501].

Charves. 1. Démonstration de la périodicité des fractions continues, engendrées par les racines d'une équation du deuxième degré. Bull. s. m. (2) 1, première partie, 1877. [77].

Clausen, Th. 1. Die Funktion $\frac{1|}{|a}+\frac{1|}{|a}+\frac{1|}{|a}+\cdots$ durch die Anzahl der a ausgedrückt. J. f. Math. 3, 1828. [273].

Degen, C. F. 1. Canon Pellianus. Hafniae 1817. [100, 105].

Dumas, S. 1. Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thèse Zürich 1908. [361].

Eisenstein, G. 1. Théorèmes sur les formes cubiques et solution d'une équation du quatrième degré à quatre indéterminées. J. f. Math. 27, 1844. [315].

Euler, L. 1. Introductio in analysin infinitorum I, 1748. [73, 206]. — 2. Opuscula analytica I, 1783. [227, 475, 477, 488, 489]. — 3. Opuscula analytica II, 1785. [206, 500]. — 4. De fractionibus continuis. C. Pet. 9, ad annum 1737. [5, 73, 134, 203, 354, 478]. — 5. De fractionibus continuis observationes. C. Pet. 11, ad annum 1739. [206, 213, 498, 500]. — 6. † De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum. N. C. Pet. 4, ad annum 1752 et 1753. [35]. — 7. † Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum primum formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum. N. C. Pet. 5, ad annum 1754 et 1755. [109]. — 8. Specimen algorithmi singularis. N. C. Pet. 9, pro annis 1762 et 1763. [9, 18]. — 9. De usu novi algorithmi in Problemate Pelliano solvendo. N. C. Pet. 11, pro anno 1765. [98, 102, 103, 110]. — 10. De formatione fractionum continuarum. Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae, pro anno 1779, pars I. [209, 498]. — 11. De transformatione seriei divergentis $1-mx+m(m+n)x^2-m(m+n)(m+2n)x^3+m(m+n)\cdot(m+2n)(m+3n)x^4$ etc. in fractionem continuam. Nova Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae 2, ad annum 1784. [314]. — 12. Observationes circa fractiones continuas in hac forma contentas: $\frac{n|}{|1}+\frac{n+1|}{|2}+\frac{n+2|}{|3}+\frac{n+3|}{|4}+$ etc. Mém. Pét. 4, pour l'année 1811. [475, 480]. — 13. De fractionibus continuis Wallisii. Mém. Pét. 5, pour l'année 1812. [224, 226]. — 14. Commentatio in fractionem continuam qua illustris La Grange potestates binomiales expressit. Mém. Pét. 6, pour l'année 1813 et 1814. [352].

Falk, M. 1. Om konvergensen af Kedjebråk med blott negativa leder och Kedjebråk med omvexlande positiva och negativa leder. Diss. Upsala 1869. [242, 259].

Frobenius, G. 1. Über Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen. J. f. Math. 90, 1881. [304, 419].

Galois, É. 1. Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques. Annales de mathématiques

pures et appliquées 19, 1828—1829 = Oeuvres de Galois. [80, 83].

Gauß, C. F. 1. Disquisitiones arithmeticae, 1801 = Werke, Bd. I. — Auch deutsch von Maser. [79, 109]. — 2. Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+$ etc. C. Gott. rec. 2, 1813 = Werke, Bd. III. [311]. — 3. † Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. C. Gott. rec. 3, 1816 = Werke, Bd. III. [386].

Glaisher, J. W. L. 1. On the transformation of continued products into continued fractions. Proc. Lond. 5, 1874. [212].

Gmeiner, J. A. 1. Kriterien der Divergenz und Konvergenz von alternierenden unendlichen Kettenbrüchen. Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien; math. naturw. Klasse, Bd. 117, Abt. IIa. 1908. [249].

Göpel, A. 1. De aequationibus secundi gradus indeterminatis. J. f. Math. 45, 1853. [96, 109, 110].

Graf, J. H. 1. Relation entre la fonction Besselienne de 1re espèce et une fraction continue. Annali di matematica pura ed applicata (2) 23, 1895. [299].

Günther, S. 1. Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form. Habil. Erlangen 1872. [10, 273].

Hayashi, T. 1. † The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. Bibliotheca mathematica (3) 3, 1902. [62].

Heilermann, J. B. H. 1. De transformatione serierum in fractiones continuas. Diss. Münster 1845. [304]. — 2. Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche. J. f. Math. 33, 1846. [304]. — 3. Zusammenhang unter den Koeffizienten zweier gleichen Kettenbrüche von verschiedener Form. Ztschr. 5, 1860. [331].

Heine, E. 1. Handbuch der Kugelfunktionen. 2. Aufl. 1878—1881. [379]. — 2. Über die Reihe $1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2+\cdots$. J. f. Math. 32, 1846. [315, 316]. — 3. Untersuchungen über die Reihe $1+\frac{(q^\alpha-1)(q^\beta-1)}{(q-1)(q^\gamma-1)}x+\frac{(q^\alpha-1)(q^{\alpha+1}-1)(q^\beta-1)(q^{\beta+1}-1)}{(q-1)(q^2-1)(q^\gamma-1)(q^{\gamma+1}-1)}x^2+\cdots$. J. f. Math. 34, 1847. [315].

Hoffmann, K. E. 1. Studien über Kettenbrüche. Arch. 69, 1883. [98].

Hurwitz, A. 1. Über eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Größen. A. Math. 12, 1889. [168, 172, 173, 176, 178, 181]. — 2. Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. 39, 1891. [49]. — 3. Über die Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrg. 41, 1896. [127, 139].

Huygens, Chr. (Hugenius). 1. Opuscula posthuma. Descriptio automati planetarii. Lugduni Batavorum 1703. [55, 63].

Jacobi, C. G. J. 1. † Über eine besondere Gattung algebraischer Funktionen, die aus der Entwicklung der Funktion $(1-2xz+z)^{2^{-\frac{1}{2}}}$ entstehen. J. f. Math. 2, 1827 = Werke, Bd. VI. [351]. — 2. De fractione continua, in quam integrale $\int\limits_x^\infty e^{-x^2}dx$ evolvere licet.. J. f. Math. 12, 1834 = Werke, Bd. VI. [298].

Jensen, J. L. W. V. 1. Bidrag til Kaedebrøkernes Teori. Festskrift til H. G. Zeuthen, 1909. [9, 264, 267, 268].

de Jonquières, E. 1. Note sur un point de la théorie des fractions continues périodiques. C. R. 96, 1883. [100]. — 2. Sur la composition des périodes des fractions continues périodiques. C. R. 96, 1883. [100].

Kahl, E. 1. Über einen Kettenbruch von zweigliedriger Periode. Arch. 19, 1852. [273].

Kausler, C. F. 1. Die Lehre von den continuirlichen Brüchen. Stuttgart 1803. [304]. — 2. Expositio methodi series quascunque datas in fractiones continuas convertendi. Mém. Pét 1, pour les années 1803—1806. [304].

Klein, F. 1. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung. Nachr. Gött. 1895. [59]. — 2. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. Autographierte Vorlesung, ausgearbeitet von A. Sommerfeld 1896. [59].

von Koch, H. 1. Quelques théorèmes concernant la théorie générale des fractions continues. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 52, 1895. [235]. — 2. Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues. Bull. S. M. F. 23, 1895. [235, 259, 345].

Lagrange, J. L. 1. Solution d'un problème d'arithmétique. Miscellanea Taurinensia 4, 1766—1769 = Oeuvres, I. [102, 103]. — 2. Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré. Mém. Berl. année 1767 = Oeuvres, II. [102, 103]. — 3. Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. Mém. Berl. 24, année 1770 = Oeuvres, II. [74]. — 4. † Recherches d'arithmétique. N. Mém. Berl. année 1773 = Oeuvres, III. [65, 66]. — 5. † Suite des recherches d'arithmétique. N. Mém. Berl. année 1775 = Oeuvres, III. [110]. — 6. Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral. N. Mém. Berl. année 1776 = Oeuvres, IV. [352, 353]. — 7. Additions aux éléments d'algèbre d'Euler, 1798 = Oeuvres, VII, auch deutsch in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 103. [31, 43, 44, 52, 53, 58, 102, 159].

Laguerre, E. 1. Sur le développement en fraction continue de $e^{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}}$. Bull. S. M. F. 5, 1877 = Oeuvres, I. [350]. — 2. Sur la réduction en fractions continues d'une classe assez étendue de fonctions. C. R. 87, 1878 = Oeuvres, I. [436, 438]. — 3. Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$. Bull. S. M. F. 7, 1879 = Oeuvres, I. [392]. — 4. Sur la réduction en fractions continues d'une fonction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. Bull. S. M. F. 8, 1879 = Oeuvres, I. [436]. — 5. Sur la fonction $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^\omega$. Bull. S. M. F. 8, 1879 = Oeuvres, I. [350]. — 6. Sur la réduction en fractions continues de $e^{F(x)}$, $F(x)$ désignant un polynôme entier. J. de math. (3) 6, 1880 = Oeuvres, I. [438]. — 7. Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels. J. de math. (4) 1, 1885 = Oeuvres, II. [298, 436].

Lambert, J. H. 1. Beiträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung, zweiter Teil, Berlin 1770. a. Kap. 3. Verwandlung der Brüche [352]. b. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen. [42, 254, 353].

Laplace, P. S. 1. Traité de mécanique céleste. Livre 10, chap. 1 = Oeuvres, IV. [298]. — 2. † Théorie analytique des probabilités, 3[ième] éd. 1820, pag. 84 = Oeuvres, VII, 1847, pag. 92. [504].

Legendre, A. M. 1. Éléments de géométrie, note IV. 6[ième] éd. Paris 1806. [253]. — 2. Traité des fontions elliptiques et des intégrales Eulériennes, tome II, chap. 17. Paris 1826. [298]. — 3. Zahlentheorie, deutsch von Maser, 2[te] Aufl. Leipzig 1893. [45, 53, 85, 87, 103, 105, 109].

Lerch, M. 1. Über einige Punkte der Theorie der Eulerschen Integrale. Monh. 19, 1908. [481].

Liouville, J. 1. Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques. J. de math. 16, 1851. [139, 140, 141].

Lucas, É. 1. Théorie des nombres. Paris 1891. [66].

Mc. Kinney, Th. E. 1. Concerning a certain type of continued fractions depending on a variable parameter.

American journal of mathematics, 29, 1907. [182].

Maillet, E. 1. Introduction à la théorie des nombres transcendants. Paris 1906. [141, 143, 144]. — 2. Sur les fractions continues algébriques. J. éc. pol. (2) 12, 1908. [345, 346].

Malmsten, C. J. 1. Om convergensen af continuerliga bråk. Kongl. Vetenskaps-Akademiens Handlingar, för år 1848. [259].

Markoff, A. 1. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. A. Math. 19, 1895. [385].

Minding, F. 1. Über das Bildungsgesetz der Zähler und Nenner bei Verwandlung der Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche. Bull. Pét. 13. 1869. [9].

Minkowski, H. 1. Über die Annäherung an eine reelle Größe durch rationale Zahlen. Math. Ann. 54, 1901. [185, 186, 187, 188].

Minnigerode, B. 1. Über eine neue Methode, die Pellsche Gleichung aufzulösen. Nachr. Gött. 1873. [168, 172].

de Montessus de Ballore, R. 1. Sur les fractions continues algébriques. Bull. S. M. F. 30, 1902. [458, 463]. — 2. Sur les fractions continues algébriques. Rend. Pal. 19, 1905. [443, 454]

Muir, Th. 1. The expression of a quadratic surd as a continued fraction. Glasgow 1874. [81, 89, 91, 98]. — 2. A new special class of determinants. Proc. Ed. 8, 1874. [98]. — 3. New general formulae for the transformation of infinite series into continued fractions. Transactions of the royal society of Edinburgh 27, 1876. [304]. — 4. On the transformation of Gauß' hypergeometric series into a continued fraction. Proc. Lond. 7, 1876. [304]. — 5. A theorem in continuants. — Extension of a theorem in continuants, with an important application. Ph. mag. (5) 3, 1877. [219, 220]. — 6. On the phenomenon of greatest middle in the cycle of a class of periodic continued fractions. Proc. Ed. 12, 1884. [96, 112, 113].

Nachreiner, V. 1. Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen. Preisschrift München 1872. [10, 481].

Netto, E. 1. Über Näherungswerte und Kettenbrüche. J. f. Math. 125, 1903. [157, 158].

Nielsen, N. 1. Sur le développement en fraction continue de la fonction Q de M. Prym. Linc. (5) 15_1, 1906. [297, 298].

Ottinger, L. 1. Über die Näherungswerte der periodischen Kettenbrüche und ihre Anwendung auf Darstellung der Quadratwurzeln. Arch. 43, 1865. [203].

Padé, H. 1. Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles. Ann. éc. n. (3) 9, 1892. [353, 419, 421, 425, 427, 429, 449, 456, 477]. — 2. Sur les séries entières convergentes ou divergentes. A. Math. 18, 1894. [457]. — 3. Mémoire sur les développements en fractions continues de la fonction exponentielle pouvant servir d'introduction à la théorie des fractions continues algébriques. Ann. éc. n. (3) 16, 1899. [353, 434, 449]. — 4. Sur la distribution des reduites anormales d'une fonction. C. R. 130, 1900. [425]. — 5. Sur l'expression générale de la fonction rationnelle approchée de $(1+x)^m$. C. R. 132, 1901. [440]. — 6. Recherches sur la convergence de développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions. Ann. éc. n. (3) 24, 1907. [442].

Perron, O. 1. Note über die Konvergenz von Kettenbrüchen mit positiven Gliedern. Sb. Münch. 35, 1905. [241]. — 2. Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. Sb. Münch. 35, 1905. [276]. — 3. Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen. Sb. Münch. 37, 1907. [291, 299]. — 4. Über eine spezielle Klasse von Kettenbrüchen. Rend. Pal. 29, 1910. [473, 475, 477, 478, 479, 480, 481, 498]. — 5. Einige Konvergenz- und Divergenzkriterien für alternierende Kettenbrüche. Sb. Münch. 1911. [248, 249].

Pincherle, S. 1. Un teorema sulle frazioni continue. Linc. (4) 7_1, 1891. [507].

Possé, C. 1. Sur quelques applications des fractions continues algébriques. St. Pétersbourg 1886. [379, 386].

Pringsheim, A. 1. Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Sb. Münch. 28, 1898. [230, 231, 253, 255, 259, 260]. — 2. Über ein Konvergenzkriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern. Sb. Münch. 29, 1899. [239]. — 3. Über die Konvergenz periodischer Kettenbrüche. Sb. Münch. 30, 1900. [276]. — 4. Über einige Konvergenzkriterien für Kettenbrüche mit komplexen Gliedern. Sb. Münch. 35, 1905. [257, 258, 259]. — 5. Über Konvergenz und funktionentheoretischen Charakter gewisser limitärperiodischer Kettenbrüche. Sb. Münch. 1910. [288, 342, 344, 347, 354]. — 6. † Zur Theorie der Heineschen Reihe. Sb. Münch. 1911. [354].

Roberts, S. 1. On forms of numbers determined by continued fractions. Proc. Lond. 10, 1878. [109].

Rogers, L. J. 1. On the representation of certain asymptotic series as convergent continued fractions. Proc. Lond. (2) 4, 1907. [329, 332].

Rouché, E. 1. Mémoire sur le développement des fonctions en séries ordonnées suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue. J. éc. pol. 37ième cahier, 1858. [351].

Schlömilch, O. 1. Über die Besselsche Funktion. Ztschr. 2, 1857. [299]. — 2. Über eine Kettenbruchentwicklung für unvollständige Gammafunktionen. Ztschr. 16, 1871. [480].

Schubert, F. T. 1. De transformatione seriei in fractionem continuam. Mém. Pét. 7, pour les années 1815 et 1816. [304].

Schwenter, D. 1. Deliciae Physico-Mathematicae. Nürnberg 1636. [55].

Seeling, P. 1. Über die Formen der Zahlen, deren Quadratwurzeln, in Kettenbrüchen dargestellt, Perioden von einer gewissen Anzahl Stellen haben. Arch. 49, 1869. [100]. — 2. Über die Auflösung der Gleichung $x^2 - Ay^2 = \pm 1$ in ganzen Zahlen, wo A positiv und kein vollständiges Quadrat sein muß. Arch. 52, 1871. [106].

Seidel, L. 1. Untersuchungen über die Konvergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Habil. München 1846. [237, 238, 298]. — 2. Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen dem Bildungsgesetze eines Kettenbruches und der Art des Fortgangs seiner Näherungsbrüche. Abh. Münch. 7, 1855. [196, 200, 205].

Serret, J. A. 1. Handbuch der höheren Algebra. Deutsch von Wertheim, Bd. 1. 1878. [35, 36, 65, 85, 86]. — 2. Sur un théorème relatif aux nombres entiers. J. de math. 13, 1848. [33, 35].

Siebeck, H. 1. Über periodische Kettenbrüche. J. f. Math. 33, 1846. [9].

Smith, H. J. S. 1. Note on continued fractions. The messenger of mathematics (2) 6, 1877 = Collected mathematical papers, II. [68].

Soldner, J. 1. Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante. Munic 1809. [298, 314].

Steen, A. 1. Integration af lineaere Differentialligninger af anden Orden ved Hjaelp af Kjaedebrøker. Kopenhagen 1873. [469].

Stern, M. A. 1. Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1860. [230, 235, 244, 255, 333]. — 2. Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. J. f. Math. 10 u. 11, 1832. [9, 10, 18, 196, 206, 212, 213, 253, 489]. — 3. Über die Kennzeichen der Konvergenz eines Kettenbruchs. J. f. Math. 37, 1848. [237, 238]. — 4. Zur Theorie der periodischen Kettenbrüche. J. f. Math. 53, 1857. [95].

Stieltjes, T. J. 1. † Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. Ann. éc. n. (3) 1, 1884. [386]. — 2. Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable. Ann. Toul. 3, 1889. [326]. — 3. Note sur quelques fractions continues. The quarterly journal of pure and applied mathematics 25, 1891. [226, 502]. — 4. Recherches sur les fractions continues. Ann. Toul. a. Bd. 8, 1894. [270, 304, 374, 390, 395, 398, 399, 410, 415]. b. Bd. 9, 1895. [339, 392, 398]. — 5. Cor-

respondance d'Hermite et Stieltjes, Paris 1905. [138, 226, 335, 338].

Stolz, O. 1. Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, Leipzig 1886. [235, 253, 273, 276].

Sundman, K. F. 1. Utvecklingarna af e och e^2 uti kedjebråk med alla partialtäljare lika med ett. Öfversigt af FinskaVetenskaps-societatensFörhandlingar 38, 1895. [138].

Sylvester, J. J. 1. On a remarkable modification of Sturms theorem. Ph. mag. (4) 5, 1853. [10].

Szász, O. 1. Über gewisse unendliche Kettenbruch-Determinanten und Kettenbrüche mit komplexen Elementen. Sb. Münch. 1912. [259].

Tannery, J. 1. Sur les intégrales eulériennes. C. R. 94, 1882. [298, 492].

Thiele, T. N. 1. Bemaerkninger om periodiske Kjaedebrøkers Konvergens. Tidsskrift for Mathematik (4) 3, 1879. [277].

Thomé, L. W. 1. Über die Kettenbruchentwicklung der Gaußschen Funktion $F(\alpha, 1, \gamma; x)$. J. f. Math. 66, 1866. [348]. — 2. Über die Kettenbruchentwicklung des Gaußschen Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)}{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}$. J. f. Math. 67, 1867. [347].

Thue, A. 1. Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen. J. f. Math. 135, 1909. [141].

Tietze, H. 1. Einige Kettenbruch-Konvergenzkriterien. Monh. 21, 1910. [242, 244]. — 2. Über Kriterien für Konvergenz und Irrationalität unendlicher Kettenbrüche. Math. Ann. 70, 1911. [149, 157, 163, 244, 250, 252].

Trembley, J. 1. Recherches sur les fractions continues. Mém. Berl. 1794 et 1795. [314, 475, 489].

Tschebyscheff, P. 1. Sur le développement des fonctions à une seule variable. Bull. Pét. 1, 1860. [392].

Vahlen, K. Th. 1. Über Näherungswerte und Kettenbrüche. J. f. Math. 115, 1895. [48, 157, 170].

Viscovatoff, B. 1. De la méthode générale pour réduire toutes sortes des quantités en fractions continues. Mém. Pét. 1, pour les années 1803–1806. [304].

van Vleck, E. B. 1. On the convergence of continued fractions with complex elements. Trans. A. M. S. 2, 1901. [264, 267, 268]. — 2. On the convergence and character of the continued fraction $\frac{a_1 z}{|1} + \frac{a_2 z}{|1} + \frac{a_3 z}{|1} + \cdots$. Trans. A. M. S. 2, 1901. [262, 344]. — 3. On the convergence of the continued fraction of Gauß and other continued fractions. Annals of mathematics (2) 3, 1901. [299, 347, 354]. — 4. On the convergence of algebraic continued fractions, whose coefficients have limiting values. Trans. A. M. S. 5, 1904. [288, 347].

Wallis, J. 1. Arithmetica infinitorum, 1655 = Opera mathematica, I. [5, 209, 224]. — 2. Tractatus de algebra, 1685 = Opera mathematica, II; a. Kap. 10, 11. [42, 55, 62]. b. Kap. 84. [209]. c. Kap. 98, 99. [102].

Wölffing, E. 1. Wer hat über Kettenbrüche gearbeitet? Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen, begründet von Dr. O. Böklen (2) 10, 1908. [VI].

Verzeichnis der bemerkenswerten Kettenbrüche.

1. Numerische Kettenbrüche.

2. Relationen zwischen zwei Kettenbrüchen.

3. Kettenbruch = Zahl oder geschlossener Ausdruck ohne Integralzeichen.

4. Kettenbruch = Reihe oder Quotient von Reihen.

5. Kettenbruch = Ausdruck mit Integralzeichen.

Sachregister.

Bezeichnungen.

Druckfehler.

Seite 15. Formel (29) muß lauten: $A_{\nu+1,\lambda-1} = b_{\lambda-1} A_{\nu,\lambda} + a_\lambda A_{\nu-1,\lambda+1}$.
Seite 346. Formel (a) muß lauten: $\mathsf{A}_{\lambda-1}(x) = \mathsf{A}_\lambda(x) + a_\lambda x \mathsf{A}_{\lambda+1}(x)$.